BURHAN

Notions de logique : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/notions-de-logique/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Notions de logique	Entraînement	8

Exercice 1

Le carré d'un entier impair

Soit n un entier naturel impair. On écrit $n = 2k + 1$, avec k entier naturel.

1.

Montrer que $n^2 - 1 = 4k(k + 1)$.

INDICE

Outil : l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. **Début :** développe $(2k + 1)^2$.

2.

En distinguant le cas où k est pair et le cas où k est impair, montrer que $n^2 - 1$ est multiple de 8.

INDICE

Outil : la disjonction des cas. **Début :** si k est pair, écris $k = 2m$; sinon, $k = 2m + 1$. **Point délicat :** dans chaque cas, fais apparaître un facteur 8 dans $4k(k + 1)$.

3.

En déduire que, pour tout entier naturel n : si $n^2 - 1$ n'est pas multiple de 8, alors n est pair.

INDICE

Outil : la contraposée. **Début :** écris l'implication démontrée aux questions 1 et 2. **Point délicat :** le contraire de « impair » est « pair ».

Exercice 2

La racine carrée de trois n'est pas rationnelle

1.

Soit n un entier naturel qui n'est pas multiple de 3. En distinguant les cas $n = 3k + 1$ et $n = 3k + 2$, avec k entier, montrer que n^2 n'est pas multiple de 3.

INDICE

Outil : la disjonction des cas. **Début :** un entier non multiple de 3 a pour reste 1 ou 2 dans la division par 3. **Point délicat :** écris n^2 sous la forme $3m + 1$.

2.

En déduire que, pour tout entier naturel n : si n^2 est multiple de 3, alors n est multiple de 3.

INDICE

Outil : la contraposée. **Début :** compare l'implication demandée à celle de la question 1.

3.

Démontrer par l'absurde que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel.

INDICE

Outil : le raisonnement par l'absurde. **Début :** suppose $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$, fraction irréductible d'entiers naturels non nuls, et élève au carré. **Point délicat :** applique deux fois la question 2, à p puis à q.

Exercice 3

Trois facteurs consécutifs

Soit n un entier naturel.

1.

Montrer que $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$.

INDICE

Outil : une factorisation par n, puis l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

2.

En distinguant les cas $n = 3k$, $n = 3k + 1$ et $n = 3k + 2$, avec k entier, montrer que 3 divise $n^3 - n$.

INDICE

Outil : la disjonction des cas, avec la question 1. **Début :** les trois restes possibles dans la division par 3 sont 0, 1 et 2. **Point délicat :** dans chaque cas, trouve le facteur multiple de 3.

3.

En déduire que $n^3 + 2n$ est multiple de 3.

INDICE

Outil : la question 2. **Début :** écris $n^3 + 2n$ à l'aide de $n^3 - n$.

Exercice 4

Valeur absolue et équivalences

Résoudre dans $\mathbb{R}$, par équivalences successives, les équations et l'inéquation suivantes.

1.

$|2x-3|=5$.

INDICE

Outil : pour $a \geq 0$, $|A|=a \Leftrightarrow (A=a \text{ ou } A=-a)$. **Début :** applique-le avec $A=2x-3$.

2.

$|x+1| \leq 4$.

INDICE

Outil : pour $a \geq 0$, $|A| \leq a \Leftrightarrow -a \leq A \leq a$. **Début :** retranche ensuite 1 aux trois membres.

3.

$|x-1|=|x+3|$.

INDICE

Outil : pour deux réels positifs ou nuls a et b, $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$. **Début :** $|A|^2=A^2$. **Point délicat :** justifie pourquoi le passage au carré est ici une équivalence.

Exercice 5

Échanger deux quantificateurs

On considère les deux propositions :

- A : $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})$: $n+m$ est pair ;
- B : $(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})$: $n+m$ est pair.

1.

Montrer que A est vraie.

INDICE

Outil : pour un « pour tout, il existe », on fixe n puis on choisit m. **Début :** « Soit $n \in \mathbb{N}$. » **Point délicat :** m peut dépendre de n.

2.

Écrire la négation de B.

INDICE

Outil : remplace chaque quantificateur par l'autre, dans le même ordre, puis nie la propriété finale.

3.

Montrer que B est fausse. Expliquer en une phrase la différence entre A et B.

INDICE

Outil : démontre la négation de B. **Début :** « Soit $m \in \mathbb{N}$. » Cherche n en fonction de m.

Exercice 6

La somme des premiers carrés

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $P(n)$ la proposition : « $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

1.

Vérifier que $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$ sont vraies.

INDICE

Outil : calcule séparément les deux membres.

2.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

INDICE

Outil : la mise en facteur. **Début :** mets $\dfrac{n+1}{6}$ en facteur dans le membre de gauche. **Point délicat :** développe $(n+2)(2n+3)$ pour comparer.

3.

Démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

INDICE

Outil : le principe de récurrence, à partir du rang 1. **Début :** l'initialisation est faite à la question 1. **Point délicat :** dans l'hérédité, ajoute $(n+1)^2$ et utilise la question 2.

4.

Calculer $1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2$.

INDICE

Outil : la formule démontrée, avec $n = 10$.

Exercice 7

Une inégalité entre une puissance et un entier

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la proposition : « $3^n \geq 2n+1$ ».

1.

Démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

INDICE

Outil : le principe de récurrence. **Début :** dans l'hérédité, multiplie l'hypothèse de récurrence par 3, qui est positif. **Point délicat :** compare ensuite $6n+3$ et $2n+3$.

2.

La proposition « $(\forall n \in \mathbb{N})$: $3^n \geq 2n+2$ » est-elle vraie ?

INDICE

Outil : teste les premières valeurs de n. **Point délicat :** la question 1 ne permet pas de conclure, car $2n+2 > 2n+1$.

Exercice 8

Une divisibilité par six

1.

Calculer $7^n - 1$ pour $n = 0, 1, 2$ et 3. Quel diviseur commun observe-t-on ?

INDICE

Outil : un calcul. **Début :** $7^2 = 49$ et $7^3 = 343$.

2.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, 6 divise $7^n - 1$.

INDICE

Outil : le principe de récurrence. **Début :** écris $7^{n+1} - 1 = 7(7^n - 1) + 6$. **Point délicat :** utilise l'hypothèse de récurrence sous la forme $7^n - 1 = 6k$.

3.

La proposition « $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: 12 divise $7^n - 1$ » est-elle vraie ?

INDICE

Outil : un contre-exemple. **Début :** regarde les calculs de la question 1.