BURHAN

Notions de logique : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/notions-de-logique/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Notions de logique	Entraînement	8

Exercice 1

Le carré d'un entier impair

Soit n un entier naturel impair. On écrit $n = 2k + 1$, avec k entier naturel.

1.

Montrer que $n^2 - 1 = 4k(k+1)$.

INDICE

Outil : l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. **Début :** développe $(2k+1)^2$.

CORRIGÉ

D'après l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= 4k^2 + 4k \\ &= 4k(k+1). \end{aligned}$$

Conclusion. $n^2 - 1 = 4k(k+1)$.

2.

En distinguant le cas où k est pair et le cas où k est impair, montrer que $n^2 - 1$ est multiple de 8.

INDICE

Outil : la disjonction des cas. **Début :** si k est pair, écris $k = 2m$; sinon, $k = 2m + 1$. **Point délicat :** dans chaque cas, fais apparaître un facteur 8 dans $4k(k+1)$.

CORRIGÉ

D'après la question 1, il suffit de montrer que $4k(k+1)$ est multiple de 8. Raisonnons par disjonction des cas selon la parité de k : un entier est pair ou impair, donc ces deux cas couvrent tous les entiers naturels.

- **Cas k pair.** Il existe un entier naturel m tel que $k = 2m$. Alors $4k(k+1) = 8m(2m+1)$, qui est multiple de 8.
- **Cas k impair.** Il existe un entier naturel m tel que $k = 2m + 1$. Alors $k + 1 = 2(m+1)$, et $4k(k+1) = 8(2m+1)(m+1)$, qui est multiple de 8.

Conclusion. Dans les deux cas, $4k(k+1)$ est multiple de 8 ; d'après la question 1, $n^2 - 1$ est multiple de 8.

3.

En déduire que, pour tout entier naturel n : si $n^2 - 1$ n'est pas multiple de 8, alors n est pair.

INDICE

Outil : la contraposée. **Début :** écris l'implication démontrée aux questions 1 et 2. **Point délicat :** le contraire de « impair » est « pair ».

CORRIGÉ

Implication démontrée. Les questions 1 et 2 établissent, pour tout entier naturel n : « si n est impair, alors $n^2 - 1$ est multiple de 8 ».

Contraposée. Sa contraposée est : « si $n^2 - 1$ n'est pas multiple de 8, alors n n'est pas impair », c'est-à-dire « alors n est pair ». La contraposée d'une implication vraie est vraie.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, si $n^2 - 1$ n'est pas multiple de 8, alors n est pair.

Exemple. Pour $n = 6$, $n^2 - 1 = 35$ n'est pas multiple de 8, et 6 est bien pair.

Exercice 2

La racine carrée de trois n'est pas rationnelle

1.

Soit n un entier naturel qui n'est pas multiple de 3. En distinguant les cas $n = 3k + 1$ et $n = 3k + 2$, avec k entier, montrer que n^2 n'est pas multiple de 3.

INDICE

Outil : la disjonction des cas. **Début :** un entier non multiple de 3 a pour reste 1 ou 2 dans la division par 3. **Point délicat :** écris n^2 sous la forme $3m + 1$.

CORRIGÉ

Comme n n'est pas multiple de 3, le reste de sa division par 3 vaut 1 ou 2 : ces deux cas couvrent toutes les possibilités.

Cas $n = 3k + 1$. On développe :

$$\begin{aligned} n^2 &= 9k^2 + 6k + 1 \\ &= 3(3k^2 + 2k) + 1. \end{aligned}$$

Cas $n = 3k + 2$. On développe :

$$\begin{aligned} n^2 &= 9k^2 + 12k + 4 \\ &= 3(3k^2 + 4k + 1) + 1. \end{aligned}$$

Conclusion. Dans les deux cas, n^2 s'écrit $3m + 1$ avec m entier : le reste de sa division par 3 vaut 1, donc n^2 n'est pas multiple de 3.

2.

En déduire que, pour tout entier naturel n : si n^2 est multiple de 3, alors n est multiple de 3.

INDICE

Outil : la contraposée. **Début :** compare l'implication demandée à celle de la question 1.

CORRIGÉ

La question 1 démontre, pour tout entier naturel n : « si n n'est pas multiple de 3, alors n^2 n'est pas multiple de 3 ».

C'est la contraposée de l'implication demandée. Une implication et sa contraposée sont vraies ensemble ou fausses ensemble.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, si n^2 est multiple de 3, alors n est multiple de 3.

3.

Démontrer par l'absurde que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel.

INDICE

Outil : le raisonnement par l'absurde. **Début :** suppose $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$, fraction irréductible d'entiers naturels non nuls, et élève au carré. **Point délicat :** applique deux fois la question 2, à p puis à q.

CORRIGÉ

Supposons par l'absurde que $\sqrt{3}$ soit rationnel. Comme $\sqrt{3} > 0$, il s'écrit $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$, avec p et q entiers naturels non nuls et la fraction $\dfrac{p}{q}$ irréductible.

p est multiple de 3. En élevant au carré, $3 = \dfrac{p^2}{q^2}$, soit $p^2 = 3q^2$. Donc p^2 est multiple de 3 et, d'après la question 2, p aussi : $p = 3m$ avec m entier naturel.

q est multiple de 3. En remplaçant p par $3m$, on obtient $9m^2 = 3q^2$, soit $q^2 = 3m^2$. Donc q^2 est multiple de 3 et, d'après la question 2, q aussi.

Contradiction. L'entier 3 divise à la fois p et q : la fraction $\dfrac{p}{q}$ n'est pas irréductible, ce qui contredit l'hypothèse.

Conclusion. L'hypothèse est absurde : $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 3

Trois facteurs consécutifs

Soit n un entier naturel.

1.

Montrer que $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$.

INDICE

Outil : une factorisation par n, puis l'identité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

CORRIGÉ

On met n en facteur, puis on utilise l'identité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$\begin{aligned} n^3 - n &= n(n^2 - 1) \\ &= n(n-1)(n+1). \end{aligned}$$

Conclusion. $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$.

2.

En distinguant les cas $n = 3k$, $n = 3k+1$ et $n = 3k+2$, avec k entier, montrer que 3 divise $n^3 - n$.

INDICE

Outil : la disjonction des cas, avec la question 1. **Début :** les trois restes possibles dans la division par 3 sont 0, 1 et 2. **Point délicat :** dans chaque cas, trouve le facteur multiple de 3.

CORRIGÉ

Le reste de la division de n par 3 vaut 0, 1 ou 2 : ces trois cas couvrent tous les entiers naturels. Dans chaque cas, k désigne un entier naturel.

- **Cas $n = 3k$.** Le facteur n est multiple de 3.
- **Cas $n = 3k+1$.** Le facteur $n - 1 = 3k$ est multiple de 3.
- **Cas $n = 3k+2$.** Le facteur $n + 1 = 3k + 3 = 3(k+1)$ est multiple de 3.

Dans chaque cas, l'un des trois facteurs de $(n-1)n(n+1)$ est multiple de 3, donc ce produit aussi.

Conclusion. D'après la question 1, 3 divise $n^3 - n$.

3.

En déduire que $n^3 + 2n$ est multiple de 3.

INDICE

Outil : la question 2. **Début :** écris $n^3 + 2n$ à l'aide de $n^3 - n$.

CORRIGÉ

D'après la question 2, il existe un entier a tel que $n^3 - n = 3a$. Alors :

$$\begin{aligned} n^3 + 2n &= (n^3 - n) + 3n \\ &= 3a + 3n \\ &= 3(a + n). \end{aligned}$$

Conclusion. Comme $a + n$ est un entier, $n^3 + 2n$ est multiple de 3.

Exercice 4

Valeur absolue et équivalences

Résoudre dans $\mathbb{R}$, par équivalences successives, les équations et l'inéquation suivantes.

1.

$|2x-3|=5$.

INDICE

Outil : pour $a \geq 0$, $|A|=a \Leftrightarrow (A=a \text{ ou } A=-a)$. **Début :** applique-le avec $A=2x-3$.

CORRIGÉ

Pour $a \geq 0$, l'égalité $|A|=a$ équivaut à « $A=a$ ou $A=-a$ ». Ici $a=5$, qui est positif, et $A=2x-3$. Soit x un réel :

$$\begin{aligned} &|2x-3|=5 \\ \Leftrightarrow\ &2x-3=5 \\ &\text{ ou } 2x-3=-5 \\ \Leftrightarrow\ &2x=8 \text{ ou } 2x=-2 \\ \Leftrightarrow\ &x=4 \text{ ou } x=-1. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S=\{-1,4\}$.

2.

$|x+1| \leq 4$.

INDICE

Outil : pour $a \geq 0$, $|A| \leq a \Leftrightarrow -a \leq A \leq a$. **Début :** retranche ensuite 1 aux trois membres.

CORRIGÉ

Pour $a \geq 0$, l'inégalité $|A| \leq a$ équivaut à $-a \leq A \leq a$. Ici $a=4$, qui est positif. Soit x un réel :

$$\begin{aligned} &|x+1| \leq 4 \\ \Leftrightarrow\ &-4 \leq x+1 \leq 4 \\ \Leftrightarrow\ &-5 \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

Pour la seconde équivalence, on a retranché 1 aux trois membres, ce qui conserve le sens des inégalités.

Conclusion. L'ensemble des solutions est l'intervalle $S=[-5,3]$.

3.

$|x-1| = |x+3|$.

INDICE

Outil : pour deux réels positifs ou nuls a et b, $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$. **Début :** $|A|^2 = A^2$. **Point délicat :** justifie pourquoi le passage au carré est ici une équivalence.

CORRIGÉ

Passage au carré. Les deux membres $|x-1|$ et $|x+3|$ sont positifs ou nuls. Or deux réels positifs ou nuls sont égaux si et seulement si leurs carrés sont égaux. Comme $|A|^2 = A^2$, on a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &|x-1| = |x+3| \\ \Leftrightarrow\ &(x-1)^2 = (x+3)^2. \end{aligned}$$

Résolution. On développe les deux carrés :

$$\begin{aligned} &(x-1)^2 = (x+3)^2 \\ \Leftrightarrow\ &x^2 - 2x + 1 = x^2 + 6x + 9 \\ \Leftrightarrow\ &-8x = 8 \\ \Leftrightarrow\ &x = -1. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S = \{-1\}$.

Contrôle. $|-1-1| = 2$ et $|-1+3| = 2$.

Exercice 5

Échanger deux quantificateurs

On considère les deux propositions :

- A : $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})$: $n+m$ est pair ;
- B : $(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})$: $n+m$ est pair.

1.

Montrer que A est vraie.

INDICE

Outil : pour un « pour tout, il existe », on fixe n puis on choisit m. **Début :** « Soit $n \in \mathbb{N}$. » **Point délicat :** m peut dépendre de n.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. Choisissons $m = n$: c'est un entier naturel, et $n + m = 2n$ est pair.

À chaque entier naturel n, on associe ainsi un entier naturel m qui convient ; cet entier m dépend de n .

Conclusion. La proposition A est vraie.

2.

Écrire la négation de B.

INDICE

Outil : remplace chaque quantificateur par l'autre, dans le même ordre, puis nie la propriété finale.

CORRIGÉ

On remplace chaque quantificateur par l'autre, dans le même ordre, puis on nie la propriété finale : le contraire de « $n+m$ est pair » est « $n+m$ est impair ».

Conclusion. La négation de B est :

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}) :$$
$$n+m \text{ est impair.}$$

3.

Montrer que B est fausse. Expliquer en une phrase la différence entre A et B.

INDICE

Outil : démontre la négation de B. **Début :** « Soit $m \in \mathbb{N}$. » Cherche n en fonction de m.

CORRIGÉ

Négation de B. Montrons que la négation de B est vraie. Soit $m \in \mathbb{N}$. Choisissons $n = m + 1$, qui est un entier naturel. Alors $n + m = 2m + 1$ est impair.

Conclusion. La négation de B est vraie, donc B est fausse.

Différence entre A et B. Dans A, l'entier m peut changer avec n ; dans B, un **même** entier m devrait convenir pour tous les entiers n, ce qui est impossible.

Exercice 6

La somme des premiers carrés

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $P(n)$ la proposition : « $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

1.

Vérifier que $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$ sont vraies.

INDICE

Outil : calcule séparément les deux membres.

CORRIGÉ

- **Pour $n = 1$.** Le membre de gauche vaut $1^2 = 1$, et $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$.
- **Pour $n = 2$.** $1 + 4 = 5$, et $\dfrac{2 \times 3 \times 5}{6} = \dfrac{30}{6} = 5$.
- **Pour $n = 3$.** $1 + 4 + 9 = 14$, et $\dfrac{3 \times 4 \times 7}{6} = \dfrac{84}{6} = 14$.

Conclusion. $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$ sont vraies.

2.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

INDICE

Outil : la mise en facteur. **Début :** mets $\dfrac{n+1}{6}$ en facteur dans le membre de gauche. **Point délicat :** développe $(n+2)(2n+3)$ pour comparer.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$ un entier.

Mise en facteur. On écrit $(n+1)^2 = \dfrac{n+1}{6} \times 6(n+1)$, puis on met $\dfrac{n+1}{6}$ en facteur :

$$\begin{aligned} &\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &\quad + (n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{6}\big(n(2n+1) \\ &\quad + 6(n+1)\big). \end{aligned}$$

Comparaison des facteurs. D'une part, $n(2n+1) + 6(n+1) = 2n^2 + 7n + 6$. D'autre part :

$$\begin{aligned} &(n+2)(2n+3) \\ &= 2n^2 + 3n + 4n + 6 \\ &= 2n^2 + 7n + 6. \end{aligned}$$

Conclusion. Les deux facteurs sont égaux, donc, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} &\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

3.

Démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

INDICE

Outil : le principe de récurrence, à partir du rang 1. **Début :** l'initialisation est faite à la question 1. **Point délicat :** dans l'hérédité, ajoute $(n+1)^2$ et utilise la question 2.

CORRIGÉ

Initialisation. D'après la question 1, $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie (hypothèse de récurrence). On ajoute $(n+1)^2$ aux deux membres de $P(n)$, puis on applique la question 2 :

$$\begin{aligned} &1^2 + \cdots + n^2 \\ &\quad + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &\quad + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Comme $n+2 = (n+1)+1$ et $2n+3 = 2(n+1)+1$, c'est exactement $P(n+1)$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

4.

Calculer $1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2$.

INDICE

Outil : la formule démontrée, avec $n = 10$.

CORRIGÉ

D'après la question 3, la formule s'applique avec $n = 10$:

$$\begin{aligned} &1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2 \\ &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} \\ &= \frac{2310}{6} = 385. \end{aligned}$$

Conclusion. $1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2 = 385$.

Exercice 7

Une inégalité entre une puissance et un entier

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la proposition : « $3^n \geq 2n+1$ ».

1.

Démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

INDICE

Outil : le principe de récurrence. **Début :** dans l'hérédité, multiplie l'hypothèse de récurrence par 3, qui est positif. **Point délicat :** compare ensuite $6n+3$ et $2n+3$.

CORRIGÉ

Initialisation. Pour $n=0$: $3^0 = 1$ et $2\times 0+1 = 1$. Comme $1 \geq 1$, $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $3^n \geq 2n+1$ (hypothèse de récurrence). On multiplie les deux membres par 3, qui est strictement positif, ce qui conserve le sens de l'inégalité :

$$\begin{aligned} 3^{n+1} &= 3\times 3^n \\ &\geq 3(2n+1) \\ &= 6n+3. \end{aligned}$$

Il reste à comparer $6n+3$ à $2(n+1)+1 = 2n+3$:

$$(6n+3)-(2n+3) = 4n,$$

et $4n \geq 0$, car $n \geq 0$. Donc $6n+3 \geq 2(n+1)+1$, puis $3^{n+1} \geq 2(n+1)+1$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $3^n \geq 2n+1$ pour tout entier naturel n.

2.

La proposition « $(\forall n \in \mathbb{N})$: $3^n \geq 2n+2$ » est-elle vraie ?

INDICE

Outil : teste les premières valeurs de n. **Point délicat :** la question 1 ne permet pas de conclure, car $2n+2 > 2n+1$.

CORRIGÉ

Pour réfuter un « pour tout », un contre-exemple suffit. Pour $n=0$: $3^0 = 1$ et $2\times 0+2 = 2$. Or $1 < 2$, donc l'inégalité est fausse pour $n=0$.

Conclusion. L'entier 0 est un contre-exemple : la proposition est fausse. L'entier 1 en est un autre, car $3^1 = 3$ et $2\times 1+2 = 4$, avec $3 < 4$.

Exercice 8

Une divisibilité par six

1.

Calculer $7^n - 1$ pour $n = 0, 1, 2$ et 3. Quel diviseur commun observe-t-on ?

INDICE

Outil : un calcul. **Début :** $7^2 = 49$ et $7^3 = 343$.

CORRIGÉ

On calcule :

$$\begin{aligned} 7^0 - 1 &= 0 = 6 \times 0, \\ 7^1 - 1 &= 6 = 6 \times 1, \\ 7^2 - 1 &= 48 = 6 \times 8, \\ 7^3 - 1 &= 342 = 6 \times 57. \end{aligned}$$

Conclusion. Les quatre nombres 0, 6, 48 et 342 sont divisibles par 6.

2.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, 6 divise $7^n - 1$.

INDICE

Outil : le principe de récurrence. **Début :** écris $7^{n+1} - 1 = 7(7^n - 1) + 6$. **Point délicat :** utilise l'hypothèse de récurrence sous la forme $7^n - 1 = 6k$.

CORRIGÉ

Initialisation. $7^0 - 1 = 0 = 6 \times 0$: la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que 6 divise $7^n - 1$ (hypothèse de récurrence) : il existe un entier k tel que $7^n - 1 = 6k$. Alors :

$$\begin{aligned} 7^{n+1} - 1 &= 7 \times 7^n - 7 + 6 \\ &= 7(7^n - 1) + 6 \\ &= 42k + 6 \\ &= 6(7k + 1). \end{aligned}$$

Comme $7k + 1$ est un entier, 6 divise $7^{n+1} - 1$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, 6 divise $7^n - 1$ pour tout entier naturel n.

3.

La proposition « $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: 12 divise $7^n - 1$ » est-elle vraie ?

INDICE

Outil : un contre-exemple. **Début :** regarde les calculs de la question 1.

CORRIGÉ

Pour $n = 1$, on a $7^1 - 1 = 6$, et 12 ne divise pas 6, car $0 < 6 < 12$.

Conclusion. L'entier 1 est un contre-exemple : la proposition est fausse.

Remarque. Pourtant, 12 divise $48 = 7^2 - 1$: un exemple favorable ne suffit pas à établir un « pour tout ».