BURHAN

Notions de logique : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/notions-de-logique/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Notions de logique	Application	10

Exercice 1

Valeurs de vérité de propositions composées

On considère les trois propositions suivantes :

- P : « 51 est un nombre premier » ;
- Q : « $2^5 = 32$ » ;
- R : « $\sqrt{81} = 8$ ».

1.

Déterminer la valeur de vérité de P, de Q et de R.

INDICE

Outil : un calcul pour chacune. **Début :** cherche un diviseur de 51 autre que 1 et 51. **Point délicat :** additionne les chiffres de 51.

2.

Déterminer la valeur de vérité de « P ou Q », de « Q et R » et de $\overline{R}$.

INDICE

Outil : les définitions de la disjonction, de la conjonction et de la négation. **Point délicat :** le « ou » est inclusif.

3.

Déterminer la valeur de vérité de $P \Rightarrow R$, de $Q \Rightarrow R$ et de $Q \Leftrightarrow \overline{P}$.

INDICE

Outil : une implication n'est fausse que dans un seul cas. **Début :** pour chaque implication, regarde d'abord la valeur de l'hypothèse.

Exercice 2

La distributivité vérifiée par une table

Soit P, Q et R trois propositions. On se demande si l'équivalence suivante est une loi logique :

$$\big(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)\big) \\ \Leftrightarrow \big((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)\big)$$

1.

Combien de lignes compte la table de vérité de cette équivalence ? Dresser cette table, avec les colonnes Q ou R, P et $(Q$ ou $R)$, P et Q, P et R et $(P$ et $Q)$ ou $(P$ et $R)$.

INDICE

Outil : les tables de « et » et de « ou ». **Début :** chacune des trois propositions prend deux valeurs. **Point délicat :** n'oublie aucune combinaison ; écris d'abord les quatre lignes où P est vraie. Pour Q et R, écris les quatre couples V V, V F, F V, F F, d'abord avec P vraie, puis avec P fausse.

2.

Conclure.

INDICE

Outil : la définition d'une loi logique. **Début :** compare la colonne de P et $(Q$ ou $R)$ à la dernière.

3.

Sans dresser de table, montrer que $\big(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)\big) \Leftrightarrow \big((P \text{ ou } Q) \text{ et } R\big)$ n'est pas une loi logique.

INDICE

Outil : une seule ligne où les deux membres diffèrent suffit. **Début :** essaie P vraie et R fausse.

Exercice 3

Écrire des négations

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel et x un réel.

1.

Écrire la négation de « n est impair et $n > 10$ ».

INDICE

Outil : les lois de Morgan. **Début :** nie chacun des deux morceaux. **Point délicat :** le contraire de $n > 10$ n'est pas $n < 10$.

2.

Écrire la négation de « $x \leq -1$ ou $x \geq 3$ ».

INDICE

Outil : les lois de Morgan, pour un « ou ». **Point délicat :** l'inégalité large devient stricte.

3.

Écrire la négation de « si n est multiple de 9, alors n est multiple de 3 ». Laquelle des deux propositions est vraie, quel que soit n ?

INDICE

Outil : la négation d'une implication. **Début :** la négation de $A \Rightarrow B$ est « A et $\overline{B}$ ». **Point délicat :** écris un multiple de 9 sous la forme $9k$.

Exercice 4

Réciproque, contraposée et conditions

Pour un entier naturel n, on considère l'implication (I) : « si n est multiple de 15, alors n est multiple de 3 ».

1.

Justifier que (I) est vraie.

INDICE

Outil : la définition d'un multiple. **Début :** suppose $n = 15k$ avec k entier.

2.

Écrire la réciproque de (I). Est-elle vraie ?

INDICE

Outil : la réciproque échange l'hypothèse et la conclusion. **Point délicat :** pour la réfuter, cherche un multiple de 3 inférieur à 15 et non nul.

3.

Écrire la contraposée de (I) et donner sa valeur de vérité.

INDICE

Outil : la contraposée de $A \Rightarrow B$ est $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. **Point délicat :** n'échange pas seulement : nie aussi.

4.

Compléter par « nécessaire » ou « suffisante » :

- être multiple de 3 est une condition … pour être multiple de 15 ;
- être multiple de 15 est une condition … pour être multiple de 3.

INDICE

Outil : lorsque $A \Rightarrow B$ est vraie, B est nécessaire pour A et A est suffisante pour B. **Début :** repère A et B dans (I).

Exercice 5

Traduire avec des quantificateurs

1.

Écrire avec des quantificateurs : « tout réel strictement négatif a un cube strictement négatif ». Cette proposition est-elle vraie ?

INDICE

Outil : « tout » se traduit par $\forall$. **Début :** la phrase contient une condition : écris une implication. **Point délicat :** écris $x^3 = x \times x^2$.

2.

Écrire avec des quantificateurs : « il existe un entier naturel dont le carré vaut 50 ». Cette proposition est-elle vraie ?

INDICE

Outil : « il existe » se traduit par $\exists$. **Début :** encadre 50 entre deux carrés d'entiers consécutifs.

3.

Écrire avec des quantificateurs : « l'équation $5x + 2 = 0$ a une seule solution réelle ». Cette proposition est-elle vraie ?

INDICE

Outil : « une seule » se traduit par $\exists!$. **Début :** résous l'équation par équivalences.

Exercice 6

Nier des propositions quantifiées

Pour chacune des propositions suivantes, écrire sa négation, puis indiquer laquelle, de la proposition ou de sa négation, est vraie.

1.

$(\forall n \in \mathbb{N}) : n^2 + 1 \text{ est impair.}$

INDICE

Outil : la négation d'un « pour tout » est un « il existe ». **Début :** teste les premières valeurs de n.

2.

$(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + 4 = 0.$

INDICE

Outil : la négation d'un « il existe » est un « pour tout ». **Point délicat :** compare $x^2 + 4$ à 4.

3.

$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x = 2y.$

INDICE

Outil : remplace chaque quantificateur par l'autre, sans changer leur ordre, puis nie l'égalité. **Début :** pour un x donné, cherche y en fonction de x.

Exercice 7

Vrai ou faux ? Des contre-exemples

Montrer que chacune des propositions suivantes est fausse.

1.

$(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^2} = x$.

INDICE

Outil : un contre-exemple. **Début :** une racine carrée n'est jamais négative ; essaie un réel négatif.

2.

$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : (a+b)^2 = a^2 + b^2$.

INDICE

Outil : un contre-exemple, formé ici de deux nombres. **Début :** teste des valeurs simples pour a et b, par exemple des nombres égaux.

3.

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 3^n > n^3$.

INDICE

Outil : teste les premières valeurs de n. **Point délicat :** une inégalité stricte est fausse en cas d'égalité.

Exercice 8

Une contraposée courte

Soit n un entier naturel. On veut démontrer : « si $7n + 4$ est impair, alors n est impair ».

1.

Écrire la contraposée de cette implication.

INDICE

Outil : la contraposée de $A \Rightarrow B$ est $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. **Point délicat :** le contraire de « impair » est « pair ».

2.

Démontrer cette contraposée, puis conclure.

INDICE

Outil : l'écriture d'un entier pair. **Début :** « Raisonnons par contraposée. Supposons n pair : $n = 2k$. » **Point délicat :** écris $7n + 4$ sous la forme $2m$, avec m entier.

Exercice 9

Initialisation et hérédité pas à pas

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la proposition : « 3 divise $4^n - 1$ ».

1.

Vérifier que $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.

INDICE

Outil : un calcul. **Point délicat :** $4^0 = 1$, et 0 est multiple de 3.

2.

Vérifier que, pour tout entier naturel n, $4^{n+1} - 1 = 4(4^n - 1) + 3$.

INDICE

Outil : développe le membre de droite. **Début :** $4 \times 4^n = 4^{n+1}$.

3.

Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ soit vraie. Montrer que $P(n+1)$ est vraie. Conclure.

INDICE

Outil : l'hypothèse de récurrence et la question 2. **Début :** écris $4^n - 1 = 3k$ avec k entier. **Point délicat :** n'oublie pas de citer l'initialisation dans la conclusion.

Exercice 10

Une somme de puissances de deux

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la proposition : « $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ ». Le membre de gauche est la somme des puissances de 2, de 2^0 jusqu'à 2^n.

1.

Vérifier que $P(0)$ et $P(3)$ sont vraies.

INDICE

Outil : un calcul des deux membres. **Point délicat :** pour $n = 0$, la somme se réduit à $2^0 = 1$.

2.

Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ soit vraie. Montrer que $P(n+1)$ est vraie.

INDICE

Outil : l'hypothèse de récurrence. **Début :** la somme jusqu'à 2^{n+1} est la somme jusqu'à 2^n, plus 2^{n+1}. **Point délicat :** $2^{n+1} + 2^{n+1} = 2 \times 2^{n+1}$.

3.

Conclure, puis calculer $1 + 2 + 4 + \cdots + 1024$.

INDICE

Outil : le principe de récurrence. **Début :** écris 1024 comme une puissance de 2.