BURHAN

Notions de logique : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/notions-de-logique/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Notions de logique	Application	10

Exercice 1

Valeurs de vérité de propositions composées

On considère les trois propositions suivantes :

- P : « 51 est un nombre premier » ;
- Q : « $2^5 = 32$ » ;
- R : « $\sqrt{81} = 8$ ».

1.

Déterminer la valeur de vérité de P, de Q et de R.

INDICE

Outil : un calcul pour chacune. **Début :** cherche un diviseur de 51 autre que 1 et 51. **Point délicat :** additionne les chiffres de 51.

CORRIGÉ

Valeur de P. On a $51 = 3 \times 17$: l'entier 51 admet le diviseur 3, différent de 1 et de 51. Il n'est donc pas premier, et P est fausse.

Valeur de Q. On a $2^4 = 16$, donc $2^5 = 2 \times 16 = 32$: Q est vraie.

Valeur de R. Le réel 9 est positif et $9^2 = 81$, donc $\sqrt{81} = 9$. Comme $9 \neq 8$, R est fausse.

Conclusion. Q est vraie ; P et R sont fausses.

2.

Déterminer la valeur de vérité de « P ou Q », de « Q et R » et de $\overline{R}$.

INDICE

Outil : les définitions de la disjonction, de la conjonction et de la négation. **Point délicat :** le « ou » est inclusif.

CORRIGÉ

On s'appuie sur les valeurs trouvées à la question 1.

- « P ou Q » : le « ou » est inclusif, il suffit qu'une des deux propositions soit vraie. Ici Q est vraie, donc « P ou Q » est vraie.
- « Q et R » : une conjonction demande que les deux propositions soient vraies. Or R est fausse, donc « Q et R » est fausse.
- $\overline{R}$ prend la valeur contraire de celle de R. Comme R est fausse, $\overline{R}$ est vraie.

Conclusion. « P ou Q » et $\overline{R}$ sont vraies ; « Q et R » est fausse.

3.

Déterminer la valeur de vérité de $P \Rightarrow R$, de $Q \Rightarrow R$ et de $Q \Leftrightarrow \overline{P}$.

INDICE

Outil : une implication n'est fausse que dans un seul cas. **Début :** pour chaque implication, regarde d'abord la valeur de l'hypothèse.

CORRIGÉ

Une implication $A \Rightarrow B$ n'est fausse que lorsque A est vraie et B est fausse. Une équivalence est vraie lorsque ses deux membres ont la même valeur.

- $P \Rightarrow R$: l'hypothèse P est fausse, donc l'implication est vraie.
- $Q \Rightarrow R$: l'hypothèse Q est vraie et la conclusion R est fausse, donc l'implication est fausse.
- $Q \Leftrightarrow \overline{P}$: comme P est fausse, $\overline{P}$ est vraie. Les deux membres Q et $\overline{P}$ sont vrais, donc l'équivalence est vraie.

Conclusion. $P \Rightarrow R$ et $Q \Leftrightarrow \overline{P}$ sont vraies ; $Q \Rightarrow R$ est fausse.

Exercice 2

La distributivité vérifiée par une table

Soit P, Q et R trois propositions. On se demande si l'équivalence suivante est une loi logique :

$$\big(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)\big) \\ \Leftrightarrow \big((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)\big)$$

1.

Combien de lignes compte la table de vérité de cette équivalence ? Dresser cette table, avec les colonnes Q ou R, P et $(Q$ ou $R)$, P et Q, P et R et $(P$ et $Q)$ ou $(P$ et $R)$.

INDICE

Outil : les tables de « et » et de « ou ». **Début :** chacune des trois propositions prend deux valeurs. **Point délicat :** n'oublie aucune combinaison ; écris d'abord les quatre lignes où P est vraie. Pour Q et R, écris les quatre couples V V, V F, F V, F F, d'abord avec P vraie, puis avec P fausse.

CORRIGÉ

Nombre de lignes. Chacune des trois propositions P, Q et R prend deux valeurs, V ou F. La table compte donc $2 \times 2 \times 2 = 8$ lignes.

Table. On remplit les colonnes de gauche à droite, avec les tables de « et » et de « ou ».

Cas	P	Q	R	Q ou R	P et $(Q$ ou $R)$	P et Q	P et R	$(P$ et $Q)$ ou $(P$ et $R)$
1	V	V	V	V	V	V	V	V
2	V	V	F	V	V	V	F	V
3	V	F	V	V	V	F	V	V
4	V	F	F	F	F	F	F	F
5	F	V	V	V	F	F	F	F
6	F	V	F	V	F	F	F	F
7	F	F	V	V	F	F	F	F
8	F	F	F	F	F	F	F	F

Conclusion. La table compte 8 lignes.

2.

Conclure.

INDICE

Outil : la définition d'une loi logique. **Début :** compare la colonne de $P \text{ et } (Q \text{ ou } R)$ à la dernière.

CORRIGÉ

Comparaison. On compare, ligne par ligne, la colonne de $P \text{ et } (Q \text{ ou } R)$ à la dernière colonne : elles coïncident sur les huit lignes.

Conclusion. Les deux membres ont la même valeur de vérité pour toutes les valeurs de P, Q et R. L'équivalence est donc toujours vraie : c'est une loi logique.

3.

Sans dresser de table, montrer que $\big(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)\big) \Leftrightarrow \big((P \text{ ou } Q) \text{ et } R\big)$ n'est pas une loi logique.

INDICE

Outil : une seule ligne où les deux membres diffèrent suffit. **Début :** essaie P vraie et R fausse.

CORRIGÉ

Pour qu'une équivalence ne soit pas une loi logique, il suffit d'un choix de valeurs pour lequel ses deux membres diffèrent. Prenons P vraie, Q vraie et R fausse.

- **Membre de gauche.** « Q et R » est fausse, mais P est vraie : $P \text{ ou } (Q \text{ et } R)$ est vraie.
- **Membre de droite.** « P ou Q » est vraie, mais R est fausse : $(P \text{ ou } Q) \text{ et } R$ est fausse.

Conclusion. Pour ces valeurs, les deux membres n'ont pas la même valeur, et l'équivalence est fausse. Ce n'est donc pas une loi logique.

Exercice 3

Écrire des négations

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel et x un réel.

1.

Écrire la négation de « n est impair et $n > 10$ ».

INDICE

Outil : les lois de Morgan. **Début :** nie chacun des deux morceaux. **Point délicat :** le contraire de $n > 10$ n'est pas $n < 10$.

CORRIGÉ

Loi utilisée. D'après les lois de Morgan, la négation de « A et B » est « $\overline{A}$ ou $\overline{B}$ ».

Négation de chaque partie. Le contraire de « n est impair » est « n est pair ». Le contraire de $n > 10$ est $n \leq 10$.

Conclusion. La négation de « n est impair et $n > 10$ » est : « n est pair ou $n \leq 10$ ».

2.

Écrire la négation de « $x \leq -1$ ou $x \geq 3$ ».

INDICE

Outil : les lois de Morgan, pour un « ou ». **Point délicat :** l'inégalité large devient stricte.

CORRIGÉ

Loi utilisée. D'après les lois de Morgan, la négation de « A ou B » est « $\overline{A}$ et $\overline{B}$ ».

Négation de chaque partie. Le contraire de $x \leq -1$ est $x > -1$, et celui de $x \geq 3$ est $x < 3$.

Conclusion. La négation de « $x \leq -1$ ou $x \geq 3$ » est « $x > -1$ et $x < 3$ », c'est-à-dire $-1 < x < 3$.

3.

Écrire la négation de « si n est multiple de 9, alors n est multiple de 3 ». Laquelle des deux propositions est vraie, quel que soit n ?

INDICE

Outil : la négation d'une implication. **Début :** la négation de $A \Rightarrow B$ est « A et $\overline{B}$ ». **Point délicat :** écris un multiple de 9 sous la forme $9k$.

CORRIGÉ

Négation. La négation de l'implication $A \Rightarrow B$ est « A et $\overline{B}$ ». Ici, elle s'écrit :

« n est multiple de 9 et n n'est pas multiple de 3 ».

L'implication est vraie. Supposons n multiple de 9 : il existe un entier k tel que $n = 9k$. Alors $n = 3 \times (3k)$, avec $3k$ entier, donc n est multiple de 3.

Conclusion. L'implication « si n est multiple de 9, alors n est multiple de 3 » est vraie quel que soit n ; sa négation est donc toujours fausse.

Exercice 4

Réciproque, contraposée et conditions

Pour un entier naturel n, on considère l'implication (I) : « si n est multiple de 15, alors n est multiple de 3 ».

1.

Justifier que (I) est vraie.

INDICE

Outil : la définition d'un multiple. **Début :** suppose $n = 15k$ avec k entier.

CORRIGÉ

Supposons n multiple de 15 : il existe un entier k tel que $n = 15k$.

Alors $n = 3 \times (5k)$, et $5k$ est un entier. Donc n est multiple de 3.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, si n est multiple de 15, alors n est multiple de 3 : l'implication (I) est vraie.

2.

Écrire la réciproque de (I). Est-elle vraie ?

INDICE

Outil : la réciproque échange l'hypothèse et la conclusion. **Point délicat :** pour la réfuter, cherche un multiple de 3 inférieur à 15 et non nul.

CORRIGÉ

Réciproque. On échange l'hypothèse et la conclusion de (I) : « si n est multiple de 3, alors n est multiple de 15 ».

Valeur de vérité. Prenons $n = 6$. D'une part, $6 = 3 \times 2$ est multiple de 3. D'autre part, 6 n'est pas multiple de 15, car $0 < 6 < 15$: les multiples de 15 sont 0, 15, 30, …

Conclusion. L'entier 6 est un contre-exemple : la réciproque de (I) est fausse.

3.

Écrire la contraposée de (I) et donner sa valeur de vérité.

INDICE

Outil : la contraposée de $A \Rightarrow B$ est $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. **Point délicat :** n'échange pas seulement : nie aussi.

CORRIGÉ

Contraposée. On nie l'hypothèse et la conclusion de (I), puis on les échange : « si n n'est pas multiple de 3, alors n n'est pas multiple de 15 ».

Valeur de vérité. Une implication et sa contraposée sont toujours vraies ensemble ou fausses ensemble. Comme (I) est vraie d'après la question 1, sa contraposée est vraie.

Conclusion. La contraposée de (I) est vraie.

4.

Compléter par « nécessaire » ou « suffisante » :

- être multiple de 3 est une condition … pour être multiple de 15 ;
- être multiple de 15 est une condition … pour être multiple de 3.

INDICE

Outil : lorsque $A \Rightarrow B$ est vraie, B est nécessaire pour A et A est suffisante pour B. **Début :** repère A et B dans (I).

CORRIGÉ

L'implication (I) est vraie, avec pour hypothèse A : « n est multiple de 15 » et pour conclusion B : « n est multiple de 3 ». Pour une implication vraie, la conclusion est une condition nécessaire pour l'hypothèse, et l'hypothèse une condition suffisante pour la conclusion.

Conclusion.

- Être multiple de 3 est une condition **nécessaire** pour être multiple de 15.
- Être multiple de 15 est une condition **suffisante** pour être multiple de 3.

Exercice 5

Traduire avec des quantificateurs

1.

Écrire avec des quantificateurs : « tout réel strictement négatif a un cube strictement négatif ». Cette proposition est-elle vraie ?

INDICE

Outil : « tout » se traduit par $\forall$. **Début :** la phrase contient une condition : écris une implication. **Point délicat :** écris $x^3 = x \times x^2$.

CORRIGÉ

Écriture. La phrase contient une condition, « être strictement négatif » : on l'écrit à l'aide d'une implication.

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : (x < 0 \Rightarrow x^3 < 0)$$

Valeur de vérité. Soit x un réel tel que $x < 0$. Alors $x \neq 0$, donc $x^2 > 0$. Le cube $x^3 = x \times x^2$ est le produit d'un réel strictement négatif par un réel strictement positif : d'après la règle des signes, $x^3 < 0$.

Conclusion. La proposition $(\forall x \in \mathbb{R}) : (x < 0 \Rightarrow x^3 < 0)$ est vraie.

2.

Écrire avec des quantificateurs : « il existe un entier naturel dont le carré vaut 50 ». Cette proposition est-elle vraie ?

INDICE

Outil : « il existe » se traduit par $\exists$. **Début :** encadre 50 entre deux carrés d'entiers consécutifs.

CORRIGÉ

Écriture.

$$(\exists n \in \mathbb{N}) : n^2 = 50$$

Valeur de vérité. Soit n un entier naturel. On distingue $n \leq 7$ et $n \geq 8$: ces deux cas couvrent tous les entiers naturels.

- **Cas $n \leq 7$.** Alors $0 \leq n \leq 7$ et, les deux membres étant positifs, $n^2 \leq 7^2 = 49$.
- **Cas $n \geq 8$.** De même, $n^2 \geq 8^2 = 64$.

Dans les deux cas, $n^2 \neq 50$.

Conclusion. Aucun entier naturel n'a pour carré 50 : la proposition est fausse.

3.

Écrire avec des quantificateurs : « l'équation $5x + 2 = 0$ a une seule solution réelle ». Cette proposition est-elle vraie ?

INDICE

Outil : « une seule » se traduit par $\exists!$. **Début :** résous l'équation par équivalences.

CORRIGÉ

Écriture.

$$(\exists! x \in \mathbb{R}) : 5x + 2 = 0$$

Valeur de vérité. Soit x un réel. On résout par équivalences successives :

$$\begin{aligned} 5x + 2 = 0 &\Leftrightarrow 5x = -2 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

L'équation a donc une solution, $-\frac{2}{5}$, et une seule.

Conclusion. La proposition $(\exists! x \in \mathbb{R}) : 5x + 2 = 0$ est vraie.

Exercice 6

Nier des propositions quantifiées

Pour chacune des propositions suivantes, écrire sa négation, puis indiquer laquelle, de la proposition ou de sa négation, est vraie.

1.

$(\forall n \in \mathbb{N}) : n^2 + 1 \text{ est impair.}$

INDICE

Outil : la négation d'un « pour tout » est un « il existe ». **Début :** teste les premières valeurs de n.

CORRIGÉ

Négation. La négation d'un « pour tout » est un « il existe », suivi de la propriété niée :

$$(\exists n \in \mathbb{N}) : n^2 + 1 \text{ est pair}$$

Laquelle est vraie. Pour $n = 1$, on a $n^2 + 1 = 2$, qui est pair. La négation est donc vraie.

Conclusion. La négation est vraie ; la proposition de départ est fausse.

2.

$(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + 4 = 0.$

INDICE

Outil : la négation d'un « il existe » est un « pour tout ». **Point délicat :** compare $x^2 + 4$ à 4.

CORRIGÉ

Négation. La négation d'un « il existe » est un « pour tout », suivi de la propriété niée :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 4 \neq 0$$

Laquelle est vraie. Soit x un réel. Un carré est positif ou nul, donc $x^2 + 4 \geq 4 > 0$, et ainsi $x^2 + 4 \neq 0$. La négation est vraie.

Conclusion. La négation est vraie ; la proposition de départ est fausse.

3.

$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x = 2y.$

INDICE

Outil : remplace chaque quantificateur par l'autre, sans changer leur ordre, puis nie l'égalité. **Début :** pour un x donné, cherche y en fonction de x.

CORRIGÉ

Négation. On remplace chaque quantificateur par l'autre, sans changer leur ordre, puis on nie l'égalité :

$$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) :$$
$$x \neq 2y$$

Laquelle est vraie. Soit x un réel. Posons $y = \dfrac{x}{2}$: c'est un réel, et $2y = x$. Pour chaque réel x, un tel y existe, donc la proposition de départ est vraie.

Conclusion. La proposition de départ est vraie ; sa négation est fausse.

Exercice 7

Vrai ou faux ? Des contre-exemples

Montrer que chacune des propositions suivantes est fausse.

1.

$(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^2} = x$.

INDICE

Outil : un contre-exemple. **Début :** une racine carrée n'est jamais négative ; essaie un réel négatif.

CORRIGÉ

Il suffit de trouver un réel x pour lequel l'égalité est fausse. Prenons $x = -1$:

$$\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Or $1 \neq -1$: l'égalité $\sqrt{x^2} = x$ est fausse pour $x = -1$.

Conclusion. Le réel -1 est un contre-exemple : la proposition est fausse.

Remarque. Pour tout réel x, on a en fait $\sqrt{x^2} = |x|$.

2.

$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : (a+b)^2 = a^2 + b^2$.

INDICE

Outil : un contre-exemple, formé ici de deux nombres. **Début :** teste des valeurs simples pour a et b, par exemple des nombres égaux.

CORRIGÉ

Prenons $a = 1$ et $b = 1$. On calcule les deux membres :

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= 2^2 = 4, \\ a^2 + b^2 &= 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Comme $4 \neq 2$, l'égalité est fausse pour ce couple.

Conclusion. Le couple formé de $a = 1$ et $b = 1$ est un contre-exemple : la proposition est fausse.

Remarque. D'après l'identité remarquable, pour tous réels a et b, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

3.

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 3^n > n^3$.

INDICE

Outil : teste les premières valeurs de n. **Point délicat :** une inégalité stricte est fausse en cas d'égalité.

CORRIGÉ

On teste les premières valeurs de n.

- Pour $n = 1$: $3^1 = 3$ et $1^3 = 1$, et $3 > 1$.
- Pour $n = 2$: $3^2 = 9$ et $2^3 = 8$, et $9 > 8$.
- Pour $n = 3$: $3^n = 3^3 = 27$ et $n^3 = 3^3 = 27$. Les deux membres sont égaux, donc l'inégalité stricte $27 > 27$ est fausse.

Conclusion. L'entier 3 est un contre-exemple : la proposition est fausse.

Exercice 8

Une contraposée courte

Soit n un entier naturel. On veut démontrer : « si $7n+4$ est impair, alors n est impair ».

1.

Écrire la contraposée de cette implication.

INDICE

Outil : la contraposée de $A \Rightarrow B$ est $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. **Point délicat :** le contraire de « impair » est « pair ».

CORRIGÉ

La contraposée de $A \Rightarrow B$ est $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. Ici, A est « $7n+4$ est impair » et B est « n est impair » ; leurs contraires sont « $7n+4$ est pair » et « n est pair ».

Conclusion. La contraposée est : « si n est pair, alors $7n+4$ est pair ».

2.

Démontrer cette contraposée, puis conclure.

INDICE

Outil : l'écriture d'un entier pair. **Début :** « Raisonnons par contraposée. Supposons n pair : $n = 2k$. » **Point délicat :** écris $7n+4$ sous la forme $2m$, avec m entier.

CORRIGÉ

Raisonnons par contraposée. Supposons n pair : il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$. Alors :

$$\begin{aligned} 7n+4 &= 14k+4 \\ &= 2(7k+2). \end{aligned}$$

Comme $7k+2$ est un entier, $7n+4$ est pair. La contraposée est démontrée.

Conclusion. Une implication est vraie dès que sa contraposée l'est. Donc, pour tout entier naturel n : si $7n+4$ est impair, alors n est impair.

Exercice 9

Initialisation et hérédité pas à pas

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la proposition : « 3 divise $4^n - 1$ ».

1.

Vérifier que $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.

INDICE

Outil : un calcul. **Point délicat :** $4^0 = 1$, et 0 est multiple de 3.

CORRIGÉ

- $4^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 3 \times 0$, donc 3 divise $4^0 - 1$.
- $4^1 - 1 = 3 = 3 \times 1$, donc 3 divise $4^1 - 1$.
- $4^2 - 1 = 15 = 3 \times 5$, donc 3 divise $4^2 - 1$.

Conclusion. $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.

2.

Vérifier que, pour tout entier naturel n, $4^{n+1} - 1 = 4(4^n - 1) + 3$.

INDICE

Outil : développe le membre de droite. **Début :** $4 \times 4^n = 4^{n+1}$.

CORRIGÉ

Soit n un entier naturel. On développe le membre de droite, avec $4 \times 4^n = 4^{n+1}$:

$$\begin{aligned} &4(4^n - 1) + 3 \\ &= 4^{n+1} - 4 + 3 \\ &= 4^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $4^{n+1} - 1 = 4(4^n - 1) + 3$.

3.

Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ soit vraie. Montrer que $P(n+1)$ est vraie. Conclure.

INDICE

Outil : l'hypothèse de récurrence et la question 2. **Début :** écris $4^n - 1 = 3k$ avec k entier. **Point délicat :** n'oublie pas de citer l'initialisation dans la conclusion.

CORRIGÉ

Initialisation. D'après la question 1, $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ soit vraie (hypothèse de récurrence) : il existe un entier k tel que $4^n - 1 = 3k$. D'après la question 2 :

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 &= 4 \times 3k + 3 \\ &= 3(4k + 1). \end{aligned}$$

Comme $4k + 1$ est un entier, 3 divise $4^{n+1} - 1$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, 3 divise $4^n - 1$ pour tout entier naturel n.

Exercice 10

Une somme de puissances de deux

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la proposition : « $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ ». Le membre de gauche est la somme des puissances de 2, de 2^0 jusqu'à 2^n.

1.

Vérifier que $P(0)$ et $P(3)$ sont vraies.

INDICE

Outil : un calcul des deux membres. **Point délicat :** pour $n = 0$, la somme se réduit à $2^0 = 1$.

CORRIGÉ

- **Pour $n = 0$.** La somme se réduit à $2^0 = 1$, et $2^1 - 1 = 1$: $P(0)$ est vraie.
- **Pour $n = 3$.** $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ et $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$: $P(3)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ et $P(3)$ sont vraies.

2.

Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ soit vraie. Montrer que $P(n+1)$ est vraie.

INDICE

Outil : l'hypothèse de récurrence. **Début :** la somme jusqu'à 2^{n+1} est la somme jusqu'à 2^n, plus 2^{n+1}. **Point délicat :** $2^{n+1} + 2^{n+1} = 2 \times 2^{n+1}$.

CORRIGÉ

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ soit vraie (hypothèse de récurrence) :

$$1 + 2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

La somme jusqu'à 2^{n+1} est la somme jusqu'à 2^n, augmentée de 2^{n+1}. Donc :

$$\begin{aligned} &1 + 2 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} \\ &= \left(2^{n+1} - 1\right) + 2^{n+1} \\ &= 2 \times 2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1. \end{aligned}$$

Conclusion. On obtient $1 + 2 + \cdots + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$: c'est exactement $P(n+1)$.

3.

Conclure, puis calculer $1 + 2 + 4 + \cdots + 1024$.

INDICE

Outil : le principe de récurrence. **Début :** écris 1024 comme une puissance de 2.

CORRIGÉ

Initialisation. D'après la question 1, $P(0)$ est vraie.

Hérédité. D'après la question 2, pour tout entier naturel n, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Application. On a $1024 = 2^{10}$. Avec $n = 10$:

$$\begin{aligned} &1 + 2 + 4 + \cdots + 1024 \\ &= 2^{11} - 1 = 2047. \end{aligned}$$