BURHAN

Notions de logique

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/notions-de-logique/cours

Chapitre	Semestre
Notions de logique	Semestre 1

Vrai pour quelques nombres, vrai pour tous ?

Calcule $n^2 + n + 41$ pour les premiers entiers naturels.

Pour $n = 0$, tu trouves 41. Pour $n = 1$, tu trouves 43 ; pour $n = 2$, 47 ; pour $n = 3$, 53. Ces quatre nombres sont premiers.

Pousse jusqu'à $n = 10$: tu obtiens 151, encore un nombre premier.

Une idée se présente : ce nombre serait-il premier pour tout entier naturel n ?

Devine : Une prédiction

Le nombre $n^2 + n + 41$ est-il premier pour **tout** entier naturel n ?

A. Oui : les essais de 0 à 10 le prouvent.

Faux.

Onze essais réussis ne disent rien des entiers suivants.

B. On ne peut pas le savoir sans essayer tous les entiers.

Faux.

Un seul entier qui échoue suffit pour répondre non.

C. Non : un entier au moins le met en défaut.

Juste.

Juste : pour $n = 40$, le nombre obtenu n'est pas premier.

D. Oui, car 41 est un nombre premier.

Faux.

Que 41 soit premier ne dit rien de $n^2 + n + 41$ pour les autres valeurs de n.

Correction

Pour $n = 40$, on factorise par 41 :

$$\begin{aligned} 40^2 + 40 + 41 &= 40 \times 41 + 41 \\ &= 41 \times 41. \end{aligned}$$

Ce nombre vaut 1681 : il n'est pas premier.

Pourtant, $n^2 + n + 41$ est premier pour tous les entiers de 0 à 39. Beaucoup d'essais ne prouvent pas une affirmation sur tous les entiers ; un seul contre-exemple suffit pour la réfuter.

Dans ce chapitre, tu apprends le langage de la logique : propositions, « et », « ou », implications, « pour tout » et « il existe ».

Tu apprends surtout à **rédiger une preuve** : directement, par contraposée, par disjonction des cas, par l'absurde, par récurrence. Chaque raisonnement est montré sur un exemple rédigé en entier.

À la fin, tu sauras dire pourquoi $n^2 + n + 41$ trompe celui qui se contente d'essais.

Propositions, négation, « et », « ou »

Vrai, faux, ou ni l'un ni l'autre

En clair. En mathématiques, une phrase peut être vraie ou fausse. « 7 est un nombre premier » est vraie ; « 15 est un nombre pair » est fausse.

Mais « $2x = 8$ » n'est ni vraie ni fausse tant que x n'est pas connu : elle est vraie pour $x = 4$, fausse pour $x = 1$.

Quant à « Quel bel exercice ! », elle n'affirme rien de mathématique.

Devine : Trier des phrases

Une seule de ces phrases n'est pas une proposition. Laquelle ?

A. $2^{10} > 1000$

Faux.

C'est une proposition vraie : $2^{10} = 1024$.

B. 91 est un nombre premier

Faux.

C'est une proposition fausse : $91 = 7 \times 13$.

C. $\sqrt{49} = 7$

Faux.

C'est une proposition vraie : $7 \geq 0$ et $7^2 = 49$.

D. $3x - 1 = 5$

Juste.

Juste : sa valeur de vérité dépend de x.

Correction

Les trois premières phrases sont vraies ou fausses, sans ambiguïté.

La phrase « $3x - 1 = 5$ » est vraie pour $x = 2$ et fausse pour $x = 0$: ce n'est pas une proposition.

Elle en devient une quand on fixe x, ou quand on la précède de « pour tout » ou de « il existe ».

Proposition et négation

Définition : Proposition ; négation

Une **proposition** est un énoncé mathématique qui est soit vrai, soit faux, et jamais les deux à la fois. On dit que sa **valeur de vérité** est « vrai » (notée V) ou « faux » (notée F).

Soit P une proposition. La **négation** de P est la proposition notée $\overline{P}$, qui se lit « non P » : elle est vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.

Exemple : écrire une négation

- « 91 est un nombre premier » est fausse. Sa négation, « 91 n'est pas un nombre premier », est vraie.
- La négation de « $2^{10} > 1000$ » est « $2^{10} \leq 1000$ », et non « $2^{10} < 1000$ ». Nier une inégalité stricte $a > b$ donne l'inégalité large $a \leq b$.
- Nier deux fois ramène au départ : la négation de « 91 n'est pas premier » est « 91 est premier ».

Les connecteurs « et », « ou »

Deux propositions se combinent avec « et » ou avec « ou ». Au restaurant, « fromage ou dessert » interdit en général de prendre les deux. En mathématiques, au contraire, le « ou » accepte les deux à la fois. C'est le point à surveiller dans la définition suivante.

Définition : Conjonction ; disjonction

Soit P et Q deux propositions.

- La **conjonction** de P et Q est la proposition « P et Q ». Elle est vraie lorsque P et Q sont vraies toutes les deux, et fausse dans les trois autres cas.
- La **disjonction** de P et Q est la proposition « P ou Q ». Elle est vraie lorsque l'une au moins des propositions P et Q est vraie, et fausse seulement lorsque P et Q sont fausses toutes les deux.

Le « ou » mathématique est **inclusif** : « P ou Q » est vraie aussi lorsque P et Q sont vraies en même temps.

Table de vérité. Une table range tous les cas possibles, une ligne par cas. Avec deux propositions, il y a quatre lignes :

P	Q	P et Q	P ou Q
V	V	V	V
V	F	F	V

P	Q	P et Q	P ou Q
F	V	F	V
F	F	F	F

Par exemple, « 6 est pair ou $6 > 5$ » est vraie. Ses deux morceaux sont vrais : c'est la première ligne, celle du « ou » inclusif.

Vérifier avec la table

Vérifie : Lire la table

Soit P : « 13 est un nombre premier » et Q : « 13 est pair ». Laquelle de ces propositions est vraie ?

A. P et Q

Faux.
Q est fausse : la conjonction est fausse.

B. $\overline{P}$

Faux.
P est vraie, donc sa négation est fausse.

C. P ou Q

Juste.
Juste : P est vraie, et cela suffit pour le « ou ».

D. $\overline{P}$ ou Q

Faux.
$\overline{P}$ et Q sont fausses toutes les deux : c'est la dernière ligne de la table.

Correction
P est vraie : 13 n'a pas d'autre diviseur positif que 1 et 13. Q est fausse, car $13 = 2 \times 6 + 1$.

On lit la ligne « V, F » de la table : « P et Q » est fausse, « P ou Q » est vraie.

Enfin $\overline{P}$ est fausse, et Q aussi : « $\overline{P}$ ou Q » est fausse.

À toi : Un carré parfait

Soit P : « 121 est le carré d'un entier » et Q : « 121 est un nombre premier ». Donne la valeur de vérité de P, de Q, de « P et Q », de « P ou Q » et de « $\overline{P}$ ou Q ». Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Cherche un entier dont le carré vaut 121.
Indice 2
Si $121 = k^2$ avec $k > 1$, alors k est un diviseur de 121 autre que 1 et 121.

Indice 3
Point délicat : pour « $\overline{P}$ ou Q », trouve d'abord la valeur de $\overline{P}$, puis lis la table du « ou ».

Réponse
$121 = 11^2$, donc P est vraie. 11 divise 121, donc 121 n'est pas premier : Q est fausse.

D'après la table, « P et Q » est fausse, car Q est fausse. « P ou Q » est vraie, car P est vraie. Enfin $\overline{P}$ est fausse, et Q aussi : « $\overline{P}$ ou Q » est fausse.

Implication, réciproque, équivalence

Une promesse

En clair. Un professeur promet : « Si tu as 20 sur 20, je te donne un livre. » Quand peut-on l'accuser d'avoir menti ?

Il n'a rien promis pour une note plus basse. Avec 15 sur 20, qu'il donne un livre ou non, sa parole tient.

Devine : Une promesse rompue

Dans quel cas la promesse « si tu as 20 sur 20, je te donne un livre » est-elle rompue ?

A. Tu as 15 sur 20 et tu reçois un livre.
Faux.
La promesse ne parle pas de cette note : elle n'est pas rompue.

B. Tu as 20 sur 20 et tu ne reçois rien.
Juste.
Juste : tu as la note exigée, mais pas le livre promis.

C. Tu as 15 sur 20 et tu ne reçois rien.
Faux.
La condition n'est pas remplie : le professeur ne s'était engagé à rien.

D. Tu as 20 sur 20 et tu reçois un livre.
Faux.
C'est le cas où la promesse est tenue.

Correction
La promesse ne parle que du cas « 20 sur 20 ». Elle est rompue seulement si cette note est obtenue et que le livre manque.

Dans les trois autres cas, elle est tenue. L'implication mathématique suit exactement cette règle.

Implication et équivalence

Définition : Implication ; équivalence ; loi logique

Soit P et Q deux propositions.

- L'**implication** $P \Rightarrow Q$ se lit « P implique Q » ou « si P, alors Q ». Elle est fausse lorsque P est vraie et Q fausse, et vraie dans les trois autres cas. L'implication $Q \Rightarrow P$ est la **réciproque** de $P \Rightarrow Q$.
- Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que Q est une **condition nécessaire** pour que P soit vraie, et que P est une **condition suffisante** pour que Q soit vraie.
- L'**équivalence** $P \Leftrightarrow Q$ se lit « P équivaut à Q » ou « P si et seulement si Q ». Elle est vraie lorsque P et Q ont la même valeur de vérité, et fausse sinon.

Une proposition construite à partir de propositions P, Q, … et qui est vraie quelles que soient leurs valeurs de vérité est une **loi logique**.

Table de vérité. L'implication n'est fausse que sur une ligne. L'équivalence est vraie quand les deux valeurs sont égales.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

Retiens les deux dernières lignes : quand P est fausse, $P \Rightarrow Q$ est vraie, quelle que soit Q.

Condition nécessaire, condition suffisante

Exemple : multiple de 6, donc pair

Soit n un entier. L'implication « si n est multiple de 6, alors n est pair » est vraie : si $n = 6k$ avec k entier, alors $n = 2 \times 3k$ est pair.

- Pour qu'un entier soit pair, il **suffit** qu'il soit multiple de 6 : c'est une condition suffisante.
- Pour qu'un entier soit multiple de 6, il **faut** qu'il soit pair : c'est une condition nécessaire.

Sa réciproque, « si n est pair, alors n est multiple de 6 », est fausse : 4 est pair, mais pas multiple de 6. Les deux propositions ne sont donc pas équivalentes.

Vérifie : Une condition nécessaire

Soit n un entier. Laquelle de ces conditions est **nécessaire** pour que n soit multiple de 6 ?

A. n est multiple de 12.

Faux.
C'est une condition suffisante, pas nécessaire : 6 est multiple de 6 sans être multiple de 12.

B. n est multiple de 4.
Faux.
6 est multiple de 6 mais pas de 4.

C. n est égal à 6.
Faux.
Suffisant, mais pas nécessaire : 12 est aussi multiple de 6.

D. n est un entier pair.
Juste.
Juste : tout multiple de 6 est pair.

Correction
Une condition nécessaire est une conséquence. L'implication « si n est multiple de 6, alors n est pair » est vraie : « n est pair » est donc nécessaire.

Les autres conditions ne sont pas des conséquences : 6 est multiple de 6 sans être multiple de 12 ni de 4, et 12 est multiple de 6 sans être égal à 6.

À toi : Une implication sur les réels

Soit x un réel. On considère l'implication « si $x > 3$, alors $x > 1$ ». Elle est vraie. Écris sa réciproque et donne sa valeur de vérité. Complète enfin : « $x > 3$ est une condition … pour que $x > 1$ ». Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La réciproque échange l'hypothèse et la conclusion.
Indice 2
Pour la réfuter, cherche un réel qui est supérieur à 1 sans être supérieur à 3.
Indice 3
Point délicat : une condition suffisante est l'hypothèse d'une implication vraie, pas sa conclusion.

Réponse
L'implication est vraie : si $x > 3$, alors $x > 3 > 1$.

La réciproque est « si $x > 1$, alors $x > 3$ ». Elle est fausse : pour $x = 2$, on a $x > 1$, mais pas $x > 3$.

Ainsi, « $x > 3$ » est une condition **suffisante** pour que $x > 1$, mais pas nécessaire : $x = 2$ vérifie $x > 1$ sans vérifier $x > 3$.

Nier « et », nier « ou »

Le contraire d'un « et »

En clair. Quel est le contraire de « il pleut et il fait froid » ? Il suffit qu'une des deux choses manque : « il ne pleut pas ou il ne fait pas froid ». En niant, le « et » est devenu un « ou ».

De même, le contraire de « je prends le bus ou le tram » est « je ne prends pas le bus et je ne prends pas le tram ».

Devine : Nier deux conditions

Soit n un entier. Quelle est la négation de « n est pair et $n > 10$ » ?

A. n est impair et $n \leq 10$.
Faux.
Pour $n = 11$, cette phrase est fausse, et « n est pair et $n > 10$ » aussi : elles ne sont pas contraires.

B. n est impair ou $n \leq 10$.
Juste.
Juste : il suffit qu'une des deux conditions manque.

C. n est impair ou $n < 10$.
Faux.
Pour $n = 10$, cette phrase est fausse, et la phrase de départ aussi.

D. n est pair et $n \leq 10$.
Faux.
Pour $n = 11$, les deux phrases sont fausses : ce n'est pas la négation.

Correction
Pour que « n est pair et $n > 10$ » soit fausse, il suffit qu'une des deux conditions manque. Sa négation est donc « n est impair ou $n \leq 10$ ».

Attention au contraire de « $n > 10$ » : c'est « $n \leq 10$ », et non « $n < 10$ ».

Les lois de Morgan

Cette règle n'est pas propre à la météo. **Pourquoi est-ce vrai ?** Deux propositions sont équivalentes lorsqu'elles ont la même valeur de vérité dans tous les cas. La preuve compare donc les deux membres, cas par cas, à l'aide des définitions.

Propriété : Double négation ; lois de Morgan

Soit P et Q deux propositions. Les trois propositions suivantes sont des lois logiques :

- $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$;
- $\overline{(P \text{ et } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$;
- $\overline{(P \text{ ou } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$.

Démonstration

Étape 1. D'après la définition de l'équivalence, il suffit de comparer les valeurs de vérité des deux membres.

Étape 2. La négation change la valeur de vérité (définition de la négation) ; appliquée deux fois, elle la rend : $\overline{\overline{P}}$ a la valeur de P.

Étape 3. $\overline{(P \text{ et } Q)}$ est vraie si et seulement si « P et Q » est fausse (définition de la négation), c'est-à-dire si l'une au moins des propositions P, Q est fausse (définition de la conjonction), ou encore si l'une au moins des propositions $\overline{P}$, $\overline{Q}$ est vraie : c'est le cas où « $\overline{P}$ ou $\overline{Q}$ » est vraie (définition de la disjonction).

Étape 4. De même, $\overline{(P \text{ ou } Q)}$ est vraie si et seulement si P et Q sont toutes deux fausses, donc si $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ sont toutes deux vraies. D'où les trois lois logiques.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour établir une loi logique, on compare les valeurs de vérité des deux membres dans **chaque** cas possible. Ici, $\overline{(P \text{ et } Q)}$ est vraie exactement quand l'une au moins des propositions P, Q est fausse. C'est aussi exactement le cas où « $\overline{P}$ ou $\overline{Q}$ » est vraie.

Vérifie : Relire la preuve

D'après la preuve, dans quels cas la proposition $\overline{(P \text{ et } Q)}$ est-elle vraie ?

A. Quand l'une au moins des propositions P, Q est fausse.

Juste.

Juste : la conjonction est alors fausse, et sa négation vraie.

B. Seulement quand P et Q sont fausses toutes les deux.

Faux.

Si P est vraie et Q fausse, « P et Q » est déjà fausse : sa négation est vraie.

C. Seulement quand P est vraie et que Q est fausse.

Faux.

C'est un des cas, mais pas le seul : P fausse convient aussi.

D. Quand P et Q sont vraies toutes les deux.

Faux.

Dans ce cas, « P et Q » est vraie : sa négation est fausse.

Correction

« P et Q » n'est vraie que si P et Q sont vraies. Sa négation est donc vraie dès que l'une au moins est fausse, c'est-à-dire sur trois lignes de la table. Ce sont exactement les lignes où « $\overline{P}$ ou $\overline{Q}$ » est vraie.

Exemple : nier un encadrement

Soit x un réel. L'écriture $2 < x < 5$ signifie « $x > 2$ et $x < 5$ ». D'après les lois de Morgan, sa négation est :

$$x \leq 2 \text{ ou } x \geq 5.$$

Contrôle avec $x = 7$: « $2 < 7 < 5$ » est fausse, et « $7 \leq 2$ ou $7 \geq 5$ » est vraie.

Avec $x = 3$: « $2 < 3 < 5$ » est vraie, et « $3 \leq 2$ ou $3 \geq 5$ » est fausse.

Un piège, puis à toi

Attention : nier « et », nier « ou »

✗ « La négation de $2 < x < 5$ est : $x \leq 2$ et $x \geq 5$. »

✓ Aucun réel n'est à la fois inférieur ou égal à 2 et supérieur ou égal à 5 : cette phrase est toujours fausse. En niant, « et » devient « ou ». La négation correcte est « $x \leq 2$ ou $x \geq 5$ ».

À toi : Deux négations

Soit n un entier naturel et x un réel. Écris la négation de chacune des propositions « n est pair ou $n > 100$ » et « $x \leq -1$ ou $x \geq 1$ ». Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Repère le connecteur de chaque proposition : il change quand on nie.
Indice 2
Nie chaque morceau séparément : quel est le contraire de « pair » ? celui de « $n > 100$ » ?
Indice 3
Point délicat : la seconde négation s'écrit aussi comme un encadrement ; contrôle-la avec $x = 0$.

Réponse
D'après les lois de Morgan, « ou » devient « et ».

- La négation de « n est pair ou $n > 100$ » est « n est impair et $n \leq 100$ ».
- La négation de « $x \leq -1$ ou $x \geq 1$ » est « $x > -1$ et $x < 1$ », c'est-à-dire $-1 < x < 1$.

Contrôle avec $x = 0$: « $0 \leq -1$ ou $0 \geq 1$ » est fausse, et $-1 < 0 < 1$ est vraie.

Contraposée, négation d'une implication

Dire la même chose autrement

Devine : La même information

On sait que : « si un entier est multiple de 6, alors il est pair ». Laquelle de ces phrases dit **la même chose** ?

A. Si un entier est pair, alors il est multiple de 6.

Faux.
C'est la réciproque, et elle est fausse : 4 est pair sans être multiple de 6.

B. Si un entier est impair, alors il n'est pas multiple de 6.

Juste.
Juste : un entier impair ne peut pas être multiple de 6.

C. Si un entier n'est pas multiple de 6, alors il est impair.

Faux.
4 n'est pas multiple de 6, et pourtant il est pair.

D. Si un entier est multiple de 6, alors il est impair.

Faux.
6 est multiple de 6 et il est pair.

Correction
Un entier impair ne peut pas être multiple de 6 : sinon, il serait pair. La phrase « si un entier est impair, alors il n'est pas multiple de 6 » dit donc la même chose.

Les autres échouent : 4 est pair sans être multiple de 6, et 6 est multiple de 6 sans être impair.

En clair. On a nié la conclusion, nié l'hypothèse, puis échangé les deux. La nouvelle implication s'appelle la contraposée.

Pourquoi est-ce vrai ? Une implication ne peut échouer que d'une seule façon. La preuve compare cette façon d'échouer pour les deux implications : c'est la même.

Propriété : Contraposée d'une implication

Soit P et Q deux propositions. L'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est appelée la **contraposée** de l'implication $P \Rightarrow Q$, et

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$$

est une loi logique : une implication et sa contraposée ont toujours la même valeur de vérité.

Démonstration

Étape 1. D'après la définition de l'implication, $P \Rightarrow Q$ est fausse dans un seul cas : P vraie et Q fausse.

Étape 2. De même, $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est fausse dans un seul cas : $\overline{Q}$ vraie et $\overline{P}$ fausse, c'est-à-dire Q fausse et P vraie (définition de la négation).

Étape 3. Les deux implications sont donc fausses dans le même cas, et vraies dans les trois autres. Elles ont toujours la même valeur de vérité, donc leur équivalence est une loi logique (définition de l'équivalence).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une implication n'est fausse que dans un cas : hypothèse vraie, conclusion fausse. Pour $P \Rightarrow Q$ comme pour $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$, ce cas unique est « P vraie et Q fausse ». Deux propositions fausses dans le même cas, et vraies dans les autres, ont toujours la même valeur de vérité.

Vérifie : Le cas d'échec

D'après la preuve, dans quel cas unique la contraposée $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est-elle fausse ?

A. P et Q sont vraies.
Faux.
Alors $\overline{Q}$ est fausse : l'implication est vraie.

B. P et Q sont fausses.
Faux.
Alors $\overline{P}$ est vraie : l'implication est vraie.

C. P est vraie et Q est fausse.
Juste.
Juste : $\overline{Q}$ est vraie et $\overline{P}$ fausse.

D. P est fausse et Q est vraie.
Faux.
Alors $\overline{Q}$ est fausse : l'implication est vraie.

Correction
$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est fausse quand son hypothèse $\overline{Q}$ est vraie et sa conclusion $\overline{P}$ fausse. Cela signifie : Q fausse et P vraie. C'est le même cas que pour $P \Rightarrow Q$.

Contraposée ou réciproque

Exemple : deux colonnes identiques

Cas	P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
1	V	V	V	F	F	V
2	V	F	F	V	F	F
3	F	V	V	F	V	V
4	F	F	V	V	V	V

Les colonnes de $P \Rightarrow Q$ et de $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ sont identiques.

Ainsi, pour un réel x, « si $x = 3$, alors $x^2 = 9$ » a pour contraposée « si $x^2 \neq 9$, alors $x \neq 3$ » : les deux sont vraies.

Attention : réciproque ou contraposée ?

✗ « Pour démontrer que tout multiple de 6 est pair, je démontre que tout entier pair est multiple de 6. »

✓ Cette seconde phrase est la **réciproque**, et elle est fausse : 4 est pair sans être multiple de 6. Seule la **contraposée** a toujours la même valeur de vérité que l'implication : « si un entier est impair, alors il n'est pas multiple de 6 ».

Nier une implication ; double implication

En clair. Pour accuser le professeur d'avoir menti, il faut deux faits : tu as eu 20 sur 20, **et** tu n'as pas reçu de livre. Nier une implication donne donc un « et ».

Pourquoi est-ce vrai ? La négation de $P \Rightarrow Q$ est vraie exactement quand $P \Rightarrow Q$ est fausse. La preuve traduit ce cas, puis compare les valeurs de vérité pour l'équivalence.

Propriété : Négation d'une implication ; double implication

Soit P et Q deux propositions. Les deux propositions suivantes sont des lois logiques :

- $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow \big(P \text{ et } \overline{Q}\big)$;
- $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)\big)$.

Démonstration

Étape 1. $\overline{(P \Rightarrow Q)}$ est vraie si et seulement si $P \Rightarrow Q$ est fausse, c'est-à-dire si P est vraie et Q fausse (définition de l'implication), donc si « P et $\overline{Q}$ » est vraie.

Étape 2. Si P et Q ont la même valeur de vérité, aucune des implications $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$ n'a une hypothèse vraie et une conclusion fausse : toutes deux sont vraies, leur conjonction aussi (définition de la conjonction), comme $P \Leftrightarrow Q$ (définition de l'équivalence).

Étape 3. Sinon, si P est vraie et Q fausse, $P \Rightarrow Q$ est fausse ; si P est fausse et Q vraie, $Q \Rightarrow P$ est fausse. Dans les deux cas, la conjonction est fausse, comme $P \Leftrightarrow Q$. Les deux équivalences sont donc des lois logiques.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Nier $P \Rightarrow Q$, c'est décrire son unique cas d'échec : « P et $\overline{Q}$ ». La négation d'une implication n'est donc **pas** une implication.

Pour l'équivalence, la preuve distingue deux situations : P et Q de même valeur de vérité, ou de valeurs différentes. Dans les deux, $P \Leftrightarrow Q$ a la valeur de la **double implication**.

Vérifie : Nier une implication

D'après l'étape 1 de la preuve, pourquoi la négation de $P \Rightarrow Q$ est-elle « P et $\overline{Q}$ » ?

A. Parce que $P \Rightarrow Q$ n'est fausse que si P est vraie et Q fausse.
Juste.
Juste : la négation est vraie exactement dans ce cas d'échec.

B. Parce que $P \Rightarrow Q$ est fausse dès que Q est fausse.
Faux.
Si P et Q sont fausses, $P \Rightarrow Q$ est vraie.

C. Parce que nier remplace P et Q par leurs contraires.
Faux.
On obtiendrait $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$. Si P et Q sont fausses, elle est vraie, comme $P \Rightarrow Q$: ce n'est donc pas sa négation.

D. Parce que $P \Rightarrow Q$ et $P \Rightarrow \overline{Q}$ ne sont jamais vraies ensemble.
Faux.
Si P est fausse, ces deux implications sont vraies.

Correction
D'après la définition de l'implication, $P \Rightarrow Q$ n'est fausse que si P est vraie et Q fausse. Sa négation est donc vraie exactement dans ce cas, c'est-à-dire quand « P et $\overline{Q}$ » est vraie. La négation d'une implication est une conjonction.

Une équivalence, puis à toi

Exemple : nier, puis établir une équivalence

Nier. Soit x un réel. La négation de « si $x > 3$, alors $x^2 > 9$ » est « $x > 3$ et $x^2 \leq 9$ ». Pour $x = 4$, elle est fausse : $16 > 9$.

Établir une équivalence. Soit x un réel. Montrons que $2x + 1 = 7 \Leftrightarrow x = 3$ par double implication.

Si $2x + 1 = 7$, alors $2x = 6$, donc $x = 3$. Réciproquement, si $x = 3$, alors $2x + 1 = 7$.

Les deux implications sont vraies : l'équivalence l'est aussi.

À toi : Trois phrases à écrire

Soit n un entier. On considère l'implication « si n est multiple de 4, alors n est pair ». Écris sa contraposée, sa réciproque et sa négation. Donne la valeur de vérité de la réciproque. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La contraposée nie et échange : « si n n'est pas pair, … ».
Indice 2
Pour la réciproque, teste les entiers pairs 2, 6 et 10 : lesquels sont multiples de 4 ?
Indice 3
Point délicat : la négation n'est pas une implication ; c'est une phrase avec « et ».

Réponse

- Contraposée : « si n est impair, alors n n'est pas multiple de 4 ». Elle est vraie, comme l'implication : si $n = 4k$, alors $n = 2 \times 2k$ est pair.
- Réciproque : « si n est pair, alors n est multiple de 4 ». Elle est fausse : 6 est pair, mais $6 = 4 \times 1 + 2$ n'est pas multiple de 4.
- Négation : « n est multiple de 4 et n est impair ». Elle est fausse pour tout entier n.

Quantificateurs

Tous, certains, un seul

Tu dis « tout le monde » ou « quelqu'un » sans y penser : les mathématiques aussi.

En clair. Compare trois phrases sur un réel x. « $x^2 \geq 0$ » est vraie pour **tous** les réels. « $x^2 = 4$ » est vraie pour **certains** réels seulement. « $x + 3 = 7$ » est vraie pour **un seul** réel : 4.

Les mots « pour tout », « il existe » et « un seul » font de ces phrases des propositions.

Devine : Combien de solutions ?

Pour combien de réels x l'égalité $x^2 = 4$ est-elle vraie ?

A. Pour aucun réel.
Faux.
$2^2 = 4$: le réel 2 convient.

B. Pour un seul : $x = 2$.

Faux.
$(-2)^2 = 4$ aussi.

C. Pour deux : 2 et -2.

Juste.
Juste : et aucun autre réel ne convient.

D. Pour une infinité de réels.

Faux.
Pour $x = 3$, $x^2 = 9$: la plupart des réels ne conviennent pas.

Correction
$2^2 = 4$ et $(-2)^2 = 4$. Aucun autre réel ne convient : si $x^2 = 4$, alors $(x-2)(x+2) = x^2 - 4 = 0$, donc $x = 2$ ou $x = -2$.

Il existe donc des réels qui vérifient l'égalité, mais il n'en existe pas qu'un seul :

- $(\exists x \in \mathbb{R})$: $x^2 = 4$ est vraie ;
- $(\exists ! x \in \mathbb{R})$: $x^2 = 4$ est fausse.

Les quantificateurs

Définition : Fonction propositionnelle ; quantificateurs

Soit E un ensemble, par exemple $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ ou un intervalle. Un énoncé $P(x)$ qui contient une variable x et qui devient une proposition chaque fois que l'on remplace x par un élément de E est une **fonction propositionnelle** définie sur E.

- La proposition $(\forall x \in E)$: $P(x)$ se lit « pour tout x de E, $P(x)$ ». Elle est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour **tous** les éléments x de E. Le symbole $\forall$ est le **quantificateur universel**.
- La proposition $(\exists x \in E)$: $P(x)$ se lit « il existe au moins un x de E tel que $P(x)$ ». Elle est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour **au moins un** élément x de E. Le symbole $\exists$ est le **quantificateur existentiel**.
- La proposition $(\exists ! x \in E)$: $P(x)$ se lit « il existe un unique x de E tel que $P(x)$ ». Elle est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour **exactement un** élément x de E.

Lire et écrire. La proposition $(\forall x \in \mathbb{R})$: $x^2 \geq 0$ se lit « pour tout réel x, $x^2 \geq 0$ ».

Dans cette écriture, la lettre x est **muette** : $(\forall t \in \mathbb{R})$: $t^2 \geq 0$ dit exactement la même chose.

En revanche, l'ensemble compte : remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{N}$ peut changer la valeur de vérité.

Exemple : traduire, puis juger

- $(\forall x \in \mathbb{R})$: $x^2 \geq 0$ est vraie : un carré est positif ou nul.

- $(\exists x \in \mathbb{R})$: $x^2 = 4$ est vraie : $x = 2$ convient.
- $(\exists! x \in \mathbb{R})$: $x^2 = 4$ est fausse : 2 et -2 conviennent.
- $(\exists! x \in \mathbb{N})$: $x^2 = 4$ est vraie : -2 n'est pas un entier naturel.
- $(\exists! x \in \mathbb{R})$: $x + 3 = 7$ est vraie : $x + 3 = 7$ équivaut à $x = 4$.

Vérifie : Vrai ou faux

Laquelle de ces propositions est **fausse** ?

A. $(\exists x \in \mathbb{Z})$: $x + 3 = 7$
Faux.
Elle est vraie : $4 \in \mathbb{Z}$ et $4 + 3 = 7$.

B. $(\forall x \in \mathbb{R})$: $x^2 + 1 > 0$
Faux.
Elle est vraie : $x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

C. $(\exists x \in \mathbb{N})$: $x^2 = x$
Faux.
Elle est vraie : $0^2 = 0$.

D. $(\exists! x \in \mathbb{Z})$: $x^2 = 25$
Juste.
Juste : 5 et -5 sont deux entiers qui conviennent.

Correction
Dans $\mathbb{Z}$, l'égalité $x^2 = 25$ a deux solutions, 5 et -5 : il n'en existe pas qu'une.

Les trois autres propositions sont vraies : $4 + 3 = 7$ avec $4 \in \mathbb{Z}$; $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ pour tout réel x ; $0^2 = 0$ avec $0 \in \mathbb{N}$.

Deux quantificateurs

Deux quantificateurs. Lis $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})$: $y > x$: « pour tout réel x, il existe un réel y tel que $y > x$ ».

Elle est vraie. Soit x un réel : le réel $y = x + 1$ vérifie $y > x$. Ici, y est choisi **après** x : il dépend de x.

Vérifie : Deux phrases, deux sens

Dans $\mathbb{R}$, laquelle de ces propositions est **vraie** ?

A. $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})$: $y < x$
Faux.
Il faudrait un même réel y plus petit que tous les réels, y compris que lui-même.

B. $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : y = 2x$

Faux.

Le réel $y = 2x$ dépend de x : il vaut 0 pour $x = 0$, et 2 pour $x = 1$.

C. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : y < x$

Juste.

Juste : pour chaque x, le réel $x - 1$ convient.

D. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : y^2 < 0$

Faux.

Un carré n'est jamais négatif : aucun y ne convient.

Correction

Dans la troisième, y est choisi après x et peut en dépendre : $y = x - 1$ vérifie $y < x$.

Les autres sont fausses. Dans la première, un seul réel devrait être plus petit que tous les réels, y compris que lui-même. Dans la deuxième, un même y devrait valoir 0 et 2. Enfin, aucun carré n'est strictement négatif.

Attention : l'ordre des quantificateurs

✗ « $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : y > x$ dit la même chose. »

✓ Cette phrase affirme qu'**un même** réel y est plus grand que tous les réels. C'est faux : quel que soit y, le réel $x = y$ ne vérifie pas $y > x$. Échanger « pour tout » et « il existe » a changé la valeur de vérité.

Exemple : un même élément pour tous

Dans $\mathbb{N}$, la proposition $(\exists y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N}) : y \leq x$ est vraie. Le même entier $y = 0$ convient pour tous les x, car tout entier naturel est supérieur ou égal à 0. Dans $\mathbb{Z}$, elle devient fausse : pour tout entier y, l'entier $x = y - 1$ vérifie $y > x$.

À toi : Trois valeurs de vérité

Pour chacune de ces propositions, dis si elle est vraie ou fausse, et justifie.

- $(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 = -1$;
- $(\forall n \in \mathbb{N}) : n^2 \geq n$;
- $(\exists! x \in \mathbb{R}) : 2x - 1 = 5$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Le carré d'un réel peut-il être négatif ?

Indice 2

Pour la deuxième, sépare $n = 0$ et $n \geq 1$, puis multiplie l'inégalité $n \geq 1$ par n.

Indice 3

Point délicat : pour « il existe un unique », montre qu'une solution existe **et** qu'il n'y en a pas d'autre.

Réponse

- Fausse : pour tout réel x, $x^2 \geq 0$, donc $x^2 \neq -1$.
- Vraie : pour $n = 0$, $0 \geq 0$. Pour $n \geq 1$, on multiplie $n \geq 1$ par $n > 0$: $n^2 \geq n$.
- Vraie : $2x - 1 = 5$ équivaut à $2x = 6$, puis à $x = 3$. Le réel 3 est la seule solution.

Nier une proposition quantifiée ; contre-exemple

Contredire « pour tout »

Devine : Contredire une affirmation

Réfuter une phrase peut être bien plus court que la démontrer. On veut montrer que la proposition « $(\forall x \in \mathbb{R})$: $x^2 > 0$ » est fausse. Que suffit-il de faire ?

A. Vérifier que $x^2 > 0$ pour $x = 1, 2$ et 3.

Faux.

Ces essais vont dans le sens de la proposition : ils ne la contredisent pas.

B. Trouver un seul réel x tel que $x^2 \leq 0$.

Juste.

Juste : un seul réel qui échoue suffit, et 0 convient.

C. Montrer que $x^2 \leq 0$ pour tout réel x.

Faux.

C'est beaucoup trop demander, et c'est faux : $1^2 > 0$.

D. Trouver un réel x tel que $x^2 > 0$.

Faux.

Un tel réel va dans le sens de la proposition.

Correction

Pour que « pour tout réel x, $x^2 > 0$ » soit fausse, il suffit qu'un réel la mette en défaut. Le réel 0 convient : $0^2 = 0$, et $0 > 0$ est faux. La proposition est donc fausse.

En clair. « Tous les essais réussissent » est faux dès qu'**un** essai échoue. « Un essai au moins réussit » est faux quand **tous** échouent.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve part des définitions des deux quantificateurs, puis de celle de la négation.

La règle de négation

Propriété : Négation d'une proposition quantifiée

Soit E un ensemble et $P(x)$ une fonction propositionnelle définie sur E.

- La négation de la proposition « $(\forall x \in E) : P(x)$ » est la proposition « $(\exists x \in E) : \overline{P(x)}$ ».
- La négation de la proposition « $(\exists x \in E) : P(x)$ » est la proposition « $(\forall x \in E) : \overline{P(x)}$ ».

En particulier, pour montrer qu'une proposition « $(\forall x \in E) : P(x)$ » est fausse, il suffit de trouver un élément x_0 de E tel que $P(x_0)$ soit fausse : un tel élément est un **contre-exemple**.

Démonstration

Étape 1. « $(\forall x \in E) : P(x)$ » est fausse si et seulement si $P(x)$ n'est pas vraie pour tous les éléments de E (définition du quantificateur universel), c'est-à-dire, chaque $P(x)$ étant vraie ou fausse, s'il existe au moins un élément x_0 de E tel que $P(x_0)$ soit fausse.

Étape 2. Autrement dit, $\overline{P(x_0)}$ est vraie pour au moins un élément x_0 de E (définition de la négation) : « $(\exists x \in E) : \overline{P(x)}$ » est vraie (définition du quantificateur existentiel). D'où le premier point et la notion de contre-exemple.

Étape 3. De même, « $(\exists x \in E) : P(x)$ » est fausse si et seulement si aucun élément x de E ne rend $P(x)$ vraie (définition du quantificateur existentiel), c'est-à-dire si $\overline{P(x)}$ est vraie pour tous les éléments x de E (définition de la négation) : c'est le second point.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

« $(\forall x \in E) : P(x)$ » est fausse exactement quand **au moins un** élément x_0 de E rend $P(x_0)$ fausse : c'est le cœur de la preuve, et l'idée du contre-exemple.

De même, « il existe » est faux exactement quand **aucun** élément ne convient. Nier échange donc « pour tout » et « il existe ».

Vérifie : Quand « il existe » est faux

D'après la preuve, quand la proposition « $(\exists x \in E) : P(x)$ » est-elle fausse ?

A. Quand aucun élément x de E ne rend $P(x)$ vraie.
Juste.
Juste : alors $\overline{P(x)}$ est vraie pour tous les x de E.

B. Quand un élément x de E rend $P(x)$ fausse.

Faux.
Un autre élément peut rendre $P(x)$ vraie : la proposition serait alors vraie.

C. Quand tous les éléments de E rendent $P(x)$ vraie.

Faux.
Dans ce cas, la proposition est vraie.

D. Quand l'ensemble E contient plusieurs éléments.

Faux.
Le nombre d'éléments de E ne décide pas de la valeur de vérité.

Correction
Dans la dernière partie de la preuve, « il existe » est faux si et seulement si aucun élément ne convient. Alors $\overline{P(x)}$ est vraie pour tous les x de E : c'est la négation annoncée. Un seul élément qui rend $P(x)$ fausse ne suffit pas.

Exemple : deux négations

- La négation de « $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq 0$ » est « $(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 < 0$ ». Elle est fausse, car la proposition de départ est vraie.
- La négation de « $(\exists x \in \mathbb{R}) : x + 3 = 7$ » est « $(\forall x \in \mathbb{R}) : x + 3 \neq 7$ ». Elle est fausse : $x = 4$ vérifie $x + 3 = 7$.

Une proposition et sa négation ont toujours des valeurs de vérité contraires.

Écrire une négation

Méthode : écrire une négation

1. **Lire la structure** : d'abord les quantificateurs, ensuite les connecteurs qui suivent.
2. **Échanger les quantificateurs** : chaque « pour tout » devient « il existe », et inversement ; l'ensemble ne change pas.
3. **Nier la fin** : « et » et « ou » s'échangent, chaque proposition est niée, et « si P, alors Q » devient « P et $\overline{Q}$ ».
4. **Contrôler** sur un cas simple : si la phrase de départ est vraie, ta négation doit être fausse, et inversement.

Exemple : Exemple guidé : nier deux quantificateurs

Énoncé. Écrivons la négation de $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : y > x$.

Quantificateurs. « Pour tout x » devient « il existe x », et « il existe y » devient « pour tout y ».

Fin. La négation de $y > x$ est $y \leq x$.

Résultat. On obtient :

$$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : y \leq x.$$

Contrôle. La proposition de départ est vraie, avec $y = x + 1$. Sa négation doit donc être fausse. C'est bien le cas : pour tout réel x, le réel $y = x + 1$ ne vérifie pas $y \leq x$.

Réfuter par un contre-exemple

Méthode **: réfuter par un contre-exemple**

1. **Mettre en forme** : écris la proposition sous la forme « pour tout x de E, $P(x)$ ».
2. **Chercher** un élément qui la met en défaut : teste des valeurs simples, puis des valeurs particulières comme 0, 1, un négatif, une fraction.
3. **Vérifier** par le calcul que cet élément appartient à E et que P est fausse pour lui.
4. **Conclure** : la proposition est fausse, et sa négation est vraie.

Exemple **: Exemple guidé : un contre-exemple**

Énoncé. La proposition $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq x$ est-elle vraie ?

Essais. Pour $x = 0, 1, 2$ ou -3, l'inégalité est vraie. Les entiers ne la mettent pas en défaut : cherchons entre 0 et 1.

Contre-exemple. Pour $x = \dfrac{1}{2}$, on a $x^2 = \dfrac{1}{4}$, et $\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2}$. L'inégalité $x^2 \geq x$ est fausse pour ce réel.

Conclusion. La proposition est fausse. Sa négation, $(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 < x$, est vraie.

Un piège, puis à toi

Attention **: des exemples ne prouvent pas « pour tout »**

✗ « $n^2 + n + 41$ est premier pour $n = 0, 1, \ldots, 39$; il est donc premier pour tout entier naturel n. »

✓ Quarante essais réussis ne démontrent rien sur les autres entiers. Pour $n = 40$, on obtient 41^2, qui n'est pas premier. Un seul contre-exemple suffit à réfuter une proposition universelle.

À toi : Une identité fausse

On considère la proposition $(\forall x \in \mathbb{R}) : (x+1)^2 = x^2 + 1$. Écris sa négation, puis réfute la proposition par une valeur bien choisie de x. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Échange le quantificateur, puis nie l'égalité.
Indice 2
Développe $(x+1)^2$ avec une identité remarquable : quel terme manque ?
Indice 3
Point délicat : pour $x = 0$, l'égalité est vraie ; choisis un autre réel et fais le calcul complet.

Réponse
La négation est $(\exists x \in \mathbb{R}) : (x+1)^2 \neq x^2 + 1$.

Pour $x = 1$: $(1+1)^2 = 4$ et $1^2 + 1 = 2$. Or $4 \neq 2$: le réel 1 est un contre-exemple.

La proposition est donc fausse, et sa négation est vraie. En effet, $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ pour tout réel x : l'égalité proposée n'a lieu que pour $x = 0$.

Raisonnement direct, par contraposée, par équivalences

Raisonnement direct

Rappel. Un entier n est **pair** s'il s'écrit $n = 2k$, avec k entier. Il est **impair** s'il s'écrit $n = 2k + 1$, avec k entier.

Raisonnement direct. Pour démontrer « si P, alors Q », on suppose P vraie et on en déduit Q, pas à pas. La rédaction commence par poser les objets : « Soit n un entier. » Elle annonce ensuite l'hypothèse : « Supposons que n est pair. » Chaque pas s'appuie sur une définition, un calcul ou un résultat connu.

Devine : La première ligne

On veut démontrer : « pour tout entier n, si n est pair, alors n^2 est pair ». Quelle première ligne convient ?

A. Supposons que n^2 est pair, avec n entier.
Faux.
C'est supposer la conclusion : on tournerait en rond.

B. Soit n un entier pair ; écrivons $n = 2k$.
Juste.
Juste : on pose l'objet, l'hypothèse, et on la traduit.

C. Prenons $n = 2$: alors $n^2 = 4$ est pair.
Faux.
Un exemple ne démontre pas une phrase sur tous les entiers.

D. Soit n un entier : n^2 est toujours pair.
Faux.

C'est faux : $3^2 = 9$ est impair.

Correction
On pose l'objet et l'hypothèse : « Soit n un entier pair. » Il existe donc un entier k tel que $n = 2k$.

Les autres départs échouent. Supposer n^2 pair, c'est supposer la conclusion. Un seul exemple, comme $n = 2$, ne prouve rien sur tous les entiers. Enfin, $3^2 = 9$ est impair.

Exemple **: Exemple guidé : un raisonnement direct**

Énoncé. Montrons que, pour tout entier n, si n est pair, alors n^2 est pair.

Hypothèse. Soit n un entier. Supposons que n est pair : il existe un entier k tel que $n = 2k$.

Calcul. Alors :

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k)^2 \\ &= 4k^2 \\ &= 2 \times 2k^2. \end{aligned}$$

Conclusion. Comme $2k^2$ est un entier, n^2 est pair.

Raisonnement par contraposée

Essaie maintenant « si n^2 est pair, alors n est pair ». En partant de $n^2 = 2m$, on ne sait pas revenir à n.

La contraposée est plus commode : « si n est impair, alors n^2 est impair ». Son hypothèse donne une écriture de n, que l'on peut élever au carré.

D'après la loi de la contraposée, les deux phrases sont vraies ou fausses en même temps : démontrer la seconde suffit.

Rappel. Pour tous réels a et b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Méthode **: raisonner par contraposée**

1. **Repérer** l'implication à établir : « si P, alors Q ».
2. **Écrire et annoncer** sa contraposée : « Raisonnons par contraposée : montrons que si $\overline{Q}$, alors $\overline{P}$. »
3. **Démontrer** cette contraposée directement : « Supposons $\overline{Q}$ », puis déduis $\overline{P}$.
4. **Conclure** sur l'implication de départ : elle a la même valeur de vérité que sa contraposée.

Exemple **: Exemple guidé : par contraposée**

Énoncé. Soit n un entier. Montrons que si n^2 est pair, alors n est pair.

Annonce. Raisonnons par contraposée : montrons que si n est impair, alors n^2 est impair.

La contraposée. Supposons n impair : il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. On développe avec le carré d'une somme :

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1. \end{aligned}$$

Comme $2k^2 + 2k$ est un entier, n^2 est impair.

Conclusion. La contraposée est vraie, donc l'implication l'est aussi : si n^2 est pair, alors n est pair.

Choisir ; raisonner par équivalences

Vérifie : Quel raisonnement choisir ?

Soit n un entier. Pour démontrer « si $5n + 3$ est pair, alors n est impair », quel départ est le plus commode ?

A. Supposer n impair et montrer que $5n + 3$ est pair.

Faux.

C'est démontrer la réciproque : elle ne prouve pas l'implication.

B. Vérifier la phrase pour $n = 1$, 3 et 5.

Faux.

Des essais ne démontrent pas une phrase sur tous les entiers.

C. Supposer $5n + 3$ impair et en déduire n pair.

Faux.

C'est la contraposée de la réciproque : elle ne dit rien de l'implication voulue.

D. Raisonner par contraposée : supposer n pair.

Juste.

Juste : l'hypothèse $n = 2k$ se calcule facilement.

Correction

Partir de « $5n + 3$ est pair » ne donne pas d'écriture simple de n.

Raisonnons par contraposée : supposons n pair, $n = 2k$ avec k entier. Alors :

$$\begin{aligned} 5n + 3 &= 10k + 3 \\ &= 2(5k + 1) + 1. \end{aligned}$$

Donc $5n + 3$ est impair. La contraposée est vraie, donc l'implication aussi.

Méthode : raisonner par équivalences successives

1. **Partir** de la proposition étudiée, et la transformer ligne après ligne.
2. **Contrôler chaque passage** : ajouter un même nombre aux deux membres, multiplier ou diviser par un nombre **non nul**, développer avec une identité remarquable.
3. **Écrire le symbole d'équivalence** seulement si les deux lignes sont vraies ou fausses en même temps ; sinon, écrire une implication et vérifier la réciproque à part.
4. **Conclure** : la première ligne équivaut à la dernière.

Exemple : Exemple guidé : par équivalences successives

Énoncé. Soit x un réel. Résolvons l'équation $(x+1)^2 = x^2 + 9$.

Équivalences. On développe avec une identité remarquable, puis on simplifie :

$$\begin{aligned} & (x+1)^2 = x^2 + 9 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 2x + 1 = x^2 + 9 \\ \Leftrightarrow\ & 2x = 8 \\ \Leftrightarrow\ & x = 4. \end{aligned}$$

Justifications. Pour obtenir $2x = 8$, on retranche $x^2 + 1$ aux deux membres. Pour obtenir $x = 4$, on divise par 2, qui est non nul.

Conclusion. L'équation a une seule solution : 4. Contrôle : $5^2 = 25$ et $4^2 + 9 = 25$.

Un piège, à toi, le coin devoir

Attention : une étape qui n'est pas une équivalence

✗ « $x = 3 \Leftrightarrow x^2 = 9$. »

✓ Si $x = 3$, alors $x^2 = 9$: l'implication est vraie. Mais $x = -3$ vérifie aussi $x^2 = 9$: la réciproque est fausse. Élever au carré n'est pas une équivalence ; diviser par un nombre qui peut être nul non plus. Écris alors une implication, et vérifie la réciproque.

À toi : Une équation à résoudre

Soit x un réel. Résous l'équation $(x-3)^2 = x^2 - 3$ par équivalences successives, en justifiant chaque passage. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Développe $(x-3)^2$ avec l'identité $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
Indice 2

Retranche x^2 aux deux membres : l'inconnue n'apparaît plus qu'au premier degré.

Indice 3

Point délicat : avant de diviser par -6, vérifie que ce nombre est non nul ; contrôle ensuite la solution dans l'équation de départ.

Réponse

$$\begin{aligned} & (x-3)^2 = x^2 - 3 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 6x + 9 = x^2 - 3 \\ \Leftrightarrow\ & -6x = -12 \\ \Leftrightarrow\ & x = 2. \end{aligned}$$

Justifications. On a développé avec une identité remarquable, retranché $x^2 + 9$ aux deux membres, puis divisé par -6, qui est non nul.

Conclusion. Chaque passage est une équivalence : la seule solution est 2. Contrôle : $(2-3)^2 = 1$ et $2^2 - 3 = 1$.

Remarque : Coin devoir : rédiger une contraposée

En devoir, annonce le raisonnement dès la première ligne. Écris par exemple : « Raisonnons par contraposée. Soit n un entier impair ; montrons que n^2 est impair. » Termine par une phrase qui revient à l'énoncé : « La contraposée est vraie, donc l'implication demandée est vraie. » Sans annonce, le correcteur croit que tu démontres une autre phrase.

Raisonnement par disjonction des cas

Couper en cas

Une valeur absolue change de visage selon le signe : voyons-le sur deux nombres.

Rappel. La valeur absolue d'un réel a vaut a si $a \geq 0$, et $-a$ si $a < 0$. Par exemple, $|4| = 4$ et $|-4| = 4$.

Devine : Deux calculs différents

Soit x un réel. Que vaut $|x-2| + x$ pour $x = 5$, puis pour $x = -1$?

A. 8, puis -4.

Faux.

Pour $x = -1$, $|-3| = 3$: une valeur absolue n'est jamais négative.

B. 3, puis 3.

Faux.

Tu as calculé $|x-2|$ seul : il faut encore ajouter x.

C. 8, puis 0.

Faux.

Pour $x = -1$: $3 + (-1) = 2$, et non 0.

D. 8, puis 2.

Juste.

Juste : $3 + 5 = 8$ et $3 - 1 = 2$.

Correction

Pour $x = 5$: $|3| + 5 = 3 + 5 = 8$. Pour $x = -1$: $|-3| - 1 = 3 - 1 = 2$.

Le calcul change de forme : $x - 2$ est positif dans le premier cas, négatif dans le second. Traiter ces deux cas séparément, c'est raisonner par disjonction des cas.

En clair. Pour démontrer une propriété, on peut répartir les situations possibles en plusieurs cas, et la démontrer dans chacun. Encore faut-il qu'aucune situation n'échappe aux cas choisis.

Pourquoi est-ce vrai ? Si l'un des cas se produit toujours, et si chacun conduit à la conclusion, celle-ci est vraie. La preuve s'appuie sur la définition de l'implication.

Le principe

Propriété : Raisonnement par disjonction des cas

Soit P, Q et R trois propositions. Si les implications $P \Rightarrow R$ et $Q \Rightarrow R$ sont vraies, et si la proposition « P ou Q » est vraie, alors R est vraie.

En particulier, comme « P ou $\overline{P}$ » est toujours vraie, si $P \Rightarrow R$ et $\overline{P} \Rightarrow R$ sont vraies, alors R est vraie : on démontre R dans le cas où P est vraie, puis dans le cas où P est fausse.

Démonstration

Étape 1. D'après la définition de l'implication, une implication dont l'hypothèse est vraie n'est vraie que dans un cas : lorsque sa conclusion est vraie. Une implication vraie dont l'hypothèse est vraie a donc une conclusion vraie.

Étape 2. Comme « P ou Q » est vraie, l'une au moins des propositions P, Q est vraie (définition de la disjonction). Si P est vraie, l'étape 1, appliquée à $P \Rightarrow R$, donne R vraie. Si Q est vraie, l'étape 1, appliquée à $Q \Rightarrow R$, donne R vraie. Dans tous les cas, R est vraie.

Étape 3. L'une des propositions P, $\overline{P}$ est toujours vraie (définition de la négation), donc « P ou $\overline{P}$ » est toujours vraie (définition de la disjonction). On applique alors l'étape 2 en remplaçant Q par $\overline{P}$: c'est le cas particulier.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve repose sur une idée : une implication vraie dont l'hypothèse est vraie a une conclusion vraie. Comme « P ou Q » est vraie, l'un des cas se produit, et il conduit à R. Retiens l'exigence : les cas doivent **couvrir toutes les situations**. Le découpage « P ou $\overline{P}$ » les couvre toujours.

Vérifie : Des cas qui couvrent tout

Soit x un réel. Quel découpage en deux cas couvre **tous** les réels ?

A. $x \geq 2$, ou bien $x < 2$.

Juste.

Juste : c'est la forme « P ou $\overline{P}$ ».

B. $x > 2$, ou bien $x < 2$.

Faux.

Le réel 2 n'est dans aucun des deux cas.

C. $x > 0$, ou bien $x < 0$.

Faux.

Le réel 0 échappe aux deux cas.

D. $x \geq 2$, ou bien $x \leq -2$.

Faux.

Le réel 0 n'est dans aucun des deux cas.

Correction

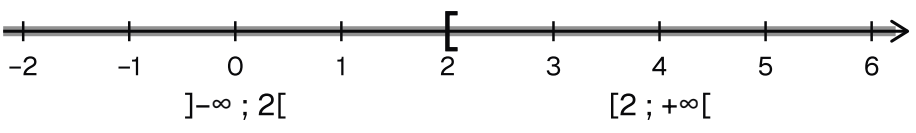
Les cas « $x \geq 2$ » et « $x < 2$ » sont de la forme « P » et « $\overline{P}$ » : l'un des deux est toujours vrai. Les autres découpages oublient des réels : 2 pour le deuxième, 0 pour le troisième, et tous les réels strictement compris entre -2 et 2 pour le dernier.

Exemple : écrire sans valeur absolue

Soit x un réel et $A = |x - 2| + x$. Écrivons A sans valeur absolue. Deux cas couvrent tous les réels.

- **Premier cas, $x \geq 2$.** Alors $x - 2 \geq 0$, donc $|x - 2| = x - 2$ et $A = 2x - 2$.
- **Second cas, $x < 2$.** Alors $x - 2 < 0$, donc $|x - 2| = 2 - x$ et $A = 2$.

On retrouve $A = 8$ pour $x = 5$, et $A = 2$ pour $x = -1$.



Le réel 2 coupe la droite en deux cas qui couvrent tout : x < 2 d'un côté, x ≥ 2 de l'autre.

Rédiger une disjonction des cas

Méthode : raisonner par disjonction des cas

1. **Choisir les cas** : ils doivent couvrir toutes les situations, par exemple « n pair » et « n impair », ou « $x \geq a$ » et « $x < a$ ».
2. **Les annoncer** avant de commencer : « Distinguons deux cas. »
3. **Traiter chaque cas** avec l'information qu'il apporte, comme une écriture $n = 2k$ ou $n = 2k + 1$.
4. **Conclure** : la propriété est vraie dans chaque cas, et les cas couvrent tout, donc elle est vraie.

Exemple : Exemple guidé : $n(n + 1)$ est pair

Énoncé. Montrons que, pour tout entier naturel n, le nombre $n(n+1)$ est pair.

Soit n un entier naturel. Distinguons deux cas : n pair ou n impair.

Cas 1 : n pair. Il existe un entier k tel que $n = 2k$. Alors $n(n+1) = 2 \times k(n+1)$ est pair.

Cas 2 : n impair. Il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. Alors $n + 1 = 2(k + 1)$, et $n(n+1) = 2 \times (2k+1)(k+1)$ est pair.

Conclusion. Tout entier naturel est pair ou impair, donc $n(n+1)$ est pair dans tous les cas.

À toi : Une autre parité

Montre, par disjonction des cas, que pour tout entier naturel n, le nombre $n^2 + 3n$ est pair. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Distingue deux cas : n pair, puis n impair.
Indice 2
Écris $n = 2k$, puis $n = 2k + 1$, et calcule $n^2 + 3n$ dans chaque cas.
Indice 3
Point délicat : dans le cas impair, regroupe tous les termes pour faire apparaître $2 \times (\dots)$, avec un entier entre les parenthèses.

Réponse
Soit n un entier naturel. Distinguons deux cas.

Cas 1 : n pair. $n = 2k$, avec k entier. Alors :

$$\begin{aligned} n^2 + 3n &= 4k^2 + 6k \\ &= 2(2k^2 + 3k). \end{aligned}$$

Ce nombre est pair.

Cas 2 : n impair. $n = 2k+1$, avec k entier. Alors :

$$\begin{aligned} n^2 + 3n &= (4k^2 + 4k + 1) \\ &\quad + (6k + 3) \\ &= 4k^2 + 10k + 4 \\ &= 2(2k^2 + 5k + 2). \end{aligned}$$

Ce nombre est pair.

Conclusion. Tout entier naturel est pair ou impair : $n^2 + 3n$ est donc pair pour tout entier naturel n.

Raisonnement par l'absurde

Supposer le contraire

Devine : Le plus grand entier ?

Parfois, le plus court chemin vers le vrai passe par le faux. On veut montrer qu'il n'existe pas de plus grand entier naturel. Supposons le contraire : soit N le plus grand entier naturel. Que dire de $N+1$?

A. C'est un entier naturel plus grand que N.

Juste.

Juste : cela contredit le choix de N.

B. Il est égal à N, car N est le plus grand.

Faux.

$N + 1 - N = 1$: ces deux nombres ne sont pas égaux.

C. Il est inférieur à N, car N est le plus grand.

Faux.

$N + 1 > N$, quel que soit N.

D. Ce n'est pas un entier naturel.

Faux.

La somme de deux entiers naturels est un entier naturel.

Correction

$N+1$ est un entier naturel, et $N + 1 > N$. Or N était supposé le plus grand : c'est impossible.

L'hypothèse « il existe un plus grand entier naturel » mène à une contradiction ; elle est donc fausse. Tu viens de raisonner par l'absurde.

En clair. Pour prouver une proposition, on suppose qu'elle est fausse, et l'on raisonne. Si l'on aboutit à une affirmation impossible, l'hypothèse était intenable.

Pourquoi est-ce vrai ? Une affirmation de la forme « Q et $\overline{Q}$ » est toujours fausse. Or une implication vraie dont la conclusion est fausse a une hypothèse fausse : c'est tout l'argument de la preuve.

Le principe

Propriété : Raisonnement par l'absurde

Soit P et Q deux propositions. Si l'implication $\overline{P} \Rightarrow \left(Q \text{ et } \overline{Q}\right)$ est vraie, alors P est vraie.

Ainsi, pour démontrer P, on peut supposer que P est fausse et en déduire une **contradiction**, c'est-à-dire une proposition de la forme « Q et $\overline{Q}$ », qui est toujours fausse.

Démonstration

Étape 1. Les propositions Q et $\overline{Q}$ ne sont jamais vraies en même temps (définition de la négation). La proposition « Q et $\overline{Q}$ » est donc toujours fausse (définition de la conjonction).

Étape 2. D'après la définition de l'implication, une implication dont la conclusion est fausse n'est vraie que dans un cas : lorsque son hypothèse est fausse. Or l'implication $\overline{P} \Rightarrow \left(Q \text{ et } \overline{Q}\right)$ est vraie, et sa conclusion est fausse (étape 1) : son hypothèse $\overline{P}$ est donc fausse.

Étape 3. Ainsi $\overline{P}$ est fausse, donc P est vraie (définition de la négation).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux idées portent la preuve. D'abord, « Q et $\overline{Q}$ » est toujours fausse : c'est une **contradiction**. Ensuite, une implication vraie dont la conclusion est fausse a forcément une hypothèse fausse. Ici, l'hypothèse est $\overline{P}$: elle est fausse, donc P est vraie.

Vérifie : Le cœur de l'argument

Dans la preuve, pourquoi l'hypothèse $\overline{P}$ ne peut-elle pas être vraie ?

A. Car Q est fausse dans tous les cas.
Faux.
La preuve ne dit rien de Q seule : c'est « Q et $\overline{Q}$ » qui est toujours fausse.

B. Car P et $\overline{P}$ sont toujours vraies ensemble.
Faux.
Une proposition et sa négation ne sont jamais vraies ensemble.

C. Car une proposition fausse implique toujours une proposition vraie.
Faux.
Cette phrase est vraie, mais elle ne sert pas ici : on ignore si $\overline{P}$ est fausse. On sait seulement que l'implication est vraie et que sa conclusion, « Q et $\overline{Q}$ », est fausse.

D. Car une implication vraie dont la conclusion est fausse a une hypothèse fausse.

Juste.

Juste : c'est la lecture de la table de l'implication, à l'étape 2.

Correction

La conclusion « Q et $\overline{Q}$ » est toujours fausse. Une implication vraie dont la conclusion est fausse a une hypothèse fausse (définition de l'implication). Donc $\overline{P}$ est fausse, et P est vraie.

Exemple : 0 n'a pas d'inverse

Montrons qu'il n'existe aucun réel y tel que $0 \times y = 1$.

Supposons, par l'absurde, qu'un tel réel y existe. Alors $0 \times y = 1$. Or $0 \times y = 0$ pour tout réel y.

On obtient $0 = 1$, ce qui est faux : c'est une contradiction. Donc aucun réel y ne vérifie $0 \times y = 1$.

Rédiger un raisonnement par l'absurde

Méthode : raisonner par l'absurde

1. **Annoncer** : « Supposons, par l'absurde, que la proposition est fausse. » Écris précisément cette hypothèse.
2. **Déduire** des conséquences, chacune justifiée.
3. **Nommer la contradiction** : un résultat contraire à l'hypothèse, à une donnée ou à une propriété connue.
4. **Conclure** : l'hypothèse est impossible, donc la proposition est vraie.

Exemple : Exemple guidé : une équation sans solution entière

Énoncé. Montrons qu'il n'existe pas d'entiers a et b tels que $2a + 4b = 7$.

Annonce. Supposons, par l'absurde, qu'il existe des entiers a et b tels que $2a + 4b = 7$.

Déductions. Alors $7 = 2a + 4b = 2(a + 2b)$, et $a + 2b$ est un entier : 7 serait pair.

Contradiction. Or $7 = 2 \times 3 + 1$ est impair. Le nombre 7 serait pair et impair en même temps.

Conclusion. L'hypothèse est impossible : de tels entiers a et b n'existent pas.

À toi : Une autre équation sans solution entière

Montre par l'absurde qu'il n'existe pas d'entiers a et b tels que $4a + 6b = 9$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par annoncer l'hypothèse : « Supposons, par l'absurde, qu'il existe… ».
Indice 2
Mets 2 en facteur dans $4a + 6b$: que dire de sa parité ?
Indice 3
Point délicat : nomme la contradiction ; ici, 9 serait pair et impair en même temps.

Réponse
Supposons, par l'absurde, qu'il existe des entiers a et b tels que $4a + 6b = 9$.

Or $4a + 6b = 2(2a + 3b)$, avec $2a + 3b$ entier : ce nombre est pair. Mais $9 = 2 \times 4 + 1$ est impair. Le nombre 9 serait pair et impair en même temps : contradiction.

Conclusion. De tels entiers a et b n'existent pas.

Pour aller plus loin : une racine carrée

Rappel. Une fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible lorsque p et q n'ont pas d'autre diviseur commun positif que 1. Ainsi, $\frac{6}{4}$ ne l'est pas, car elle se simplifie en $\frac{3}{2}$.
Tout rationnel strictement positif s'écrit comme une fraction irréductible $\frac{p}{q}$, avec p et q entiers naturels non nuls.

Exemple **: Bonus : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel**

Annonce. Supposons, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ est rationnel. Comme $\sqrt{2} > 0$, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, avec p et q entiers naturels non nuls et la fraction irréductible.

Déductions. Alors $2 = \frac{p^2}{q^2}$, donc $p^2 = 2q^2$: p^2 est pair. D'après l'exemple guidé par contraposée, p est pair : $p = 2k$, avec k entier.

Donc $4k^2 = 2q^2$, puis $q^2 = 2k^2$: q^2 est pair, donc q aussi, d'après le même exemple guidé.

Contradiction. p et q sont tous deux pairs : la fraction se simplifie par 2. Or elle était irréductible.

Conclusion. L'hypothèse est impossible : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Raisonnement par récurrence

Une file de dominos

En clair. Imagine une file de dominos. Si le premier tombe, et si chaque domino qui tombe renverse le suivant, alors tous tombent. Aucun n'échappe : le premier tombe, donc le deuxième, donc le troisième, et ainsi de suite.

Le raisonnement par récurrence suit ce schéma pour démontrer une propriété de tous les entiers, à partir d'un premier rang.

Devine : Une somme d'impairs

On calcule : $1 = 1, 1 + 3 = 4, 1 + 3 + 5 = 9$. Que vaut $1 + 3 + 5 + 7$?

A. 15
Faux.
Recompte : $9 + 7 = 16$.

B. 17
Faux.
Tu as ajouté 8 au lieu de 7 : le quatrième nombre impair est 7, et $9 + 7 = 16$.

C. 16
Juste.
Juste : $9 + 7 = 16 = 4^2$.

D. 25
Faux.
$25 = 5^2$ correspond à cinq termes : il faudrait ajouter 9.

Correction
$1 + 3 + 5 + 7 = 16$. Les résultats successifs sont $1, 4, 9, 16$: ce sont les carrés $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$.

On conjecture que $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ pour tout entier $n \geq 1$. Mais des essais ne prouvent rien : il faut un raisonnement qui vaut pour tous les entiers.

Le principe de récurrence

Théorème : Principe de récurrence

Soit n_0 un entier naturel et $P(n)$ une fonction propositionnelle définie pour tout entier naturel $n \geq n_0$. Si :

- $P(n_0)$ est vraie (**initialisation**) ;
- pour tout entier naturel $n \geq n_0$, l'implication $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ est vraie (**hérédité**) ;

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis. Il traduit une propriété de l'ensemble des entiers naturels : en partant de n_0 et en avançant de 1 en 1, on atteint chaque entier $n \geq n_0$.

Le vocabulaire. L'**initialisation** vérifie la propriété au premier rang : c'est le premier domino qui tombe. L'**hérédité** montre que, pour un entier n quelconque, $P(n)$ vraie entraîne $P(n+1)$ vraie.

Dans l'hérédité, la proposition $P(n)$ supposée vraie s'appelle l'**hypothèse de récurrence**. La conclusion cite le principe de récurrence.

Méthode : rédiger une récurrence

1. **Annoncer** la propriété $P(n)$ et son premier rang n_0.
2. **Initialisation** : calcule les deux membres pour $n = n_0$ et compare-les.
3. **Hérédité** : « Soit $n \geq n_0$ un entier ; supposons $P(n)$ vraie. Montrons $P(n+1)$. » Signale l'endroit où sert l'hypothèse de récurrence.
4. **Conclusion** : « D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$. »

Exemple : Exemple guidé : la somme des impairs

Propriété. Pour $n \geq 1$, notons $P(n)$: « $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$ ».

Initialisation. Pour $n = 1$, le membre de gauche vaut 1, et $1^2 = 1$: $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ un entier ; supposons $P(n)$ vraie. Le terme suivant est $2(n+1) - 1 = 2n + 1$. D'après l'hypothèse de récurrence, la somme des n premiers termes vaut n^2, donc :

$$\begin{aligned} &1 + 3 + \cdots + (2n-1) \\ &\quad + (2n+1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Une divisibilité ; un piège

Exemple : Exemple guidé : une divisibilité

Propriété. Pour $n \geq 0$, notons $P(n)$: « 4 divise $5^n - 1$ ».

Initialisation. $5^0 - 1 = 0 = 4 \times 0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 0$ un entier ; supposons $P(n)$ vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, $5^n - 1 = 4k$, avec k entier. Alors $5^n = 4k + 1$, et :

$$\begin{aligned} 5^{n+1} - 1 &= 5(4k+1) - 1 \\ &= 20k + 4 \\ &= 4(5k+1). \end{aligned}$$

Comme $5k+1$ est entier, 4 divise $5^{n+1}-1$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, 4 divise 5^n-1 pour tout entier naturel n.

Attention : une hérédité sans initialisation

✗ « Notons $Q(n)$ la propriété : 4 divise 5^n+1. Si $5^n+1=4k$, alors $5^{n+1}+1=5\times 4k-4=4(5k-1)$. Donc $Q(n)$ est vraie pour tout n. »

✓ Le calcul d'hérédité est juste, mais l'initialisation manque, et elle échoue : $5^0+1=2$ n'est pas divisible par 4. En réalité, $Q(n)$ n'est vraie pour aucun entier n. Sans premier domino, rien ne tombe.

Vérifie : Ce que l'on suppose

Dans l'hérédité, que suppose-t-on ?

A. Que $P(n)$ est vraie pour tous les entiers $n \geq n_0$.
Faux.
C'est ce qu'il faut démontrer : le supposer serait tourner en rond.

B. Que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq n_0$ fixé.
Juste.
Juste : c'est l'hypothèse de récurrence.

C. Que $P(n+1)$ est vraie pour un entier $n \geq n_0$.
Faux.
C'est la conclusion de l'hérédité, pas son hypothèse.

D. Que $P(n_0)$ est fausse, pour aboutir à une contradiction.
Faux.
Ce serait un raisonnement par l'absurde, pas une hérédité.

Correction
On fixe un entier $n \geq n_0$, et l'on suppose $P(n)$ vraie pour **cet** entier : c'est l'hypothèse de récurrence. On en déduit $P(n+1)$. Supposer $P(n)$ pour tous les entiers reviendrait à supposer le résultat.

À toi, le coin devoir

À toi : Une inégalité

Montre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2^n \geq n+1$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Initialisation : calcule 2^0 et $0+1$.

Indice 2

Hérédité : $2^{n+1} = 2 \times 2^n$; utilise l'hypothèse de récurrence $2^n \geq n+1$.

Indice 3

Point délicat : tu obtiens $2^{n+1} \geq 2n+2$; compare $2n+2$ à $n+2$ pour conclure.

Réponse

Notons $P(n)$: « $2^n \geq n+1$ ».

Initialisation. $2^0 = 1$ et $0+1 = 1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 0$ un entier ; supposons $P(n)$ vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, $2^n \geq n+1$; on multiplie par 2, qui est positif :

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \times 2^n \\ &\geq 2(n+1) \\ &= 2n+2. \end{aligned}$$

Or $2n+2 \geq n+2$, car $n \geq 0$. Donc $2^{n+1} \geq (n+1)+1$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $2^n \geq n+1$ pour tout entier naturel n.

Remarque : Coin devoir : une récurrence rédigée

En devoir, une récurrence se lit en trois parties titrées : « Initialisation », « Hérédité », « Conclusion ». Dans l'hérédité, signale où tu utilises l'hypothèse : « d'après l'hypothèse de récurrence ». Termine par : « D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n \geq n_0$. » Ce schéma te resservira jusqu'à l'examen de 2BAC SE.

Choisir son raisonnement

À retenir : quel raisonnement pour quel énoncé

- « Si P, alors Q » : raisonnement direct, ou par contraposée quand $\overline{Q}$ est plus facile à exploiter.
- « P équivaut à Q » : équivalences successives, ou double implication.
- « Pour tout x » à réfuter : un contre-exemple, vérifié par le calcul.
- Une propriété qui dépend de la parité, du signe ou d'une valeur absolue : disjonction des cas.
- Une impossibilité, une non-existence, un nombre non rationnel : raisonnement par l'absurde.
- « Pour tout entier $n \geq n_0$ » : récurrence, en trois parties titrées.

Le mot du prof. Tu sais maintenant lire une proposition, la nier et choisir un raisonnement adapté. Surtout, tu sais l'écrire : annoncer, poser les objets, justifier chaque pas, conclure. Ces habitudes te serviront dans tous les chapitres de l'année.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Notions de logique » (1bac · sciences-experimentales · mathematiques)