BURHAN

Résumé : Limite d'une fonction numérique

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/limite-d-une-fonction/resume

Chapitre	Semestre
Limite d'une fonction numérique	Semestre 2

Limite finie en un point

Définition : Limite finie en un point

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a, sauf peut-être en a. Soit ℓ un réel.

- On dit que f admet pour **limite** ℓ en a, ou que $f(x)$ **tend vers** ℓ quand x tend vers a, si $f(x)$ devient aussi proche de ℓ que l'on veut dès que x, distinct de a, est assez proche de a.
- On écrit $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.
- La valeur $f(a)$, lorsqu'elle existe, n'intervient pas : seuls comptent les réels $x \neq a$ proches de a.

Propriété : Limites de référence en un point

Pour tout réel a, tout réel c, tout réel b et tout entier naturel non nul n :

- $\lim_{x \to a} c = c$ et $\lim_{x \to a} x^n = a^n$;
- si $a > 0$, alors $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$;
- $\lim_{x \to a} \sin(bx) = \sin(ab)$ et $\lim_{x \to a} \cos(bx) = \cos(ab)$.

Méthode : conjecturer, puis justifier

1. **Calcule** $f(x)$ pour des réels de plus en plus proches de l'endroit étudié, des deux côtés si besoin.
2. **Observe** où vont les valeurs : vers un réel, vers de grandes valeurs positives ou vers de grandes valeurs négatives.
3. **Annonce** une conjecture : un tableau ne prouve rien.
4. **Justifie** ensuite par le calcul, en nommant chaque règle employée.

Exemple

Énoncé. Que devient $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ quand x se rapproche de 1 ?

Tableau. Valeurs arrondies à 10^{-4} :

x	0,99	0,999	1,001	1,01
valeur	1,4925	1,4993	1,5008	1,5075

Conjecture. La limite en 1 semble valoir $\dfrac{3}{2}$.

Justification. Pour tout réel x, $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ et $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Pour $x\neq 1$ et $x\neq -1$, on simplifie par $x-1$:

$$\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{x^2+x+1}{x+1}.$$

Ce quotient simplifié est une fonction rationnelle. En 1, son dénominateur vaut $2\neq 0$: d'après la limite d'une fonction rationnelle en un point, il tend vers $\dfrac{3}{2}$.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x\to 4}\left(x^2-3\sqrt{x}\right)$.

Morceaux. D'après les limites de référence en un point, x^2 tend vers 16 et $\sqrt{x}$ vers 2, car $4>0$.

Règles. D'après la limite d'un produit par un réel, $3\sqrt{x}$ tend vers 6. D'après la limite d'une somme, la limite cherchée vaut $16-6=10$.

Limite infinie ; limites à droite et à gauche

Définition : Limite infinie en un point

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a, sauf peut-être en a.

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si $f(x)$ devient plus grand que n'importe quel réel fixé à l'avance dès que x, distinct de a, est assez proche de a. On écrit $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a si $f(x)$ devient plus petit que n'importe quel réel fixé à l'avance dès que x, distinct de a, est assez proche de a. On écrit $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Définition : Limite à droite, limite à gauche

Soit a un réel et h un réel strictement positif.

- Si f est définie sur $]a,a+h[$ et si $f(x)$ tend vers ℓ (un réel, $+\infty$ ou $-\infty$) quand x tend vers a en restant **strictement supérieur** à a, on dit que ℓ est la **limite à droite** de f en a. On écrit $\lim_{x\to a^+} f(x)=\ell$.
- Si f est définie sur $]a-h,a[$ et si $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a en restant **strictement inférieur** à a, on dit que ℓ est la **limite à gauche** de f en a. On écrit $\lim_{x\to a^-} f(x)=\ell$.

Propriété : Limite et limites à droite et à gauche

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a, sauf peut-être en a. Soit ℓ un réel, $+\infty$ ou $-\infty$. Alors $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ si et seulement si f admet une limite à droite et une limite à gauche en a, toutes deux égales à ℓ.

Propriété : Limites de référence à droite et à gauche de 0

Pour tout entier naturel non nul n :

- $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$;
- $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$;
- si n est pair, $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$, donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$;
- si n est impair, $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$. En particulier, $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x\to -1} \dfrac{-3}{(x+1)^2}$.

Dénominateur. Pour $x \neq -1$, $(x+1)^2 > 0$. Comme $(x+1)^2$ tend vers 0, il tend vers 0^+, à droite comme à gauche.

Conclusion. D'après la limite d'un quotient, avec un numérateur égal à $-3 < 0$, la limite vaut $-\infty$ des deux côtés. Les deux limites coïncident :

$$\lim_{x\to -1} \frac{-3}{(x+1)^2} = -\infty.$$

Attention : Le signe du dénominateur décide

Pour $\dfrac{2}{x+3}$ en -3, le numérateur vaut 2 et le dénominateur tend vers 0.

À droite de -3, $x+3 > 0$: la limite vaut $+\infty$. À gauche, $x+3 < 0$: elle vaut $-\infty$.

Les deux côtés diffèrent : pas de limite en -3.

Limites en +∞ et en −∞

Définition : Limites en +∞ et en −∞

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[c, +\infty[$, où c est un réel, et ℓ un réel.

- On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ si $f(x)$ devient aussi proche de ℓ que l'on veut dès que x est assez grand. On écrit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand x tend vers $+\infty$ si $f(x)$ devient plus grand (respectivement plus petit) que n'importe quel réel fixé à l'avance dès que x est assez grand.

Pour une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, c]$, on définit de même la limite en $-\infty$, en remplaçant « x assez grand » par « x négatif et de valeur absolue assez grande ».

Propriété : Limites de référence en +∞ et en −∞

Pour tout réel c et tout entier naturel non nul n :

- $\lim_{x\to+\infty} c = c$ et $\lim_{x\to-\infty} c = c$;
- $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n est pair, et $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ si n est impair ;
- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$;
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Exemple

En $+\infty$. D'après les limites de référence, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers 0. D'après la limite d'un produit par un réel, puis d'une somme :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(4 - \frac{3}{\sqrt{x}}\right) = 4.$$

En $-\infty$. L'exposant 3 est impair : x^3 tend vers $-\infty$. D'après la limite d'une somme :

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x^3 - 7\right) = -\infty.$$

Opérations ; formes indéterminées

Propriété : Limite d'une somme et d'un produit

Soit f et g deux fonctions qui ont une limite en a, où a désigne l'endroit où l'on cherche la limite : un réel, la droite ou la gauche d'un réel (a^+ ou a^-), $+\infty$ ou $-\infty$. Soit ℓ et ℓ' deux réels.

- **Somme.** Si f et g tendent vers ℓ et ℓ', alors $f+g$ tend vers $\ell+\ell'$. Si f tend vers ℓ ou vers $+\infty$, et g vers $+\infty$, alors $f+g$ tend vers $+\infty$; de même avec $-\infty$. Si f tend vers $+\infty$ et g vers $-\infty$: **forme indéterminée**.
- **Produit.** Si f et g tendent vers ℓ et ℓ', alors $f\times g$ tend vers $\ell\ell'$. Si f tend vers $\ell \neq 0$, vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, et g vers $+\infty$ ou $-\infty$, alors $f\times g$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, selon la règle des signes. Si f tend vers 0 et g vers $+\infty$ ou $-\infty$: **forme indéterminée**.
- En particulier, pour tout réel k : si f tend vers ℓ, alors kf tend vers $k\ell$; si $k\neq 0$ et si f tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, alors kf tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, selon la règle des signes.

Propriété : Limite d'un quotient

Soit f et g deux fonctions qui ont une limite en a, où a désigne l'endroit où l'on cherche la limite : un réel, la droite ou la gauche d'un réel (a^+ ou a^-), $+\infty$ ou $-\infty$, avec $g(x) \neq 0$. Soit ℓ et ℓ' deux réels.

- Si f tend vers ℓ et g vers $\ell' \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ tend vers $\frac{\ell}{\ell'}$.
- Si f tend vers ℓ et g vers $+\infty$ ou $-\infty$, alors $\frac{f}{g}$ tend vers 0.
- Si f tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, et g vers $\ell' \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, selon la règle des signes.
- Si f tend vers $\ell \neq 0$, vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, et g vers 0 en gardant un signe constant, alors $\frac{f}{g}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, selon la règle des signes. On note 0^+ une limite nulle atteinte par valeurs strictement positives, 0^- par valeurs strictement négatives.
- Si f et g tendent vers 0, ou si f et g tendent toutes deux vers $+\infty$ ou $-\infty$: **forme indéterminée**.

À retenir : Tableau des opérations

Calcul	Limite connue	Forme indéterminée
$f+g$	$\ell+\ell'$; $+\infty$ si $g \to +\infty$ et $f \to \ell$ ou $+\infty$; de même avec $-\infty$	« $+\infty-\infty$ »
$f \times g$	$\ell\ell'$; un infini dès qu'un facteur est infini et l'autre ne tend pas vers 0	« $0 \times (+\infty)$ »
$\frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$ si $\ell' \neq 0$; 0 si g devient infinie et $f \to \ell$; un infini si $g \to 0^+$ ou 0^- et $f \to \ell \neq 0$	« $\frac{0}{0}$ », « $\frac{+\infty}{+\infty}$ »

Le signe d'un résultat infini suit la règle des signes.

Méthode : calculer par les opérations

1. **Découpe** l'expression en morceaux dont tu connais la limite.
2. **Écris** la limite de chaque morceau.
3. **Nomme** la règle : limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient.
4. **Face à une forme indéterminée**, transforme d'abord l'écriture, puis recommence.

Attention : Une forme indéterminée se transforme

En $+\infty$, $\frac{3}{x} \times x^2$ et $\frac{3}{x^2} \times x$ sont toutes deux de la forme « $0 \times (+\infty)$ ».

Pourtant, pour $x \neq 0$, la première vaut $3x$ et tend vers $+\infty$. La seconde vaut $\frac{3}{x}$ et tend vers 0.

Une forme indéterminée ne donne aucun résultat : il faut transformer.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x-2}{\sqrt{x}}$.

Morceaux. D'après la limite d'une somme, le numérateur tend vers -2. D'après les limites de référence à droite de 0, $\sqrt{x}$ tend vers 0 en restant strictement positif : il tend vers 0^+.

Conclusion. D'après la limite d'un quotient et la règle des signes, la limite vaut $-\infty$.

Polynômes et fonctions rationnelles

Propriété : Polynômes et fonctions rationnelles en un point

Soit a un réel.

- Si P est un polynôme, alors $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$.
- Si P et Q sont deux polynômes et si $Q(a) \neq 0$, alors $\lim_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$.

Propriété : Limite d'un polynôme en +∞ et en −∞

Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$, défini pour tout réel x par :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

avec $a_n \neq 0$. Alors, en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n.$$

De même, en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n.$$

En $+\infty$ et en $-\infty$, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré.

Propriété : Limite d'une fonction rationnelle en +∞ et en −∞

Soit P et Q deux polynômes non nuls, de termes de plus haut degré $a_n x^n$ et $b_m x^m$, avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. Alors, en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

De même, en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

En $+\infty$ et en $-\infty$, une fonction rationnelle a la même limite que le quotient des termes de plus haut degré.

Méthode : lever une forme 0/0 de polynômes

1. **Remplace** x par a : si le numérateur et le dénominateur valent 0, c'est la forme « $\frac{0}{0}$ ».
2. **Factorise** chacun par $x-a$, puisque a en est une racine.
3. **Simplifie** par $x-a$: c'est permis, car $x \neq a$.
4. **Calcule** la limite du quotient simplifié.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x\to-2}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+2x}$.

Forme. En -2, le numérateur vaut $4-10+6=0$ et le dénominateur $4-4=0$: forme « $\frac{0}{0}$ ».

Factorisation. Pour tout réel x :

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3),$$
$$x^2+2x=x(x+2).$$

Pour $x\neq-2$ et $x\neq0$, le quotient vaut $\dfrac{x+3}{x}$.

Conclusion. En -2, le dénominateur x vaut $-2\neq0$. D'après la limite d'une fonction rationnelle en un point :

$$\lim_{x\to-2}\frac{x+3}{x}=-\frac{1}{2}.$$

Méthode : un réel non nul sur 0

1. **Contrôle** les deux limites : un réel non nul en haut, 0 en bas.
2. **Dresse** le signe du dénominateur juste à droite et juste à gauche de a.
3. **Applique** la règle des signes de la limite d'un quotient, de chaque côté.
4. **Compare** : deux limites différentes signifient qu'il n'y a pas de limite en a.

Exemple

Énoncé. Étudie $\dfrac{x+2}{x^2-4x+3}$ en 1.

Morceaux. Le numérateur tend vers 3. Le dénominateur s'écrit $(x-1)(x-3)$ et tend vers 0.

Signe. Pour $1 < x < 3$, le dénominateur est strictement négatif ; pour $x < 1$, il est strictement positif.

Conclusion. D'après la limite d'un quotient, la limite vaut $-\infty$ à droite de 1 et $+\infty$ à gauche. La fonction n'a pas de limite en 1.

Méthode : polynôme ou fraction à l'infini

1. **Repère**, dans chaque polynôme, son terme de plus haut degré.
2. **Garde** seulement ce terme, ou le quotient de ces termes, en citant la règle du terme de plus haut degré.
3. **Simplifie** le quotient obtenu.
4. **Conclus** avec les limites de référence en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Exemple

Fraction. D'après la règle du terme de plus haut degré :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^3-x}{2x^3+5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x^3}{2x^3} = 3.$$

Polynôme. De même, l'exposant 3 étant impair :

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x^3-6x^2\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$$

Attention : Plus haut degré : seulement à l'infini

En 0, pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$, le quotient $\dfrac{2x+x^3}{x+x^2}$ se simplifie par x : il vaut $\dfrac{2+x^2}{1+x}$ et tend vers 2.

Le quotient des termes de plus haut degré, $\dfrac{x^3}{x^2} = x$, tend vers 0 : il donnerait un résultat faux.

Cette règle ne sert qu'en $+\infty$ et en $-\infty$.

Racine carrée ; quantité conjuguée

Propriété : Limite de la racine carrée d'une fonction

Soit f une fonction positive ou nulle là où on l'étudie, qui a une limite en a, où a désigne l'endroit où l'on cherche la limite : un réel, la droite ou la gauche d'un réel (a^+ ou a^-), $+\infty$ ou $-\infty$.

- Si f tend vers un réel ℓ positif ou nul, alors $\sqrt{f}$ tend vers $\sqrt{\ell}$.
- Si f tend vers $+\infty$, alors $\sqrt{f}$ tend vers $+\infty$.

Méthode : la quantité conjuguée

1. **Repère** une forme indéterminée où figure une différence avec une racine carrée.
2. **Multiplie** en haut et en bas par l'expression conjuguée, où le signe moins devient plus.
3. **Développe** avec $(\sqrt{A}-B)(\sqrt{A}+B)=A-B^2$, pour $A\geq 0$.
4. **Simplifie**, puis reprends le calcul par les opérations.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2+7}$.

Calcul. D'après la limite d'un polynôme en un point, x^2+7 tend vers 16, et $16\geq 0$. D'après la limite de la racine carrée d'une fonction :

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2+7}=\sqrt{16}=4.$$

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}\right)$, de la forme « $+\infty-\infty$ ».

Conjuguée. Pour $x>0$:

$$\begin{aligned}&\sqrt{x+4}-\sqrt{x}\\&=\frac{(x+4)-x}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}\\&=\frac{4}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Conclusion. D'après la limite d'un polynôme en $+\infty$ et la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{x+4}$ et $\sqrt{x}$ tendent vers $+\infty$. D'après la limite d'une somme, le dénominateur aussi. D'après la limite d'un quotient, la limite vaut 0.

Limites trigonométriques en 0

Propriété : Limite de sin x / x en 0

Le réel x étant mesuré en radians :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Plus généralement, pour tout réel a non nul :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a.$$

Propriété : Limite de tan x / x en 0

Le réel x étant mesuré en radians :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

Plus généralement, pour tout réel a non nul :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(ax)}{x} = a.$$

Propriété : Limite de (1 – cos x) / x² en 0

Le réel x étant mesuré en radians :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Méthode : faire apparaître une limite usuelle

1. **Vérifie** que la limite est cherchée en 0, avec x en radians.
2. **Écris** l'expression avec des facteurs $\frac{\sin(ax)}{x}$, $\frac{\tan(ax)}{x}$ ou $\frac{1 - \cos x}{x^2}$, en multipliant et en divisant par la même puissance de x.
3. **Cite** la limite usuelle de chaque facteur.
4. **Termine** par la limite d'un produit ou d'un quotient.

Exemple

Sinus. Pour $x \neq 0$:

$$\frac{\sin(6x)}{5x} = \frac{1}{5} \times \frac{\sin(6x)}{x}.$$

D'après la limite usuelle de $\frac{\sin(ax)}{x}$ en 0, le second facteur tend vers 6. Multiplié par le réel $\frac{1}{5}$, il donne la limite $\frac{6}{5}$, d'après la limite d'un produit par un réel.

Tangente. Pour $0 < |x| < \frac{\pi}{18}$, $\tan(9x)$ existe et n'est pas nul, et :

$$\frac{4x}{\tan(9x)} = \frac{4}{\frac{\tan(9x)}{x}}.$$

Le dénominateur tend vers 9 : d'après la limite d'un quotient, la limite en 0 vaut $\frac{4}{9}$.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\tan x}{1-\cos x}$, de la forme « $\dfrac{0}{0}$ ».

Facteurs. Pour $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$, $\tan x$ existe et $1-\cos x \neq 0$. On divise le haut et le bas par x^2 :

$$\frac{x\tan x}{1-\cos x} = \frac{\frac{\tan x}{x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}.$$

Conclusion. D'après les limites usuelles, le haut tend vers 1 et le bas vers $\dfrac{1}{2}$. D'après la limite d'un quotient, la limite vaut 2.

Attention : Une limite usuelle a son endroit

La limite usuelle de $\dfrac{\sin x}{x}$ vaut 1 en 0 seulement.

En $\dfrac{\pi}{2}$, le sinus tend vers 1 et x vers $\dfrac{\pi}{2}$. D'après la limite d'un quotient, $\dfrac{\sin x}{x}$ y tend vers $\dfrac{2}{\pi}$, qui n'est pas 1.

Encadrement et comparaison

Propriété : Limites et ordre : encadrement et comparaison

Soit f, u et v trois fonctions ; a désigne l'endroit où l'on cherche la limite : un réel, la droite ou la gauche d'un réel (a^+ ou a^-), $+\infty$ ou $-\infty$. Les inégalités ci-dessous sont supposées vraies pour tout x assez proche de a (ou assez grand en valeur absolue, en $+\infty$ ou en $-\infty$). Soit ℓ un réel.

- **Encadrement.** Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si u et v tendent toutes deux vers ℓ, alors f tend vers ℓ.
- Si $|f(x)-\ell| \leq u(x)$ et si u tend vers 0, alors f tend vers ℓ.
- **Comparaison.** Si $f(x) \geq u(x)$ et si u tend vers $+\infty$, alors f tend vers $+\infty$. Si $f(x) \leq v(x)$ et si v tend vers $-\infty$, alors f tend vers $-\infty$.

Méthode : encadrer ou comparer

1. **Pars** de $-1 \leq \sin x \leq 1$ ou de $-1 \leq \cos x \leq 1$.
2. **Transforme** pas à pas ; diviser par un nombre négatif retourne les inégalités.
3. **Contrôle** que les deux bornes ont la même limite réelle, ou que la minoration tend vers $+\infty$.
4. **Conclus** en nommant l'encadrement ou la comparaison.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x+\sin x}{x}$.

Encadrement. Pour tout réel x, $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $3x - 1 \leq 3x + \sin x \leq 3x + 1$. Pour $x > 0$, on divise par x :

$$3 - \frac{1}{x} \leq \frac{3x + \sin x}{x} \leq 3 + \frac{1}{x}.$$

Conclusion. D'après les limites de référence, $\frac{1}{x}$ tend vers 0 ; d'après la limite d'une somme, les deux bornes tendent vers 3. Par encadrement, la limite vaut 3.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2 + \sin x}$.

Minoration. Pour tout réel x, $0 < 2 + \sin x \leq 3$. Donc, pour tout réel x :

$$\frac{x^2}{2 + \sin x} \geq \frac{x^2}{3}.$$

Conclusion. D'après les limites de référence, x^2 tend vers $+\infty$; d'après la limite d'un produit par le réel $\frac{1}{3} > 0$, $\frac{x^2}{3}$ aussi. Par comparaison, la limite vaut $+\infty$.

Attention **: Deux bornes, une même limite**

Savoir que $x - 1 \leq g(x) \leq x + 1$ près de 0 ne dit rien de la limite de g en 0 : les bornes tendent vers -1 et vers 1.

Si l'on sait en outre que $1 - x^2 \leq g(x) \leq 1 + x^2$ près de 0, les deux bornes tendent vers 1. Par encadrement, g tend vers 1.

Quelle méthode pour quelle forme ?

Méthode **: Quelle méthode pour quelle forme ?**

- **Aucune forme indéterminée** : remplacer, en nommant l'opération.
- **« Réel non nul sur 0 »** : signe du dénominateur, à droite et à gauche.
- **Limites latérales différentes** : pas de limite en ce réel.
- **« $\frac{0}{0}$ » avec des polynômes** : factoriser par $x - a$, puis simplifier.
- **« $+\infty - \infty$ » ou « $0 \times (+\infty)$ » sans racine** : factoriser, par exemple par le terme dominant.
- **Racine carrée dans une forme indéterminée** : quantité conjuguée.
- **Polynôme ou fraction à l'infini** : règle du terme de plus haut degré.
- **« $\frac{0}{0}$ » en 0 avec $\sin$, $\tan$ ou $1 - \cos x$** : limites usuelles.
- **Sinus ou cosinus face à une quantité qui grandit** : encadrement ou comparaison.

- **Doute** : un tableau de valeurs à la calculatrice.

Inverse à droite de 0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Inverse à gauche de 0

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Inverse à l'infini

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Puissance paire en −∞

$$\lim_{x\to -\infty} x^n = +\infty \ (n \text{ pair})$$

Puissance impaire en −∞

$$\lim_{x\to -\infty} x^n = -\infty \ (n \text{ impair})$$

Racine carrée

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0, \quad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Polynôme à l'infini

$$\lim_{x\to \pm\infty} P(x) = \lim_{x\to \pm\infty} a_n x^n$$

Sinus en 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$$

Tangente en 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(ax)}{x} = a$$

Cosinus en 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Quantité conjuguée

$$(\sqrt{A}-B)(\sqrt{A}+B) = A - B^2 \quad (A \geq 0)$$

Fonctions bornées

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

À retenir : Rédiger en devoir

- Écris chaque limite avec l'endroit étudié : $\lim_{x\to a}$, jamais « lim » seul.
- Nomme la règle à chaque calcul.
- Écris une forme indéterminée entre guillemets, puis transforme l'expression.
- Pour un dénominateur qui tend vers 0, étudie son signe des deux côtés.