BURHAN

Limite d'une fonction numérique : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/limite-d-une-fonction/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Limite d'une fonction numérique	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Une fonction rationnelle sous tous les angles

Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. 0,75 pts

À la calculatrice, donner $f(0{,}99)$, $f(0{,}999)$, $f(1{,}001)$ et $f(1{,}01)$, arrondis à 10^{-4}. Quelle limite de f en 1 peut-on conjecturer ?

INDICE

Début : calcule chaque valeur avec l'expression de départ. **Ensuite :** regarde vers quel réel se rapprochent les valeurs, des deux côtés de 1.

2. 1 pts

Vérifier que, pour tout réel x, $2x^2 - 3x + 1 = (x - 1)(2x - 1)$. En déduire une écriture simplifiée de $f(x)$ sur D_f, puis la limite de f en 1.

INDICE

Début : développe $(x - 1)(2x - 1)$. **Ensuite :** factorise aussi $x^2 - 1$ et simplifie par $x - 1$, non nul sur D_f.

3. 1,25 pts

Calculer $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \to -1^-} f(x)$. La fonction f a-t-elle une limite en -1 ?

INDICE

Début : utilise l'écriture simplifiée ; le numérateur tend vers un réel non nul. **Ensuite :** étudie le signe de $x + 1$ de chaque côté de -1.

4. 1 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

INDICE

Début : quelle méthode de la fiche convient à une fraction rationnelle en $+\infty$ et en $-\infty$?

5. 1 pts

Vérifier que, pour tout $x \in D_f$:

$$f(x) - 2 = -\frac{3}{x + 1}.$$

En déduire, selon le signe de $x + 1$, la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = 2$.

INDICE

Début : pars de l'écriture simplifiée de la question 2.

Exercice 2 5 pts

Tangente, sinus et encadrement

Dans tout l'exercice, x est mesuré en radians.

- Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x \neq 0$, on pose $f(x) = \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.
- Pour $x > -1$, on pose $g(x) = \dfrac{2x + \sin x}{x + 1}$.

1. 1 pts

Vérifier que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\tan x - \sin x = \tan x\,(1 - \cos x).$$

INDICE

Début : écris $\sin x = \tan x \times \cos x$, valable car $\cos x \neq 0$ sur cet intervalle. **Ensuite :** mets $\tan x$ en facteur.

2. 1,25 pts

En déduire $\lim_{x \to 0} f(x)$.

INDICE

Début : écris $x^3 = x \times x^2$ et sépare $f(x)$ en un produit de deux quotients. **Ensuite :** cite les deux limites usuelles en 0.

3. 0,75 pts

En déduire $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^2}$.

INDICE

Début : compare ce quotient à $f(x)$: il vaut $x \times f(x)$.

4. 1 pts

Justifier que, pour tout $x > -1$:

$$\frac{2x - 1}{x + 1} \leq g(x) \leq \frac{2x + 1}{x + 1}.$$

INDICE

Début : pars de $-1 \leq \sin x \leq 1$ et ajoute $2x$. **Ensuite :** divise par $x + 1$, dont tu donneras le signe.

5. 1 pts

En déduire $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

INDICE

Début : sers-toi de l'encadrement de la question 4.

Exercice 3 — 5 pts

Une racine au numérateur

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 4}.$$

1. — 1 pts

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

INDICE

Début : la racine exige $x + 7 \geq 0$. **Ensuite :** le dénominateur ne doit pas s'annuler.

2. — 1,25 pts

Vérifier que, pour tout $x \in D_f$:

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{x+7} + 3\right)}.$$

INDICE

Début : quelle méthode de la fiche s'applique à une différence qui contient une racine carrée ?

3. — 0,75 pts

Quelle forme obtient-on en remplaçant x par 2 dans l'écriture de départ ? En déduire $\lim_{x \to 2} f(x)$.

INDICE

Début : calcule $\sqrt{9} - 3$ et $2^2 - 4$. **Ensuite :** utilise l'écriture de la question 2.

4. — 1,25 pts

Calculer $\lim_{x \to -2^+} f(x)$ et $\lim_{x \to -2^-} f(x)$.

INDICE

Début : dans l'écriture de la question 2, le facteur $\sqrt{x+7} + 3$ tend vers un réel strictement positif.
Ensuite : étudie le signe de $x + 2$ de chaque côté de -2.

5. — 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Début : choisis l'écriture de $f(x)$ la plus commode.

Exercice 4 5 pts

Minorer des deux côtés, puis mesurer un écart

Dans tout l'exercice, x est mesuré en radians.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x\sin x.$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par :

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2}.$$

1. 1 pts

Justifier que, pour tout $x > 0$, $f(x) \geq x^2 - 2x$.

INDICE

Début : pars de $\sin x \leq 1$. **Ensuite :** multiplie par $2x$, dont tu donneras le signe, puis multiplie par -1, ce qui change le sens de l'inégalité.

2. 0,75 pts

En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Début : le terme $-2x\sin x$ n'a pas de limite connue ; cherche plutôt la limite de $x^2 - 2x$ en $+\infty$. **Ensuite :** nomme la propriété qui conclut à partir d'une minoration.

3. 1,25 pts

Justifier que, pour tout $x < 0$, $f(x) \geq x^2 + 2x$. En déduire $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

INDICE

Début : pour $x < 0$, le réel $-2x$ est strictement positif ; pars cette fois de $\sin x \geq -1$. **Ensuite :** procède comme aux questions 1 et 2.

4. 1 pts

Vérifier que, pour tout $x \neq 0$:

$$g(x) = 1 - 2 \times \frac{\sin x}{x}.$$

En déduire $\lim_{x \to 0} g(x)$.

INDICE

Début : divise chacun des deux termes de $f(x)$ par x^2. **Ensuite :** reconnais une limite usuelle en 0.

5. 1 pts

Justifier que, pour tout $x \neq 0$:

$$|g(x) - 1| \leq \frac{2}{|x|}.$$

En déduire $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} g(x)$, puis retrouver les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ à partir de l'égalité $f(x) = x^2 g(x)$.

INDICE

Début : pour tout réel x, $|\sin x| \leq 1$. **Ensuite :** la limite usuelle de $\dfrac{\sin x}{x}$ ne vaut qu'en 0 ; à l'infini, sers-toi de l'inégalité.

Exercice 5 5 pts

Sinus, tangente et limites latérales

Dans tout l'exercice, x est mesuré en radians. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{x^2 + x}.$$

1. 1 pts

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f, puis vérifier que, pour tout $x \in D_f$:

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} \times \frac{1}{x+1}.$$

INDICE

Début : factorise $x^2 + x$. **Ensuite :** sépare le quotient en un produit de deux quotients.

2. 0,75 pts

En déduire $\lim_{x \to 0} f(x)$.

INDICE

Début : cite la limite usuelle de $\frac{\sin(ax)}{x}$ en 0, avec $a = 2$.

3. 1,25 pts

Calculer $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \to -1^-} f(x)$. La fonction f a-t-elle une limite en -1 ?

INDICE

Début : le numérateur tend vers $\sin(-2) = -\sin 2$; justifie que $\sin 2 > 0$ à l'aide de $0 < 2 < \pi$. **Ensuite :** étudie le signe de $x(x+1)$ de chaque côté de -1.

4. 1 pts

Soit g la fonction définie sur D_f par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Calculer $\lim_{x \to 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \to 0^-} g(x)$. La fonction g a-t-elle une limite en 0 ?

INDICE

Début : écris $g(x) = f(x) \times \frac{1}{x}$. **Ensuite :** utilise la question 2 et les limites de référence de $\frac{1}{x}$ à droite et à gauche de 0.

5. 1 pts

Pour $0 < |x| < \frac{\pi}{6}$, vérifier que $xf(x) = \frac{\sin(2x)}{x+1}$. En déduire $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(3x)}{xf(x)}$.

INDICE

Début : simplifie $xf(x)$ par x. **Ensuite :** divise le numérateur et le dénominateur du quotient par x pour faire apparaître $\frac{\tan(3x)}{x}$ et $\frac{\sin(2x)}{x}$.