BURHAN

Limite d'une fonction numérique : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/limite-d-une-fonction/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Limite d'une fonction numérique	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Une fonction rationnelle sous tous les angles

Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. 0,75 pts

À la calculatrice, donner $f(0{,}99)$, $f(0{,}999)$, $f(1{,}001)$ et $f(1{,}01)$, arrondis à 10^{-4}. Quelle limite de f en 1 peut-on conjecturer ?

INDICE

Début : calcule chaque valeur avec l'expression de départ. **Ensuite :** regarde vers quel réel se rapprochent les valeurs, des deux côtés de 1.

CORRIGÉ

Valeurs. À la calculatrice, en arrondissant à 10^{-4} :

- $f(0{,}99) \approx 0{,}4925$ et $f(0{,}999) \approx 0{,}4992$;
- $f(1{,}001) \approx 0{,}5007$ et $f(1{,}01) \approx 0{,}5075$.

Conclusion. Des deux côtés de 1, les valeurs se rapprochent de $0{,}5$. On conjecture que :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}.$$

2. 1 pts

Vérifier que, pour tout réel x, $2x^2 - 3x + 1 = (x-1)(2x-1)$. En déduire une écriture simplifiée de $f(x)$ sur D_f, puis la limite de f en 1.

INDICE

Début : développe $(x-1)(2x-1)$. **Ensuite :** factorise aussi $x^2 - 1$ et simplifie par $x - 1$, non nul sur D_f.

CORRIGÉ

Développement. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x-1)(2x-1)\\&= 2x^2 - 2x - x + 1\\&= 2x^2 - 3x + 1.\end{aligned}$$

Simplification. De plus, $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Pour $x \in D_f$, le facteur $x - 1$ n'est pas nul ; on simplifie par $x - 1$:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}.$$

Limite en 1. En 1, $x + 1$ vaut $2 \neq 0$: la limite d'une fonction rationnelle en un point s'applique :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion. Pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$, et la limite de f en 1 vaut $\dfrac{1}{2}$: la conjecture est confirmée.

3. 1,25 pts

Calculer $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \to -1^-} f(x)$. La fonction f a-t-elle une limite en -1 ?

INDICE

Début : utilise l'écriture simplifiée ; le numérateur tend vers un réel non nul. **Ensuite :** étudie le signe de $x + 1$ de chaque côté de -1.

CORRIGÉ

Numérateur et dénominateur. On utilise l'écriture simplifiée. Quand x tend vers -1, $2x - 1$ tend vers -3, réel non nul, et $x + 1$ tend vers 0 : il est strictement positif pour $x > -1$ et strictement négatif pour $x < -1$.

Limites latérales. D'après la règle des signes de la limite d'un quotient, avec $-3 < 0$:
$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$.

Conclusion. Les limites à droite et à gauche en -1 sont différentes : f n'a pas de limite en -1.

4. 1 pts

Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

INDICE

Début : quelle méthode de la fiche convient à une fraction rationnelle en $+\infty$ et en $-\infty$?

CORRIGÉ

Règle. La fonction f est rationnelle. D'après la règle du terme de plus haut degré, en $+\infty$ comme en $-\infty$, $f(x)$ a la même limite que $\dfrac{2x^2}{x^2}$, égal à 2 pour $x \neq 0$.

Conclusion. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

5. 1 pts

Vérifier que, pour tout $x \in D_f$:

$$f(x) - 2 = -\frac{3}{x+1}.$$

En déduire, selon le signe de $x+1$, la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = 2$.

INDICE

Début : pars de l'écriture simplifiée de la question 2.

CORRIGÉ

Calcul. Soit $x \in D_f$. D'après l'écriture simplifiée de la question 2 :

$$\begin{aligned} f(x) - 2 &= \frac{2x - 1 - 2(x+1)}{x+1} \\ &= -\frac{3}{x+1}. \end{aligned}$$

Signe et position. La différence $f(x) - 2$ est du signe contraire de $x+1$.

- Pour $x \in D_f$ et $x > -1$: $x+1 > 0$, donc $f(x) - 2 < 0$. Ainsi, sur $]-1, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de la droite d'équation $y = 2$.
- Pour $x < -1$: $x+1 < 0$, donc $f(x) - 2 > 0$. Ainsi, sur $]-\infty, -1[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de cette droite.

Écart à l'infini. D'après la question 4 et la limite d'une somme, $f(x) - 2$ tend vers $2 - 2 = 0$ en $+\infty$.

Exercice 2 5 pts

Tangente, sinus et encadrement

Dans tout l'exercice, x est mesuré en radians.

- Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x \neq 0$, on pose $f(x) = \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.
- Pour $x > -1$, on pose $g(x) = \dfrac{2x + \sin x}{x + 1}$.

1. 1 pts

Vérifier que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\tan x - \sin x = \tan x\,(1 - \cos x).$$

INDICE

Début : écris $\sin x = \tan x \times \cos x$, valable car $\cos x \neq 0$ sur cet intervalle. **Ensuite :** mets $\tan x$ en facteur.

CORRIGÉ

Écriture de $\sin x$. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Alors $\cos x > 0$ et $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, d'où $\sin x = \tan x \cos x$.

Conclusion. On met $\tan x$ en facteur :

$$\begin{aligned} &\tan x - \sin x \\ &= \tan x - \tan x \cos x \\ &= \tan x\,(1 - \cos x). \end{aligned}$$

2. 1,25 pts

En déduire $\lim_{x \to 0} f(x)$.

INDICE

Début : écris $x^3 = x \times x^2$ et sépare $f(x)$ en un produit de deux quotients. **Ensuite :** cite les deux limites usuelles en 0.

CORRIGÉ

Écriture. Soit $x \neq 0$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. D'après la question 1, et en écrivant $x^3 = x \times x^2$:

$$f(x) = \frac{\tan x}{x} \times \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Facteurs. D'après les limites usuelles en 0, $\dfrac{\tan x}{x}$ tend vers 1 et $\dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$.

Conclusion. D'après la limite d'un produit :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

3. 0,75 pts

En déduire $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^2}$.

INDICE

Début : compare ce quotient à $f(x)$: il vaut $x \times f(x)$.

CORRIGÉ

Écriture. Pour $x \neq 0$ dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^2} = x \times f(x).$$

Conclusion. Quand x tend vers 0, le facteur x tend vers 0 et, d'après la question 2, $f(x)$ tend vers $\dfrac{1}{2}$. D'après la limite d'un produit :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2} = 0 \times \frac{1}{2} = 0.$$

4. 1 pts

Justifier que, pour tout $x > -1$:

$$\frac{2x-1}{x+1} \leq g(x) \leq \frac{2x+1}{x+1}.$$

INDICE

Début : pars de $-1 \leq \sin x \leq 1$ et ajoute $2x$. **Ensuite :** divise par $x+1$, dont tu donneras le signe.

CORRIGÉ

Numérateur. Soit $x > -1$. On part de $-1 \leq \sin x \leq 1$ et on ajoute $2x$:

$$2x - 1 \leq 2x + \sin x \leq 2x + 1.$$

Division. Comme $x > -1$, le réel $x+1$ est strictement positif : diviser par $x+1$ conserve le sens des inégalités.

Conclusion. Pour tout $x > -1$:

$$\frac{2x-1}{x+1} \leq g(x) \leq \frac{2x+1}{x+1}.$$

5. 1 pts

En déduire $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

INDICE

Début : sers-toi de l'encadrement de la question 4.

CORRIGÉ

Bornes. Les deux bornes de la question 4 sont des fonctions rationnelles. D'après la règle du terme de plus haut degré, chacune a en $+\infty$ la même limite que $\dfrac{2x}{x}$, égal à 2 pour $x \neq 0$.

Conclusion. Les deux bornes tendent vers le même réel 2. Par encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2.$$

Exercice 3 — 5 pts

Une racine au numérateur

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 4}.$$

1. — 1 pts

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

INDICE

Début : la racine exige $x + 7 \geq 0$. **Ensuite :** le dénominateur ne doit pas s'annuler.

CORRIGÉ

Conditions. Le réel $f(x)$ existe si et seulement si $x + 7 \geq 0$ et $x^2 - 4 \neq 0$. Or $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ s'annule en 2 et en -2 seulement : il faut $x \geq -7$, $x \neq -2$ et $x \neq 2$.

Conclusion. L'ensemble de définition de f est $D_f = [-7, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$.

2. — 1,25 pts

Vérifier que, pour tout $x \in D_f$:

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{x+7} + 3\right)}.$$

INDICE

Début : quelle méthode de la fiche s'applique à une différence qui contient une racine carrée ?

CORRIGÉ

Quantité conjuguée. Soit $x \in D_f$. On multiplie en haut et en bas par la quantité conjuguée $\sqrt{x+7} + 3$, strictement positive. Au numérateur :

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{x+7} - 3\right)\left(\sqrt{x+7} + 3\right) \\ &= (x+7) - 9 = x - 2. \end{aligned}$$

Simplification. Au dénominateur, $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Le facteur $x - 2$ figure au numérateur et au dénominateur ; sur D_f, il n'est pas nul, et on simplifie par $x - 2$.

Conclusion. Pour tout $x \in D_f$:

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{x+7} + 3\right)}.$$

3. 0,75 pts

Quelle forme obtient-on en remplaçant x par 2 dans l'écriture de départ ? En déduire $\lim_{x\to 2} f(x)$.

INDICE

Début : calcule $\sqrt{9}-3$ et 2^2-4. **Ensuite :** utilise l'écriture de la question 2.

CORRIGÉ

Forme. Dans l'écriture de départ, en 2 : $\sqrt{9}-3=0$ et $2^2-4=0$. C'est une forme « $\frac{0}{0}$ ».

Limite. On utilise l'écriture de la question 2. D'après la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{x+7}$ tend vers 3, donc $\sqrt{x+7}+3$ tend vers 6 ; de plus $x+2$ tend vers 4. D'après la limite d'un produit, puis d'un quotient :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} f(x) &= \frac{1}{4\times 6}\\ &= \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

Conclusion. Le remplacement donne la forme « $\frac{0}{0}$ », et la limite de f en 2 vaut $\frac{1}{24}$.

4. 1,25 pts

Calculer $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ et $\lim_{x\to -2^-} f(x)$.

INDICE

Début : dans l'écriture de la question 2, le facteur $\sqrt{x+7}+3$ tend vers un réel strictement positif. **Ensuite :** étudie le signe de $x+2$ de chaque côté de -2.

CORRIGÉ

Facteurs du dénominateur. On utilise l'écriture de la question 2. Quand x tend vers -2, $\sqrt{x+7}+3$ tend vers $\sqrt{5}+3>0$ et $x+2$ tend vers 0. Le dénominateur tend donc vers 0, avec le signe de $x+2$.

Signe. Pour $x>-2$, $x+2>0$; pour $-7\le x<-2$, $x+2<0$.

Conclusion. Le numérateur vaut $1>0$. D'après la règle des signes de la limite d'un quotient : $\lim_{x\to -2^+} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to -2^-} f(x)=-\infty$.

5. 0,75 pts

Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

INDICE

Début : choisis l'écriture de $f(x)$ la plus commode.

CORRIGÉ

Dénominateur. On utilise l'écriture de la question 2. En $+\infty$, $x+2$ tend vers $+\infty$; d'après la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{x+7}$ tend vers $+\infty$, donc $\sqrt{x+7}+3$ aussi. D'après la limite d'un produit, le dénominateur tend vers $+\infty$.

Conclusion. D'après la limite d'un quotient, 1 divisé par une quantité qui tend vers $+\infty$ tend vers 0 :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=0.$$

Exercice 4 — 5 pts

Minorer des deux côtés, puis mesurer un écart

Dans tout l'exercice, x est mesuré en radians.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x\sin x.$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par :

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2}.$$

1. — 1 pts

Justifier que, pour tout $x > 0$, $f(x) \geq x^2 - 2x$.

INDICE

Début : pars de $\sin x \leq 1$. **Ensuite :** multiplie par $2x$, dont tu donneras le signe, puis multiplie par -1, ce qui change le sens de l'inégalité.

CORRIGÉ

Départ. Soit $x > 0$. On sait que $\sin x \leq 1$. En multipliant par $2x > 0$, le sens est conservé : $2x\sin x \leq 2x$.

Conclusion. En multipliant par -1, le sens change : $-2x\sin x \geq -2x$. On ajoute x^2 : pour tout $x > 0$, $f(x) \geq x^2 - 2x$.

2. — 0,75 pts

En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

INDICE

Début : le terme $-2x\sin x$ n'a pas de limite connue ; cherche plutôt la limite de $x^2 - 2x$ en $+\infty$. **Ensuite :** nomme la propriété qui conclut à partir d'une minoration.

CORRIGÉ

Minorant. Le terme $-2x\sin x$ n'a pas de limite connue en $+\infty$; on étudie donc le minorant. D'après la règle du terme de plus haut degré, $x^2 - 2x$ a la même limite que x^2 en $+\infty$, c'est-à-dire $+\infty$.

Conclusion. D'après la question 1 et par comparaison :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

3. 1,25 pts

Justifier que, pour tout $x < 0$, $f(x) \geq x^2 + 2x$. En déduire $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

INDICE

Début : pour $x < 0$, le réel $-2x$ est strictement positif ; pars cette fois de $\sin x \geq -1$. **Ensuite :** procède comme aux questions 1 et 2.

CORRIGÉ

Minoration. Soit $x < 0$. On sait que $\sin x \geq -1$. Comme $-2x > 0$, multiplier par $-2x$ conserve le sens : $-2x \sin x \geq 2x$. On ajoute x^2 : $f(x) \geq x^2 + 2x$.

Minorant. D'après la règle du terme de plus haut degré, $x^2 + 2x$ a la même limite que x^2 en $-\infty$. L'exposant 2 est pair, donc cette limite vaut $+\infty$.

Conclusion. Par comparaison :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

4. 1 pts

Vérifier que, pour tout $x \neq 0$:

$$g(x) = 1 - 2 \times \frac{\sin x}{x}.$$

En déduire $\lim_{x \to 0} g(x)$.

INDICE

Début : divise chacun des deux termes de $f(x)$ par x^2. **Ensuite :** reconnais une limite usuelle en 0.

CORRIGÉ

Écriture. Soit $x \neq 0$. On divise chacun des deux termes de $f(x)$ par x^2 :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x^2}{x^2} - \frac{2x \sin x}{x^2} \\ &= 1 - 2 \times \frac{\sin x}{x}. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après la limite usuelle $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, puis la limite d'un produit par un réel et celle d'une somme :

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 1 - 2 \times 1 = -1.$$

5. 1 pts

Justifier que, pour tout $x \neq 0$:

$$|g(x) - 1| \leq \frac{2}{|x|}.$$

En déduire $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} g(x)$, puis retrouver les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ à partir de l'égalité $f(x) = x^2 g(x)$.

INDICE

Début : pour tout réel x, $|\sin x| \leq 1$. **Ensuite :** la limite usuelle de $\dfrac{\sin x}{x}$ ne vaut qu'en 0 ; à l'infini, sers-toi de l'inégalité.

CORRIGÉ

Écart. Soit $x \neq 0$. D'après la question 4, $g(x) - 1 = -\dfrac{2\sin x}{x}$. Comme $|\sin x| \leq 1$:

$$\begin{aligned} |g(x) - 1| &= \frac{2|\sin x|}{|x|} \\ &\leq \frac{2}{|x|}. \end{aligned}$$

Limites de g. Pour $x > 0$, $\dfrac{2}{|x|} = \dfrac{2}{x}$; pour $x < 0$, $\dfrac{2}{|x|} = -\dfrac{2}{x}$. D'après les limites de référence, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$, donc $\dfrac{2}{x}$ et $-\dfrac{2}{x}$ aussi. Par encadrement : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1$.

Retour à f. Pour $x \neq 0$, $f(x) = x^2 g(x)$. En $+\infty$ comme en $-\infty$, x^2 tend vers $+\infty$ et $g(x)$ vers $1 > 0$. D'après la limite d'un produit : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, comme à la question 2, et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, comme à la question 3.

Exercice 5 5 pts

Sinus, tangente et limites latérales

Dans tout l'exercice, x est mesuré en radians. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{x^2 + x}.$$

1. 1 pts

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f, puis vérifier que, pour tout $x \in D_f$:

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} \times \frac{1}{x+1}.$$

INDICE

Début : factorise $x^2 + x$. **Ensuite :** sépare le quotient en un produit de deux quotients.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Le sinus est défini sur $\mathbb{R}$. Le dénominateur s'écrit $x^2 + x = x(x+1)$; il s'annule en 0 et en -1 seulement.

Écriture. Pour tout $x \in D_f$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin(2x)}{x(x+1)} \\ &= \frac{\sin(2x)}{x} \times \frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

Conclusion. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, et l'écriture demandée est vraie pour tout $x \in D_f$.

2. 0,75 pts

En déduire $\lim_{x \to 0} f(x)$.

INDICE

Début : cite la limite usuelle de $\dfrac{\sin(ax)}{x}$ en 0, avec $a = 2$.

CORRIGÉ

Facteurs. D'après la limite usuelle $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(ax)}{x} = a$, avec $a = 2$, le premier facteur tend vers 2.
D'après la limite d'une fonction rationnelle en un point, $\dfrac{1}{x+1}$ tend vers $\dfrac{1}{0+1} = 1$.

Conclusion. D'après la question 1 et la limite d'un produit :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2 \times 1 = 2.$$

3. 1,25 pts

Calculer $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \to -1^-} f(x)$. La fonction f a-t-elle une limite en -1 ?

INDICE

Début : le numérateur tend vers $\sin(-2) = -\sin 2$; justifie que $\sin 2 > 0$ à l'aide de $0 < 2 < \pi$. **Ensuite :** étudie le signe de $x(x+1)$ de chaque côté de -1.

CORRIGÉ

Numérateur. Quand x tend vers -1, $\sin(2x)$ tend vers $\sin(-2)$ (limites de référence en un point), et $\sin(-2) = -\sin 2$ car le sinus est impair. Comme $0 < 2 < \pi$, le point du cercle trigonométrique associé au réel 2 est au-dessus de l'axe des abscisses : $\sin 2 > 0$. Le numérateur tend donc vers un réel strictement négatif.

Signe du dénominateur. Le dénominateur $x(x+1)$ tend vers 0.

- Pour $-1 < x < 0$: $x < 0$ et $x + 1 > 0$, donc $x(x+1) < 0$.
- Pour $x < -1$: les deux facteurs sont strictement négatifs, donc $x(x+1) > 0$.

Conclusion. D'après la règle des signes de la limite d'un quotient : $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$. Ces deux limites sont différentes : f n'a pas de limite en -1.

4. 1 pts

Soit g la fonction définie sur D_f par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Calculer $\lim_{x \to 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \to 0^-} g(x)$. La fonction g a-t-elle une limite en 0 ?

INDICE

Début : écris $g(x) = f(x) \times \dfrac{1}{x}$. **Ensuite :** utilise la question 2 et les limites de référence de $\dfrac{1}{x}$ à droite et à gauche de 0.

CORRIGÉ

Écriture. Pour $x \in D_f$, $g(x) = f(x) \times \dfrac{1}{x}$. D'après la question 2, $f(x)$ tend vers $2 > 0$ quand x tend vers 0. Enfin, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+ et vers $-\infty$ quand x tend vers 0^- (limites de référence en 0).

Limites latérales. D'après la règle des signes de la limite d'un produit : $\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^-} g(x) = -\infty$.

Conclusion. Ces deux limites sont différentes : g n'a pas de limite en 0, alors que f y a pour limite 2.

5. 1 pts

Pour $0 < |x| < \dfrac{\pi}{6}$, vérifier que $xf(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x+1}$. En déduire $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(3x)}{xf(x)}$.

INDICE

Début : simplifie $xf(x)$ par x. **Ensuite :** divise le numérateur et le dénominateur du quotient par x pour faire apparaître $\dfrac{\tan(3x)}{x}$ et $\dfrac{\sin(2x)}{x}$.

CORRIGÉ

Écriture de $xf(x)$. Soit x tel que $0 < |x| < \dfrac{\pi}{6}$. Comme $\dfrac{\pi}{6} < 1$, on a $x \neq -1$, donc $x \in D_f$ et :

$$\begin{aligned} xf(x) &= \frac{x\sin(2x)}{x(x+1)} \\ &= \frac{\sin(2x)}{x+1}. \end{aligned}$$

De plus, $0 < |3x| < \dfrac{\pi}{2}$ et $0 < |2x| < \dfrac{\pi}{3}$: $\tan(3x)$ existe et $\sin(2x) \neq 0$.

Quotient. On divise le numérateur et le dénominateur par x :

$$\begin{aligned} \frac{\tan(3x)}{xf(x)} &= \frac{(x+1)\tan(3x)}{\sin(2x)} \\ &= (x+1) \times \frac{\frac{\tan(3x)}{x}}{\frac{\sin(2x)}{x}}. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après les limites usuelles en 0, $\dfrac{\tan(3x)}{x}$ tend vers 3 et $\dfrac{\sin(2x)}{x}$ vers 2, qui n'est pas nul ; $x+1$ tend vers 1. D'après les limites d'un produit et d'un quotient :

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{xf(x)} \\ &= 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$