BURHAN

Limite d'une fonction numérique : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/limite-d-une-fonction/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Limite d'une fonction numérique	Entraînement	7

Exercice 1

Reconnaître la forme, puis la lever

Pour chaque limite, écris d'abord la forme obtenue en remplaçant, puis choisis une transformation.

1.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - x)$.

INDICE

Outil : écris la limite de chaque terme : quelle forme obtiens-tu ? Quelle transformation de la fiche des méthodes lui correspond ?

2.

Calculer $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 4}$.

INDICE

Outil : remplace x par 2 ; si tu obtiens « $\dfrac{0}{0}$ », vérifie que $x^3 - 3x - 2 = (x - 2)(x + 1)^2$.

3.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{(2x - 1)^2}{x^2 + x}$.

INDICE

Outil : quelle règle s'applique à la fois au numérateur et au dénominateur ?

Exercice 2

Trois quantités conjuguées

1.

Calculer $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}$.

INDICE

Outil : multiplie en haut et en bas par $\sqrt{2x+3}+3$, qui est strictement positif.

2.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)$.

INDICE

Outil : la forme est « $+\infty - \infty$ » ; la quantité conjuguée est $\sqrt{4x^2+1}+2x$.

3.

Calculer $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

INDICE

Outil : en $-\infty$, le terme x tend vers $-\infty$; la quantité conjuguée est $\sqrt{x^2+1}-x$.

Exercice 3

Choisir un réel pour qu'une limite existe

Soit m un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

- $f(x) = 2x^2 + m$ si $x < 1$;
- $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ si $x > 1$.

1.

Calculer $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.

INDICE

Outil : à droite de 1, c'est le quotient qui compte ; 1 est une racine de x^2+2x-3.

2.

Calculer $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ en fonction de m.

INDICE

Outil : à gauche de 1, $f(x)$ est un polynôme en x.

3.

Pour quelle valeur de m la fonction f a-t-elle une limite en 1 ? Préciser alors cette limite.

INDICE

Outil : que faut-il vérifier sur les deux limites latérales ?

Exercice 4

Faire apparaître une limite usuelle

Dans tout l'exercice, x est mesuré en radians, non nul et proche de 0.

1.

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)+x}{x}$.

INDICE

Outil : sépare le quotient en deux morceaux.

2.

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x\tan x}$.

INDICE

Outil : divise le numérateur et le dénominateur par x^2.

3.

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin(2x)}$.

INDICE

Outil : écris l'expression comme $x \times \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ divisé par $\dfrac{\sin(2x)}{x}$.

Exercice 5

Encadrer avec le sinus

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x + 2\sin x}{x - 1}.$$

1.

Justifier que, pour tout $x > 1$:

$$\frac{x - 2}{x - 1} \leq f(x) \leq \frac{x + 2}{x - 1}.$$

INDICE

Outil : encadre d'abord $2\sin x$, puis $x + 2\sin x$; le signe de $x - 1$ décide du sens des inégalités.

2.

Calculer les limites en $+\infty$ des deux fonctions qui encadrent f.

INDICE

Outil : ce sont des fonctions rationnelles ; garde les termes de plus haut degré.

3.

En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Outil : une fonction coincée entre deux fonctions de même limite.

Exercice 6

Limite infinie par comparaison

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2(2 + \cos x)$$

et

$$g(x) = x^3 - 4\sin x.$$

1.

Calculer $2 + \cos x$ pour $x = 0$ et pour $x = \pi$. Peut-on appliquer la limite d'un produit pour trouver directement la limite de f en $+\infty$?

INDICE

Outil : les deux valeurs trouvées reviennent pour $x = 2k\pi$ et pour $x = (2k+1)\pi$, avec k entier naturel.

2.

Justifier que $f(x) \geq x^2$ pour tout réel x. En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Outil : pars de $\cos x \geq -1$ et multiplie par $x^2 \geq 0$.

3.

Justifier que $g(x) \leq x^3 + 4$ pour tout réel x. En déduire $\lim_{x \to -\infty} g(x)$.

INDICE

Outil : majore $-4\sin x$; ici, c'est une majoration qui conclut.

Exercice 7

Une forme zéro sur zéro sans limite en 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1}.$$

1.

Quelle forme obtient-on en remplaçant x par 1 ? Simplifier $f(x)$ pour $x \neq 1$.

INDICE

Outil : $x^2 - 2x + 1$ est une identité remarquable ; 1 est aussi une racine du numérateur.

2.

Calculer $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \to 1^-} f(x)$. La fonction f a-t-elle une limite en 1 ?

INDICE

Outil : après simplification, le numérateur tend vers 3 ; étudie le signe de $x - 1$.

3.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

INDICE

Outil : pars de l'écriture de départ ou de l'écriture simplifiée ; garde les termes de plus haut degré.