BURHAN

Limite d'une fonction numérique : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/limite-d-une-fonction/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Limite d'une fonction numérique	Entraînement	7

Exercice 1

Reconnaître la forme, puis la lever

Pour chaque limite, écris d'abord la forme obtenue en remplaçant, puis choisis une transformation.

1.

Calculer $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-x)$.

INDICE

Outil : écris la limite de chaque terme : quelle forme obtiens-tu ? Quelle transformation de la fiche des méthodes lui correspond ?

CORRIGÉ

Forme. En $+\infty$, $\sqrt{x}$ et x tendent vers $+\infty$: la différence donne la forme indéterminée « $+\infty-\infty$ ».

Transformation. On met x en facteur. Pour tout $x>0$:

$$\sqrt{x}-x=x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right).$$

D'après les limites de référence, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers 0 ; d'après la limite d'une somme, le second facteur tend vers -1.

Conclusion. Le premier facteur tend vers $+\infty$, le second vers $-1<0$. D'après la règle des signes de la limite d'un produit :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-x\right)=-\infty.$$

2.

Calculer $\lim_{x\to2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-4}$.

INDICE

Outil : remplace x par 2 ; si tu obtiens « $\dfrac{0}{0}$ », vérifie que $x^3-3x-2=(x-2)(x+1)^2$.

CORRIGÉ

Forme. En 2, le numérateur vaut $8-6-2=0$ et le dénominateur $4-4=0$: c'est une forme « $\dfrac{0}{0}$ ».

Factorisation. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x-2)(x+1)^2\\&=(x-2)(x^2+2x+1)\\&=x^3-3x-2,\end{aligned}$$

et $x^2-4=(x-2)(x+2)$. Pour $x\neq2$ et $x\neq-2$, on simplifie par $x-2$, non nul :

$$\frac{x^3-3x-2}{x^2-4}=\frac{(x+1)^2}{x+2}.$$

Conclusion. En 2, $x+2$ vaut $4\neq0$: la limite d'une fonction rationnelle en un point s'applique :

$$\lim_{x\to2}\frac{(x+1)^2}{x+2}=\frac{9}{4}.$$

3.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{(2x-1)^2}{x^2+x}$.

INDICE

Outil : quelle règle s'applique à la fois au numérateur et au dénominateur ?

CORRIGÉ

Forme. En $+\infty$, le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$: c'est une forme « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ ».

Transformation. On développe le numérateur : $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$. Le quotient est une fonction rationnelle ; d'après la règle du terme de plus haut degré, sa limite en $+\infty$ est celle de $\dfrac{4x^2}{x^2}$, égal à 4 pour $x \neq 0$.

Conclusion. La limite cherchée vaut 4 :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(2x-1)^2}{x^2+x} = 4.$$

Exercice 2

Trois quantités conjuguées

1.

Calculer $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}$.

INDICE

Outil : multiplie en haut et en bas par $\sqrt{2x+3}+3$, qui est strictement positif.

CORRIGÉ

Forme. En 3, $\sqrt{2\times 3+3}-3=\sqrt{9}-3=0$ et $x-3=0$: c'est une forme « $\dfrac{0}{0}$ ».

Quantité conjuguée. Soit $x\geq -\dfrac{3}{2}$ avec $x\neq 3$. On multiplie en haut et en bas par la quantité conjuguée $\sqrt{2x+3}+3$, strictement positive. Au numérateur, $\left(\sqrt{2x+3}-3\right)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)=(2x+3)-9=2(x-3)$. Donc :

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}\\&=\frac{2(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}\\&=\frac{2}{\sqrt{2x+3}+3}.\end{aligned}$$

Conclusion. D'après la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{2x+3}$ tend vers $\sqrt{9}=3$; le dénominateur tend donc vers 6, qui n'est pas nul. D'après la limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

2.

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)$.

INDICE

Outil : la forme est « $+\infty-\infty$ » ; la quantité conjuguée est $\sqrt{4x^2+1}+2x$.

CORRIGÉ

Forme. En $+\infty$, $\sqrt{4x^2+1}$ et $2x$ tendent vers $+\infty$: c'est une forme « $+\infty-\infty$ ».

Quantité conjuguée. Soit $x>0$; alors $\sqrt{4x^2+1}+2x>0$. On multiplie et on divise par cette quantité :

$$\begin{aligned}&\sqrt{4x^2+1}-2x\\&=\frac{(4x^2+1)-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\\&=\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}.\end{aligned}$$

Dénominateur. D'après la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{4x^2+1}$ tend vers $+\infty$; d'après la limite d'une somme, $\sqrt{4x^2+1}+2x$ aussi.

Conclusion. D'après la limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)=0.$$

3.

Calculer $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

INDICE

Outil : en $-\infty$, le terme x tend vers $-\infty$; la quantité conjuguée est $\sqrt{x^2+1}-x$.

CORRIGÉ

Forme. En $-\infty$, $\sqrt{x^2+1}$ tend vers $+\infty$ et x vers $-\infty$: c'est une forme « $+\infty-\infty$ ».

Quantité conjuguée. Soit $x<0$. Alors $-x>0$, donc $\sqrt{x^2+1}-x>0$, et :

$$\begin{aligned}&\sqrt{x^2+1}+x\\&=\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}\\&=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}.\end{aligned}$$

Conclusion. En $-\infty$, $\sqrt{x^2+1}$ et $-x$ tendent vers $+\infty$, donc le dénominateur aussi (limite d'une somme). D'après la limite d'un quotient, la limite vaut 0.

Exercice 3

Choisir un réel pour qu'une limite existe

Soit m un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

- $f(x) = 2x^2 + m$ si $x < 1$;
- $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ si $x > 1$.

1.

Calculer $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.

INDICE

Outil : à droite de 1, c'est le quotient qui compte ; 1 est une racine de $x^2 + 2x - 3$.

CORRIGÉ

Forme. Pour $x > 1$, $f(x)$ est donné par le quotient ; en 1, son numérateur et son dénominateur valent 0 : c'est une forme « $\dfrac{0}{0}$ ».

Factorisation. Le réel 1 est racine de $x^2 + 2x - 3$ et, pour tout réel x, $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$. Pour $x > 1$, on simplifie par $x - 1$, non nul : $f(x) = x + 3$.

Conclusion. D'après la limite d'un polynôme en un point, $x + 3$ tend vers 4 quand x tend vers 1, donc :

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 4.$$

2.

Calculer $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ en fonction de m.

INDICE

Outil : à gauche de 1, $f(x)$ est un polynôme en x.

CORRIGÉ

Expression. Pour $x < 1$, $f(x) = 2x^2 + m$, où m est un réel fixé.

Conclusion. D'après la limite d'un polynôme en un point, $2x^2 + m$ tend vers $2 \times 1^2 + m$ quand x tend vers 1 :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 + m.$$

3.

Pour quelle valeur de m la fonction f a-t-elle une limite en 1 ? Préciser alors cette limite.

INDICE

Outil : que faut-il vérifier sur les deux limites latérales ?

CORRIGÉ

Condition. D'après la propriété « limite et limites à droite et à gauche », f a une limite en 1 si et seulement si ses limites à droite et à gauche en 1 sont égales. D'après les questions 1 et 2, cela s'écrit :

$$2 + m = 4.$$

Conclusion. Cette condition équivaut à $m = 2$. La fonction f a une limite en 1 pour cette seule valeur de m, et cette limite vaut 4 :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 4.$$

Exercice 4

Faire apparaître une limite usuelle

Dans tout l'exercice, x est mesuré en radians, non nul et proche de 0.

1.

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)+x}{x}$.

INDICE

Outil : sépare le quotient en deux morceaux.

CORRIGÉ

Découpage. Pour $x \neq 0$:

$$\frac{\sin(2x)+x}{x} = \frac{\sin(2x)}{x} + 1.$$

Conclusion. D'après la limite usuelle $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{x} = a$, avec $a = 2$, le premier terme tend vers 2. D'après la limite d'une somme, la limite vaut 3.

2.

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x\tan x}$.

INDICE

Outil : divise le numérateur et le dénominateur par x^2.

CORRIGÉ

Écriture. Pour x non nul et proche de 0, $\tan x \neq 0$. On divise le numérateur et le dénominateur par x^2 :

$$\frac{1-\cos x}{x\tan x} = \frac{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}{\dfrac{\tan x}{x}}.$$

Conclusion. D'après les limites usuelles en 0, $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{\tan x}{x}$ tend vers $1 \neq 0$. On divise ces deux limites (limite d'un quotient) : la limite vaut $\dfrac{1}{2}$.

3.

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin(2x)}$.

INDICE

Outil : écris l'expression comme $x \times \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ divisé par $\dfrac{\sin(2x)}{x}$.

CORRIGÉ

Écriture. Pour x non nul et proche de 0, $\sin(2x) \neq 0$. On divise le numérateur et le dénominateur par x, en écrivant $\dfrac{1-\cos x}{x} = x \times \dfrac{1-\cos x}{x^2}$:

$$\frac{1-\cos x}{\sin(2x)} = \frac{x \times \dfrac{1-\cos x}{x^2}}{\dfrac{\sin(2x)}{x}}.$$

Numérateur. D'après la limite usuelle de $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ en 0, ce quotient tend vers $\dfrac{1}{2}$; comme x tend vers 0, la limite d'un produit donne $0 \times \dfrac{1}{2} = 0$.

Dénominateur. D'après la limite usuelle $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{x} = a$, avec $a = 2$, il tend vers 2, qui n'est pas nul.

Conclusion. D'après la limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin(2x)} = \frac{0}{2} = 0.$$

Exercice 5

Encadrer avec le sinus

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x + 2\sin x}{x - 1}.$$

1.

Justifier que, pour tout $x > 1$:

$$\frac{x - 2}{x - 1} \leq f(x) \leq \frac{x + 2}{x - 1}.$$

INDICE

Outil : encadre d'abord $2\sin x$, puis $x + 2\sin x$; le signe de $x - 1$ décide du sens des inégalités.

CORRIGÉ

Numérateur. Soit $x > 1$. On part de $-1 \leq \sin x \leq 1$. On multiplie par $2 > 0$, puis on ajoute x :

$$x - 2 \leq x + 2\sin x \leq x + 2.$$

Division. Comme $x > 1$, le réel $x - 1$ est strictement positif : diviser par $x - 1$ conserve le sens des inégalités.

Conclusion. Pour tout $x > 1$:

$$\frac{x - 2}{x - 1} \leq f(x) \leq \frac{x + 2}{x - 1}.$$

2.

Calculer les limites en $+\infty$ des deux fonctions qui encadrent f.

INDICE

Outil : ce sont des fonctions rationnelles ; garde les termes de plus haut degré.

CORRIGÉ

Règle. Les deux bornes sont des fonctions rationnelles. D'après la règle du terme de plus haut degré, chacune a en $+\infty$ la même limite que $\frac{x}{x}$, égal à 1 pour $x \neq 0$.

Conclusion. En $+\infty$, $\frac{x - 2}{x - 1}$ et $\frac{x + 2}{x - 1}$ tendent toutes deux vers 1.

3.

En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Outil : une fonction coincée entre deux fonctions de même limite.

CORRIGÉ

Encadrement. D'après la question 1, f est comprise entre deux fonctions qui, d'après la question 2, tendent vers le même réel 1 en $+\infty$.

Conclusion. Par encadrement :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Exercice 6

Limite infinie par comparaison

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2(2 + \cos x)$$

et

$$g(x) = x^3 - 4\sin x.$$

1.

Calculer $2 + \cos x$ pour $x = 0$ et pour $x = \pi$. Peut-on appliquer la limite d'un produit pour trouver directement la limite de f en $+\infty$?

INDICE

Outil : les deux valeurs trouvées reviennent pour $x = 2k\pi$ et pour $x = (2k+1)\pi$, avec k entier naturel.

CORRIGÉ

Valeurs. $2 + \cos 0 = 3$ et $2 + \cos \pi = 1$. Plus généralement, pour tout entier naturel k, $\cos(2k\pi) = 1$ et $\cos((2k+1)\pi) = -1$, donc :

$$2 + \cos(2k\pi) = 3,$$
$$2 + \cos((2k+1)\pi) = 1.$$

Le facteur $2 + \cos x$. Il reprend la valeur 3 et la valeur 1 pour des réels x aussi grands que l'on veut : il n'a donc pas de limite en $+\infty$.

Conclusion. La limite d'un produit suppose que chaque facteur ait une limite : elle ne permet pas de trouver directement la limite de f en $+\infty$.

2.

Justifier que $f(x) \geq x^2$ pour tout réel x. En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Outil : pars de $\cos x \geq -1$ et multiplie par $x^2 \geq 0$.

CORRIGÉ

Minoration. Soit x un réel. On a $\cos x \geq -1$, donc $2 + \cos x \geq 1$. En multipliant par $x^2 \geq 0$, le sens est conservé :

$$f(x) = x^2(2 + \cos x) \geq x^2.$$

Conclusion. D'après les limites de référence, x^2 tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Par comparaison :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

3.

Justifier que $g(x) \leq x^3 + 4$ pour tout réel x. En déduire $\lim_{x \to -\infty} g(x)$.

INDICE

Outil : majore $-4\sin x$; ici, c'est une majoration qui conclut.

CORRIGÉ

Majoration. Soit x un réel. On a $\sin x \geq -1$; en multipliant par $-4 < 0$, le sens change : $-4\sin x \leq 4$. On ajoute x^3 :

$$g(x) \leq x^3 + 4.$$

Conclusion. L'exposant 3 est impair : x^3 tend vers $-\infty$ en $-\infty$, et $x^3 + 4$ aussi (limite d'une somme). Par comparaison :

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty.$$

Exercice 7

Une forme zéro sur zéro sans limite en 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1}.$$

1.

Quelle forme obtient-on en remplaçant x par 1 ? Simplifier $f(x)$ pour $x \neq 1$.

INDICE

Outil : $x^2 - 2x + 1$ est une identité remarquable ; 1 est aussi une racine du numérateur.

CORRIGÉ

Forme. En 1, le numérateur vaut $1 + 1 - 2 = 0$ et le dénominateur $1 - 2 + 1 = 0$: c'est une forme « $\frac{0}{0}$ ».

Factorisations. Pour tout réel x :

- $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$;
- $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ (identité remarquable).

Conclusion. Pour $x \neq 1$, on simplifie par $x - 1$, non nul :

$$f(x) = \frac{x + 2}{x - 1}.$$

2.

Calculer $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \to 1^-} f(x)$. La fonction f a-t-elle une limite en 1 ?

INDICE

Outil : après simplification, le numérateur tend vers 3 ; étudie le signe de $x - 1$.

CORRIGÉ

Numérateur et dénominateur. Dans l'écriture simplifiée, $x + 2$ tend vers 3, réel non nul, et $x - 1$ tend vers 0 : il est strictement positif à droite de 1 et strictement négatif à gauche.

Limites latérales. D'après la règle des signes de la limite d'un quotient, avec $3 > 0$: $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.

Conclusion. Les limites à droite et à gauche en 1 sont différentes : f n'a pas de limite en 1.

3.

Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

INDICE

Outil : pars de l'écriture de départ ou de l'écriture simplifiée ; garde les termes de plus haut degré.

CORRIGÉ

Règle. La fonction f est rationnelle. D'après la règle du terme de plus haut degré, en $+\infty$ comme en $-\infty$, $f(x)$ a la même limite que $\dfrac{x^2}{x^2}$, égal à 1 pour $x \neq 0$.

Conclusion. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$.