BURHAN

Limite d'une fonction numérique : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/limite-d-une-fonction/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Limite d'une fonction numérique	Application	9

Exercice 1

Conjecturer avec un tableau de valeurs

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{3x - 6}.$$

1.

À la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de $f(x)$, arrondies à 10^{-3}.

x	$1{,}9$	$1{,}99$	$1{,}999$	$2{,}001$	$2{,}01$	$2{,}1$
$f(x)$						

INDICE

Outil : remplace x par chaque valeur dans $\dfrac{x^3 - 8}{3x - 6}$; garde trois décimales.

2.

Quelle limite de f en 2 peut-on conjecturer ?

INDICE

Outil : regarde les colonnes les plus proches de 2, à gauche puis à droite.

3.

Vérifier que, pour tout réel x :

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4).$$

En déduire $\lim_{x \to 2} f(x)$.

INDICE

Outil : développe le produit et écris $3x - 6 = 3(x - 2)$; puis simplifie $f(x)$ par $x - 2$, qui n'est pas nul.

4.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $g(x) = \dfrac{x}{x + 1}$. Voici quelques valeurs de $g(x)$ près de -1.

x	$-1{,}1$	$-1{,}01$	$-1{,}001$	$-0{,}999$	$-0{,}99$	$-0{,}9$
$g(x)$	11	101	$1\,001$	-999	-99	-9

Que peut-on conjecturer pour la limite de g à gauche de -1, puis à droite ? La fonction g semble-t-elle avoir une limite en -1 ?

INDICE

Outil : lis d'abord les trois colonnes situées avant -1, puis les trois colonnes situées après.

Exercice 2

Limites de référence et opérations

Dans chaque question, écris la limite de chaque morceau, puis nomme l'opération qui conclut.

1.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} + \dfrac{3}{x^2} \right)$.

INDICE

Outil : que deviennent $\sqrt{x}$ et x^2 quand x devient très grand ?

2.

Calculer $\lim_{x \to -\infty} \left(2 - \dfrac{5}{x} \right) \left(x^2 + 1 \right)$.

INDICE

Outil : l'exposant 2 est pair ; regarde le signe de la limite du premier facteur.

3.

Calculer $\lim_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 4 \right)$.

INDICE

Outil : la limite de référence de $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ se lit à droite de 0.

4.

Calculer $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{7}{x^2 + 3}$.

INDICE

Outil : un réel fixe divisé par une quantité qui devient immense.

Exercice 3

Polynômes et fractions en un point

1.

Calculer $\lim_{x \to -2} \left(x^4 + 3x - 1\right)$.

INDICE

Outil : pour un polynôme, la limite en un réel est sa valeur en ce réel.

2.

Calculer $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + x - 4}{x + 3}$.

INDICE

Outil : vérifie d'abord que le dénominateur ne s'annule pas en 1.

3.

Calculer $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 5}$.

INDICE

Outil : même démarche ; attention aux signes en élevant -3 au carré.

Exercice 4

Le terme qui l'emporte

Pour chaque limite, garde seulement les termes de plus haut degré, puis conclus avec les limites de référence.

1.

Calculer $\lim_{x \to -\infty} \left(3x^4 - 7x^3 + x\right)$.

INDICE

Outil : le terme de plus haut degré est $3x^4$; l'exposant 4 est pair.

2.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x}{1 - 3x^2}$.

INDICE

Outil : au dénominateur, le terme de plus haut degré est $-3x^2$, pas 1.

3.

Calculer $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 4}{2x - 1}$.

INDICE

Outil : simplifie $\dfrac{x^2}{2x}$, puis regarde le signe de x.

4.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{6x + 1}{x^3 + x}$.

INDICE

Outil : le degré du dénominateur dépasse celui du numérateur.

Exercice 5

Une forme zéro sur zéro levée par factorisation

1.

Calculer $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$.

INDICE

Outil : -1 est une racine de $x^2 - 3x - 4$; factorise par $x + 1$.

2.

Calculer $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$.

INDICE

Outil : 3 annule les deux polynômes ; factorise chacun par $x - 3$.

Exercice 6

À droite et à gauche d'un réel

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x - 3}.$$

1.

Calculer $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ et $\lim_{x \to 3^-} f(x)$.

INDICE

Outil : le numérateur tend vers un réel non nul ; étudie le signe de $x - 3$ de chaque côté de 3.

2.

La fonction f a-t-elle une limite en 3 ?

INDICE

Outil : compare tes deux résultats.

3.

Calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - 3}{x^2}$.

INDICE

Outil : quel est le signe de x^2 pour $x \neq 0$?

Exercice 7

Racine carrée d'une fonction

1.

Calculer $\lim_{x \to 2} \sqrt{3x^2 + 4}$.

INDICE

Outil : cherche d'abord la limite de $3x^2 + 4$.

2.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 5x}$.

INDICE

Outil : pour $x > 0$, l'expression sous la racine est positive ; quelle est sa limite ?

3.

Calculer $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$.

INDICE

Outil : quand x tend vers $-\infty$, que devient $1 - x$?

Exercice 8

Limites trigonométriques usuelles

Dans tout l'exercice, x est mesuré en radians et les limites sont cherchées en 0.

1.

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{2x}$.

INDICE

Outil : écris le quotient comme $\dfrac{1}{2}$ fois une limite usuelle.

2.

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(4x)}{5x}$.

INDICE

Outil : même idée, avec la limite usuelle de la tangente.

3.

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{2(1-\cos x)}{x^2}$.

INDICE

Outil : fais apparaître $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

4.

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sin(2x)}$.

INDICE

Outil : écris ce quotient comme 3 divisé par une limite usuelle.

Exercice 9

Un premier encadrement

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}.$$

1.

Justifier que, pour tout réel x :

$$-\frac{1}{x^2+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2+1}.$$

INDICE

Outil : pars de $-1 \leq \sin x \leq 1$; le nombre $x^2 + 1$ est strictement positif.

2.

En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

INDICE

Outil : calcule la limite des deux bornes en $+\infty$ et en $-\infty$.

3.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right)$.

INDICE

Outil : encadre $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ pour $x > 0$, puis ajoute 1.