BURHAN

Limite d'une fonction numérique : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/limite-d-une-fonction/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Limite d'une fonction numérique	Application	9

Exercice 1

Conjecturer avec un tableau de valeurs

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{3x - 6}.$$

1.

À la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de $f(x)$, arrondies à 10^{-3}.

x	$1{,}9$	$1{,}99$	$1{,}999$	$2{,}001$	$2{,}01$	$2{,}1$
$f(x)$						

INDICE

Outil : remplace x par chaque valeur dans $\dfrac{x^3 - 8}{3x - 6}$; garde trois décimales.

CORRIGÉ

Tableau. On remplace x par chaque valeur, puis on arrondit à 10^{-3} :

x	$1{,}9$	$1{,}99$	$1{,}999$	$2{,}001$	$2{,}01$	$2{,}1$
$f(x)$	$3{,}803$	$3{,}980$	$3{,}998$	$4{,}002$	$4{,}020$	$4{,}203$

2.

Quelle limite de f en 2 peut-on conjecturer ?

INDICE

Outil : regarde les colonnes les plus proches de 2, à gauche puis à droite.

CORRIGÉ

Lecture. Quand x s'approche de 2 par valeurs inférieures, comme par valeurs supérieures, les valeurs de $f(x)$ s'approchent de 4.

Conclusion. On conjecture que :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4.$$

Un tableau de valeurs ne prouve pas une limite : la question 3 la justifie par le calcul.

3.

Vérifier que, pour tout réel x :

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4).$$

En déduire $\lim_{x\to 2} f(x)$.

INDICE

Outil : développe le produit et écris $3x-6 = 3(x-2)$; puis simplifie $f(x)$ par $x-2$, qui n'est pas nul.

CORRIGÉ

Développement. Soit x un réel :

$$\begin{aligned}(x-2)(x^2+2x+4) &= x^3+2x^2+4x \\ &\quad -2x^2-4x-8 \\ &= x^3-8.\end{aligned}$$

Simplification. Le dénominateur se factorise : $3x-6 = 3(x-2)$. Pour tout réel $x \neq 2$, le facteur $x-2$ n'est pas nul ; on simplifie par $x-2$:

$$f(x) = \frac{x^2+2x+4}{3}.$$

Limite. D'après la limite d'un polynôme en un point, x^2+2x+4 tend vers $4+4+4 = 12$ quand x tend vers 2. Par le produit par le réel $\frac{1}{3}$:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{12}{3} = 4.$$

Conclusion. La limite de f en 2 vaut 4 : la conjecture de la question 2 est confirmée.

4.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Voici quelques valeurs de $g(x)$ près de -1.

x	$-1{,}1$	$-1{,}01$	$-1{,}001$	$-0{,}999$	$-0{,}99$	$-0{,}9$
$g(x)$	11	101	$1\,001$	-999	-99	-9

Que peut-on conjecturer pour la limite de g à gauche de -1, puis à droite ? La fonction g semble-t-elle avoir une limite en -1 ?

INDICE

Outil : lis d'abord les trois colonnes situées avant -1, puis les trois colonnes situées après.

CORRIGÉ

À gauche de -1. Pour $x < -1$, les valeurs de $g(x)$ sont positives et deviennent aussi grandes que l'on veut. On conjecture :

$$\lim_{x \to -1^-} g(x) = +\infty.$$

À droite de -1. Pour $x > -1$, les valeurs de $g(x)$ sont négatives et de plus en plus grandes en valeur absolue. On conjecture :

$$\lim_{x \to -1^+} g(x) = -\infty.$$

Conclusion. Les deux côtés de -1 donnent des comportements différents : g ne semble pas avoir de limite en -1. C'est une conjecture ; l'étude du signe de $x+1$ permettrait de la justifier.

Exercice 2

Limites de référence et opérations

Dans chaque question, écris la limite de chaque morceau, puis nomme l'opération qui conclut.

1.

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)$.

INDICE

Outil : que deviennent $\sqrt{x}$ et x^2 quand x devient très grand ?

CORRIGÉ

Limites des termes. D'après les limites de référence en $+\infty$, $\sqrt{x}$ et x^2 tendent vers $+\infty$. D'après la limite d'un quotient, $\dfrac{3}{x^2}$ tend alors vers 0.

Conclusion. D'après la limite d'une somme :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+\frac{3}{x^2}\right)=+\infty.$$

2.

Calculer $\lim_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{5}{x}\right)\left(x^2+1\right)$.

INDICE

Outil : l'exposant 2 est pair ; regarde le signe de la limite du premier facteur.

CORRIGÉ

Premier facteur. D'après les limites de référence, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 en $-\infty$, donc $\dfrac{5}{x}$ aussi. D'après la limite d'une somme, $2-\dfrac{5}{x}$ tend vers 2.

Second facteur. L'exposant 2 est pair : x^2 tend vers $+\infty$ en $-\infty$. D'après la limite d'une somme, x^2+1 tend aussi vers $+\infty$.

Conclusion. Le premier facteur tend vers $2>0$ et le second vers $+\infty$. D'après la limite d'un produit, la limite cherchée vaut $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{5}{x}\right)\left(x^2+1\right)=+\infty.$$

3.

Calculer $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-4\right)$.

INDICE

Outil : la limite de référence de $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ se lit à droite de 0.

CORRIGÉ

Limite du terme. D'après les limites de référence à droite de 0, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+.

Conclusion. D'après la limite d'une somme :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-4\right)=+\infty.$$

4.

Calculer $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{7}{x^2+3}$.

INDICE

Outil : un réel fixe divisé par une quantité qui devient immense.

CORRIGÉ

Dénominateur. L'exposant 2 est pair, donc x^2 tend vers $+\infty$ en $-\infty$. D'après la limite d'une somme, x^2+3 tend aussi vers $+\infty$.

Conclusion. D'après la limite d'un quotient, le réel 7 divisé par une quantité qui tend vers $+\infty$ tend vers 0 : la limite vaut 0.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{7}{x^2+3}=0.$$

Exercice 3

Polynômes et fractions en un point

1.

Calculer $\lim_{x \to -2} \left(x^4 + 3x - 1\right)$.

INDICE

Outil : pour un polynôme, la limite en un réel est sa valeur en ce réel.

CORRIGÉ

Règle. Un polynôme a pour limite en un réel sa valeur en ce réel (limite d'un polynôme en un point).

On calcule donc la valeur de $x^4 + 3x - 1$ pour $x = -2$.

Calcul.

$$\begin{aligned}&(-2)^4 + 3 \times (-2) - 1\\ &= 16 - 6 - 1 = 9.\end{aligned}$$

Conclusion. $\lim_{x \to -2} \left(x^4 + 3x - 1\right) = 9$.

2.

Calculer $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + x - 4}{x + 3}$.

INDICE

Outil : vérifie d'abord que le dénominateur ne s'annule pas en 1.

CORRIGÉ

Dénominateur. En 1, le dénominateur vaut $1 + 3 = 4$, qui n'est pas nul.

Calcul. Le dénominateur ne s'annulant pas en 1, on remplace x par 1 (limite d'une fonction rationnelle en un point) :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + x - 4}{x + 3} &= \frac{2 + 1 - 4}{4}\\ &= -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Conclusion. La limite cherchée vaut $-\dfrac{1}{4}$.

3.

Calculer $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 5}$.

INDICE

Outil : même démarche ; attention aux signes en élevant -3 au carré.

CORRIGÉ

Dénominateur. En -3, le dénominateur vaut $(-3)^2 - 5 = 9 - 5 = 4$, qui n'est pas nul.

Numérateur. En -3, il vaut $(-3)^2 + 2 \times (-3) = 9 - 6 = 3$.

Conclusion. D'après la limite d'une fonction rationnelle en un point :

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 5} = \frac{3}{4}.$$

Exercice 4

Le terme qui l'emporte

Pour chaque limite, garde seulement les termes de plus haut degré, puis conclus avec les limites de référence.

1.

Calculer $\lim_{x\to-\infty}\left(3x^4-7x^3+x\right)$.

INDICE

Outil : le terme de plus haut degré est $3x^4$; l'exposant 4 est pair.

CORRIGÉ

Règle. D'après la règle du terme de plus haut degré :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x^4-7x^3+x\right) = \lim_{x\to-\infty}3x^4.$$

Conclusion. L'exposant 4 est pair, donc x^4 tend vers $+\infty$ en $-\infty$. Comme $3>0$, la limite vaut $+\infty$.

2.

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-2x}{1-3x^2}$.

INDICE

Outil : au dénominateur, le terme de plus haut degré est $-3x^2$, pas 1.

CORRIGÉ

Règle. D'après la règle du terme de plus haut degré, on garde $5x^2$ au numérateur et $-3x^2$ au dénominateur : on cherche la limite en $+\infty$ de $\dfrac{5x^2}{-3x^2}$.

Conclusion. Pour tout réel $x\neq 0$, $\dfrac{5x^2}{-3x^2}=-\dfrac{5}{3}$, qui ne dépend pas de x : la limite vaut $-\dfrac{5}{3}$.

3.

Calculer $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4}{2x-1}$.

INDICE

Outil : simplifie $\dfrac{x^2}{2x}$, puis regarde le signe de x.

CORRIGÉ

Règle. D'après la règle du terme de plus haut degré, on cherche la limite en $-\infty$ de $\dfrac{x^2}{2x}$. Pour tout réel $x\neq 0$:

$$\frac{x^2}{2x}=\frac{x}{2}.$$

Conclusion. Quand x tend vers $-\infty$, $\dfrac{x}{2}$ tend vers $-\infty$: la limite vaut $-\infty$.

4.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{6x+1}{x^3+x}$.

INDICE

Outil : le degré du dénominateur dépasse celui du numérateur.

CORRIGÉ

Règle. D'après la règle du terme de plus haut degré, on cherche la limite en $+\infty$ de $\dfrac{6x}{x^3}$. Pour tout réel $x \neq 0$:

$$\frac{6x}{x^3} = \frac{6}{x^2}.$$

Conclusion. D'après les limites de référence en $+\infty$, l'inverse de x^2 tend vers 0. Multiplié par le réel 6, il tend encore vers 0 (limite d'un produit par un réel) : la limite vaut 0.

Exercice 5

Une forme zéro sur zéro levée par factorisation

1.

Calculer $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$.

INDICE

Outil : -1 est une racine de $x^2 - 3x - 4$; factorise par $x + 1$.

CORRIGÉ

Forme. En -1, le numérateur vaut $1 + 3 - 4 = 0$ et le dénominateur vaut 0 : c'est une forme « $\dfrac{0}{0}$ ».

Factorisation. Le réel -1 est racine du numérateur, qui se factorise donc par $x + 1$: pour tout réel x, $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$. Pour $x \neq -1$, on simplifie par $x + 1$, non nul :

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} = x - 4.$$

Conclusion. Le polynôme $x - 4$ a pour limite sa valeur en -1 (limite d'un polynôme en un point) :

$$\lim_{x \to -1} (x - 4) = -5.$$

2.

Calculer $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$.

INDICE

Outil : 3 annule les deux polynômes ; factorise chacun par $x - 3$.

CORRIGÉ

Forme. En 3, le numérateur vaut $9 - 15 + 6 = 0$ et le dénominateur $18 - 15 - 3 = 0$: c'est une forme « $\dfrac{0}{0}$ ».

Factorisation. Le réel 3 annule les deux polynômes, qui se factorisent par $x - 3$. Pour tout réel x :

- $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$;
- $2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1)$.

Pour $x \neq 3$ et $x \neq -\dfrac{1}{2}$, on simplifie par $x - 3$, non nul :

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 5x - 3} = \frac{x - 2}{2x + 1}.$$

Conclusion. En 3, $2x + 1$ vaut $7 \neq 0$: la limite d'une fonction rationnelle en un point s'applique :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 2}{2x + 1} = \frac{1}{7}.$$

Exercice 6

À droite et à gauche d'un réel

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x - 3}.$$

1.

Calculer $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ et $\lim_{x \to 3^-} f(x)$.

INDICE

Outil : le numérateur tend vers un réel non nul ; étudie le signe de $x - 3$ de chaque côté de 3.

CORRIGÉ

Numérateur. D'après la limite d'un polynôme en un point, $2x - 1$ tend vers $2 \times 3 - 1 = 5$ quand x tend vers 3. Ce réel n'est pas nul.

Dénominateur. $x - 3$ tend vers 0 ; il est strictement positif pour $x > 3$ et strictement négatif pour $x < 3$.

Conclusion. D'après la règle des signes de la limite d'un quotient, avec $5 > 0$: $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$.

2.

La fonction f a-t-elle une limite en 3 ?

INDICE

Outil : compare tes deux résultats.

CORRIGÉ

Comparaison. D'après la question 1, la limite à droite en 3 vaut $+\infty$ et la limite à gauche vaut $-\infty$: elles sont différentes.

Conclusion. D'après la propriété « limite et limites à droite et à gauche », une limite en 3 exigerait deux limites latérales égales. Ce n'est pas le cas : f n'a pas de limite en 3.

3.

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-3}{x^2}$.

INDICE

Outil : quel est le signe de x^2 pour $x \neq 0$?

CORRIGÉ

Numérateur. $x-3$ tend vers -3 quand x tend vers 0.

Dénominateur. x^2 tend vers 0 et, pour tout réel $x \neq 0$, $x^2 > 0$: il tend vers 0^+, à droite comme à gauche de 0.

Conclusion. D'après la règle des signes de la limite d'un quotient, avec $-3 < 0$, la limite vaut $-\infty$ à droite et à gauche de 0. Ces deux limites étant égales :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-3}{x^2} = -\infty.$$

Exercice 7

Racine carrée d'une fonction

1.

Calculer $\lim_{x\to 2}\sqrt{3x^2+4}$.

INDICE

Outil : cherche d'abord la limite de $3x^2+4$.

CORRIGÉ

Sous la racine. Pour tout réel x, $3x^2+4>0$. D'après la limite d'un polynôme en un point, $3x^2+4$ tend vers $3\times 4+4=16$ quand x tend vers 2 ; ce réel est positif.

Conclusion. D'après la limite de la racine carrée d'une fonction :

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{3x^2+4}=\sqrt{16}=4.$$

2.

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+5x}$.

INDICE

Outil : pour $x>0$, l'expression sous la racine est positive ; quelle est sa limite ?

CORRIGÉ

Sous la racine. Pour $x>0$, $x^2+5x=x(x+5)>0$. D'après la règle du terme de plus haut degré, x^2+5x a la même limite que x^2 en $+\infty$, c'est-à-dire $+\infty$.

Conclusion. D'après la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{x^2+5x}$ tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+5x}=+\infty.$$

3.

Calculer $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

INDICE

Outil : quand x tend vers $-\infty$, que devient $1-x$?

CORRIGÉ

Sous la racine. Pour $x<1$, $1-x>0$. Quand x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$, donc $1-x$ aussi (limite d'une somme).

Racine. D'après la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{1-x}$ tend vers $+\infty$.

Conclusion. D'après la limite d'un quotient, 1 divisé par une quantité qui tend vers $+\infty$ tend vers 0 : la limite vaut 0.

Exercice 8

Limites trigonométriques usuelles

Dans tout l'exercice, x est mesuré en radians et les limites sont cherchées en 0.

1.

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{2x}$.

INDICE

Outil : écris le quotient comme $\dfrac{1}{2}$ fois une limite usuelle.

CORRIGÉ

Écriture. Pour tout réel $x \neq 0$:

$$\frac{\sin(7x)}{2x} = \frac{1}{2} \times \frac{\sin(7x)}{x}.$$

Conclusion. D'après la limite usuelle $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{x} = a$, avec $a = 7$, le second facteur tend vers 7. Par le produit par le réel $\dfrac{1}{2}$, la limite vaut $\dfrac{7}{2}$.

2.

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(4x)}{5x}$.

INDICE

Outil : même idée, avec la limite usuelle de la tangente.

CORRIGÉ

Écriture. Pour $0 < |x| < \dfrac{\pi}{8}$, on a $0 < |4x| < \dfrac{\pi}{2}$, donc $\tan(4x)$ existe, et :

$$\frac{\tan(4x)}{5x} = \frac{1}{5} \times \frac{\tan(4x)}{x}.$$

Conclusion. D'après la limite usuelle $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(ax)}{x} = a$, avec $a = 4$, le second facteur tend vers 4. Par le produit par le réel $\dfrac{1}{5}$, la limite vaut $\dfrac{4}{5}$.

3.

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{2(1-\cos x)}{x^2}$.

INDICE

Outil : fais apparaître $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

CORRIGÉ

Écriture. Pour tout réel $x \neq 0$:

$$\frac{2(1-\cos x)}{x^2} = 2 \times \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Conclusion. D'après la limite usuelle $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ et le produit par le réel 2, la limite vaut $2 \times \dfrac{1}{2} = 1$.

4.

Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sin(2x)}$.

INDICE

Outil : écris ce quotient comme 3 divisé par une limite usuelle.

CORRIGÉ

Écriture. Pour $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$, on a $0 < |2x| < \pi$, donc $\sin(2x) \neq 0$. On divise le numérateur et le dénominateur par x :

$$\frac{3x}{\sin(2x)} = \frac{3}{\dfrac{\sin(2x)}{x}}.$$

Dénominateur. D'après la limite usuelle $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{x} = a$, avec $a = 2$, $\dfrac{\sin(2x)}{x}$ tend vers 2, qui n'est pas nul.

Conclusion. D'après la limite d'un quotient, la limite vaut $\dfrac{3}{2}$.

Exercice 9

Un premier encadrement

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2+1}.$$

1.

Justifier que, pour tout réel x :

$$-\frac{1}{x^2+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2+1}.$$

INDICE

Outil : pars de $-1 \leq \sin x \leq 1$; le nombre x^2+1 est strictement positif.

CORRIGÉ

Départ. Soit x un réel. On sait que $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Division. Le réel x^2+1 est strictement positif : diviser par x^2+1 conserve le sens des inégalités.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x^2+1} &\leq \frac{\sin x}{x^2+1} \\ &\leq \frac{1}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $-\frac{1}{x^2+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2+1}$.

2.

En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

INDICE

Outil : calcule la limite des deux bornes en $+\infty$ et en $-\infty$.

CORRIGÉ

Limites des bornes. En $+\infty$ comme en $-\infty$, x^2 tend vers $+\infty$ (l'exposant 2 est pair), donc x^2+1 aussi. D'après la limite d'un quotient, $\frac{1}{x^2+1}$ tend vers 0, et son opposé aussi.

Conclusion. La fonction f est encadrée par deux fonctions qui tendent vers 0. Par encadrement, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

3.

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}\right)$.

INDICE

Outil : encadre $\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ pour $x>0$, puis ajoute 1.

CORRIGÉ

Encadrement. Soit $x>0$. On a $-1\le\cos x\le 1$ et $\sqrt{x}>0$. On divise par $\sqrt{x}$, puis on ajoute 1 :

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{\sqrt{x}}&\le 1+\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\\&\le 1+\frac{1}{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Bornes. D'après les limites de référence en $+\infty$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers 0. D'après la limite d'une somme, chaque borne a pour limite $1+0=1$.

Conclusion. Par encadrement, la limite vaut 1 :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right)=1.$$