BURHAN

Limite d'une fonction numérique

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/limite-d-une-fonction/cours

Chapitre	Semestre
Limite d'une fonction numérique	Semestre 2

Que vaut une fonction là où on ne peut pas calculer ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

En 3, le dénominateur s'annule : $f(3)$ n'existe pas, et ta calculatrice affiche une erreur.

Pourtant, rien n'empêche de calculer $f(2{,}99)$ ou $f(3{,}01)$. Que deviennent les valeurs de $f(x)$ quand x se rapproche de 3 ?

Devine : Une prédiction

Quand x se rapproche de 3, de quel réel se rapprochent les valeurs de $f(x)$?

A. De 0, car le numérateur tend vers 0.

Faux.

Le dénominateur se rapproche aussi de 0 : on ne peut pas conclure si vite.

B. D'aucun réel, car on divise par 0.

Faux.

On ne divise jamais par 0 : x reste différent de 3, et $f(x)$ se calcule.

C. De 6.

Juste.

Juste : $f(2{,}99) = 5{,}99$ et $f(3{,}01) = 6{,}01$.

D. De 9, car $3^2 = 9$.

Faux.

9 est la valeur de x^2 en 3 ; le dénominateur compte aussi.

Correction

Pour $x \neq 3$, on a $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$. On simplifie par $x - 3$, qui n'est pas nul :

$$f(x) = x + 3.$$

Ainsi $f(2{,}99) = 5{,}99$ et $f(3{,}01) = 6{,}01$.

Plus x est proche de 3, plus $f(x)$ est proche de 6. On dira que f a pour limite 6 en 3.

Ce chapitre t'apprend à décrire une fonction près d'un réel, ou quand x devient très grand.

Tu conjectures d'abord, avec un tableau de valeurs ou une courbe. Tu justifies ensuite par le calcul, en nommant chaque règle.

Tu apprends aussi à lever les formes indéterminées. Enfin, tu utilises trois limites trigonométriques et tu encadres des fonctions.

Limite finie en un point

Observer près d'un réel

En clair. Pour étudier f près de 3, on ne calcule pas $f(3)$. On regarde les valeurs $f(x)$ pour des réels x proches de 3, d'un côté comme de l'autre.

Si ces valeurs se rapprochent d'un même réel, ce réel est la **limite** de f en 3.

Devine : Une valeur changée

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)$ si $x \neq 3$, et $g(3) = 100$.

Quand x se rapproche de 3, en restant différent de 3, de quel réel se rapprochent les valeurs de $g(x)$?

A. De 100, la valeur de g en 3.

Faux.

Quand x reste différent de 3, la valeur $g(3)$ n'est jamais prise.

B. De 6, comme pour f.

Juste.

Juste : pour $x \neq 3$, $g(x) = f(x)$, et seules ces valeurs comptent.

C. De 9, le carré de 3.

Faux.

Pour $x \neq 3$, $g(x) = x + 3$: rien ne fait apparaître 3^2.

D. D'aucun réel : la courbe saute en 3.

Faux.

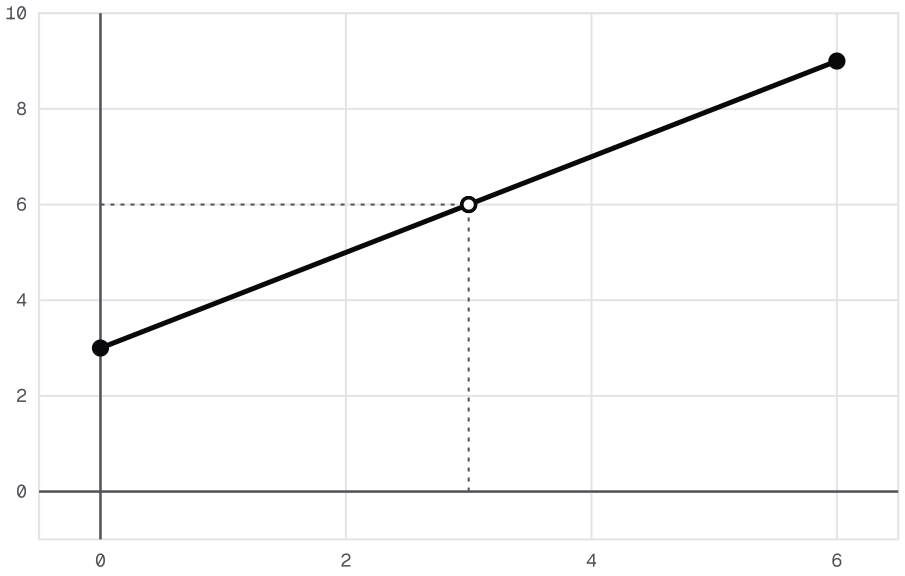
Le saut ne concerne qu'un point ; près de 3, les valeurs se rapprochent bien d'un réel.

Correction

Pour $x \neq 3$, $g(x) = f(x) = x + 3$.

Les valeurs de $g(x)$ pour x proche de 3 sont donc celles de $f(x)$: elles se rapprochent de 6.

La valeur $g(3) = 100$ n'intervient pas.



$y = f(x)$ ○ Point creux $(3, 6)$ ● Point du graphe ○ Point exclu du graphe

La courbe de f, privée du point d'abscisse 3. De quelle hauteur se rapprochent ses points quand x se rapproche de 3 ?

Point creux en x = 3, à l'ordonnée estimée ≈ 6 : ce point n'appartient pas à la courbe.

Point creux en x = 3, à l'ordonnée estimée ≈ 6 : limite à droite estimée numériquement.

Définition : Limite finie en un point

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a, sauf peut-être en a. Soit ℓ un réel.

- On dit que f admet pour **limite** ℓ en a, ou que $f(x)$ **tend vers** ℓ quand x tend vers a, si $f(x)$ devient aussi proche de ℓ que l'on veut dès que x, distinct de a, est assez proche de a.
- On écrit $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.
- La valeur $f(a)$, lorsqu'elle existe, n'intervient pas : seuls comptent les réels $x \neq a$ proches de a.

Conjecturer, puis justifier

Méthode : conjecturer une limite

1. **Choisis** des réels x de plus en plus proches de a, à droite et à gauche, ou de plus en plus grands en valeur absolue.
2. **Calcule** les valeurs $f(x)$ à la calculatrice, et range-les dans un tableau ; ou **observe** la courbe près de l'endroit étudié.
3. **Repère** la tendance : des valeurs qui se rapprochent d'un réel, ou qui deviennent de plus en plus grandes, ou de plus en plus petites.

4. **Justifie** ensuite par le calcul : une courbe ou un tableau ne fournit qu'une conjecture.

Exemple : conjecturer, puis justifier

On reprend la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ pour $x \neq 3$.

x	2,9	2,99	2,999	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	5,9	5,99	5,999	6,001	6,01	6,1

Conjecture. $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$.

Justification. On factorise le numérateur. Pour $x \neq 3$:

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3.$$

Or $x + 3$ se rapproche de 6 quand x se rapproche de 3. Les règles de calcul de ce chapitre rendront ce dernier pas précis.

Les limites de référence

Propriété : Limites de référence en un point

Pour tout réel a, tout réel c, tout réel b et tout entier naturel non nul n :

- $\lim_{x \to a} c = c$ et $\lim_{x \to a} x^n = a^n$;
- si $a > 0$, alors $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$;
- $\lim_{x \to a} \sin(bx) = \sin(ab)$ et $\lim_{x \to a} \cos(bx) = \cos(ab)$.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Il traduit ce que montre la calculatrice : près de a, x^n est proche de a^n.

Exemple : des limites de référence

D'après les limites de référence en un point :

- $\lim_{x \to -2} x^3 = (-2)^3 = -8$;
- $\lim_{x \to 9} \sqrt{x} = \sqrt{9} = 3$, car $9 > 0$;
- $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \cos(2x) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$;

- $\lim_{x\to 5} 7 = 7$: une fonction constante a pour limite sa valeur.

À toi : Trois limites de référence

Donne $\lim_{x\to -1} x^4$, $\lim_{x\to 16} \sqrt{x}$ et $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \sin(2x)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Chaque fonction figure dans les limites de référence en un point : remplace x par le réel visé.
Indice 2
Pour le sinus, calcule d'abord $2 \times \dfrac{\pi}{4}$.
Indice 3
Point délicat : $(-1)^4$ est positif, car l'exposant est pair.

Réponse
D'après les limites de référence en un point :

- $\lim_{x\to -1} x^4 = (-1)^4 = 1$;
- $\lim_{x\to 16} \sqrt{x} = \sqrt{16} = 4$, car $16 > 0$;
- $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \sin(2x) = \sin \dfrac{\pi}{2} = 1$, car $2 \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

Limite infinie ; limites à droite et à gauche

Des valeurs qui grandissent sans fin

En clair. Le réel 0 n'a pas d'image par la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$.

Prends des réels de plus en plus proches de 0 : $0{,}1$, puis $0{,}01$, puis $0{,}001$. Prends aussi leurs opposés. Calcule leurs images à la calculatrice, et observe.

Devine : Près de 0

Comment se comportent les valeurs de $\dfrac{1}{x^2}$ quand x se rapproche de 0, d'un côté comme de l'autre ?

A. Elles deviennent de plus en plus grandes, sans fin.
Juste.
Juste : pour $x = \pm 0{,}001$, on obtient déjà $1\,000\,000$.

B. Elles se rapprochent de 0, comme x.
Faux.
Le dénominateur x^2 devient petit : le quotient devient grand.

C. Grandes à droite, très négatives à gauche.
Faux.
Un carré est positif : $x^2 > 0$ des deux côtés de 0.

D. Elles se rapprochent de 1.

Faux.

Pour $x = 0{,}1$, on obtient déjà 100.

Correction

x	$\pm 0{,}1$	$\pm 0{,}01$	$\pm 0{,}001$
$\dfrac{1}{x^2}$	100	$10\,000$	$1\,000\,000$

Des deux côtés de 0, x^2 est strictement positif et de plus en plus petit. Son inverse finit par dépasser n'importe quel réel choisi à l'avance.

On écrira :

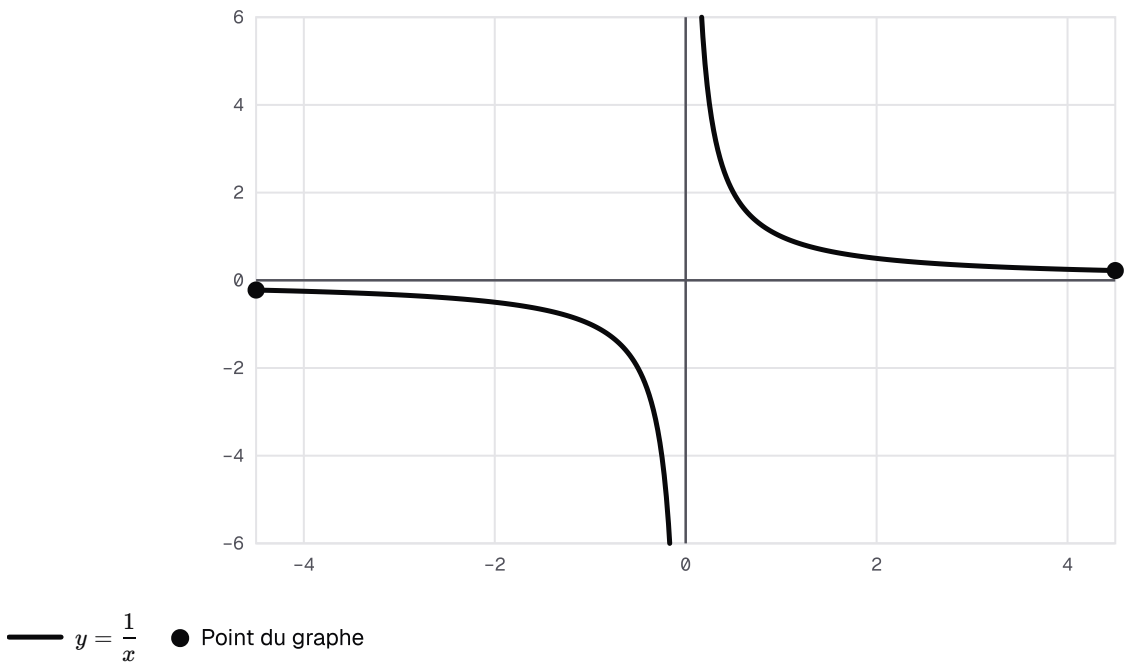
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Définition : Limite infinie en un point

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a, sauf peut-être en a.

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si $f(x)$ devient plus grand que n'importe quel réel fixé à l'avance dès que x, distinct de a, est assez proche de a. On écrit $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a si $f(x)$ devient plus petit que n'importe quel réel fixé à l'avance dès que x, distinct de a, est assez proche de a. On écrit $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

À droite et à gauche



La courbe de la fonction inverse de part et d'autre de 0. Que font les valeurs à droite de 0 ? Et à gauche ?

Définition : Limite à droite, limite à gauche

Soit a un réel et h un réel strictement positif.

- Si f est définie sur $]a, a+h[$ et si $f(x)$ tend vers ℓ (un réel, $+\infty$ ou $-\infty$) quand x tend vers a en restant **strictement supérieur** à a, on dit que ℓ est la **limite à droite** de f en a. On écrit $\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$.
- Si f est définie sur $]a-h, a[$ et si $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a en restant **strictement inférieur** à a, on dit que ℓ est la **limite à gauche** de f en a. On écrit $\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$.

Exemple : la fonction inverse près de 0

x	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$0{,}001$	$0{,}01$
$\frac{1}{x}$	-100	$-1\,000$	$1\,000$	100

À droite de 0, les valeurs deviennent aussi grandes que l'on veut. On conjecture :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

À gauche de 0, elles deviennent aussi petites que l'on veut. On conjecture :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Les limites de référence en 0

Propriété : Limites de référence à droite et à gauche de 0

Pour tout entier naturel non nul n :

- $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$;
- $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$;
- si n est pair, $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$, donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$;
- si n est impair, $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$. En particulier, $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Retiens le signe : à gauche de 0, x^n est positif si n est pair, négatif si n est impair.

Vérifie : Une limite en 0 ?

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a-t-elle une limite en 0 ?

A. Oui : $+\infty$, car $\dfrac{1}{x}$ devient très grand près de 0.

Faux.

C'est seulement la limite à droite ; à gauche, on trouve $-\infty$.

B. Oui : 0, car x se rapproche de 0.

Faux.

Près de 0, les valeurs sont très grandes en valeur absolue, pas proches de 0.

C. Oui : $-\infty$, car le quotient devient très négatif.

Faux.

C'est seulement la limite à gauche ; à droite, on trouve $+\infty$.

D. Non : ses limites à droite et à gauche diffèrent.

Juste.

Juste : $+\infty$ à droite, $-\infty$ à gauche.

Correction

D'après les limites de référence, de chaque côté de 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Les deux côtés ne donnent pas la même limite : la fonction n'a pas de limite en 0.

La propriété suivante le dit en général.

Existence d'une limite

Propriété : Limite et limites à droite et à gauche

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a, sauf peut-être en a. Soit ℓ un réel, $+\infty$ ou $-\infty$. Alors $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ si et seulement si f admet une limite à droite et une limite à gauche en a, toutes deux égales à ℓ.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Une limite en a demande que les deux côtés donnent la même réponse.

À toi : Deux puissances près de 0

Étudie les limites à droite et à gauche en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{x^5}$, puis de $x \mapsto \dfrac{1}{x^6}$. Laquelle de ces deux fonctions a une limite en 0 ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Utilise les limites de référence à droite et à gauche de 0, selon la parité de l'exposant.
Indice 2
Compare ensuite, pour chaque fonction, la limite à droite et la limite à gauche.
Indice 3
Point délicat : pour $x < 0$, x^5 est négatif, mais x^6 est positif.

Réponse
Exposant 5. L'exposant est impair. D'après les limites de référence, de chaque côté de 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^5} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^5} = -\infty.$$

Ces limites diffèrent. D'après le lien entre limite et limites à droite et à gauche, $x \mapsto \dfrac{1}{x^5}$ n'a pas de limite en 0.

Exposant 6. L'exposant est pair : les deux limites valent $+\infty$. Donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6} = +\infty.$$

Conclusion. Des deux fonctions, seule $x \mapsto \dfrac{1}{x^6}$ a une limite en 0.

Attention : regarde les deux côtés

✗ « En 0, le dénominateur de $\frac{1}{x}$ tend vers 0. Donc $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$. »

✓ Un réel non nul divisé par une quantité qui tend vers 0 en gardant un signe constant donne une limite infinie. Mais ce signe dépend du côté.

Ici, $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ à droite de 0, et vers $-\infty$ à gauche. La fonction n'a donc pas de limite en 0.

Étudie toujours le signe du dénominateur des deux côtés.

Limites en +∞ et en −∞

Une concentration qui se stabilise

En clair. Un récipient contient 2 litres d'eau, où l'on a dissous 1 gramme de sel. On y verse x litres d'eau salée à 3 grammes par litre, avec $x \geq 0$.

Le récipient contient alors $1 + 3x$ grammes de sel dans $2 + x$ litres. Sa concentration, en grammes par litre, vaut $c(x) = \dfrac{3x + 1}{x + 2}$.

Que devient-elle si l'on verse beaucoup d'eau salée ?

Devine : Beaucoup d'eau salée

Quand x devient très grand, de quoi se rapproche la concentration $c(x)$?

A. De $\frac{1}{2}$ gramme par litre.

Faux.

C'est la concentration de départ, $c(0)$; elle change quand on verse.

B. Elle grandit sans fin.

Faux.

On ajoute du sel, mais aussi de l'eau : le mélange ne dépasse pas la concentration de l'eau versée.

C. De 3 grammes par litre.

Juste.

Juste : le mélange ressemble de plus en plus à l'eau salée versée.

D. De 0 gramme par litre.

Faux.

On ajoute du sel en même temps que de l'eau : le mélange ne se dilue pas.

Correction

x (litres)	10	100	$1\,000$	$10\,000$
$c(x)$	$2{,}5833$	$2{,}9510$	$2{,}9950$	$2{,}9995$

Valeurs arrondies à 10^{-4}. Elles se rapprochent de 3. On conjecture :

$$\lim_{x \to +\infty} c(x) = 3.$$

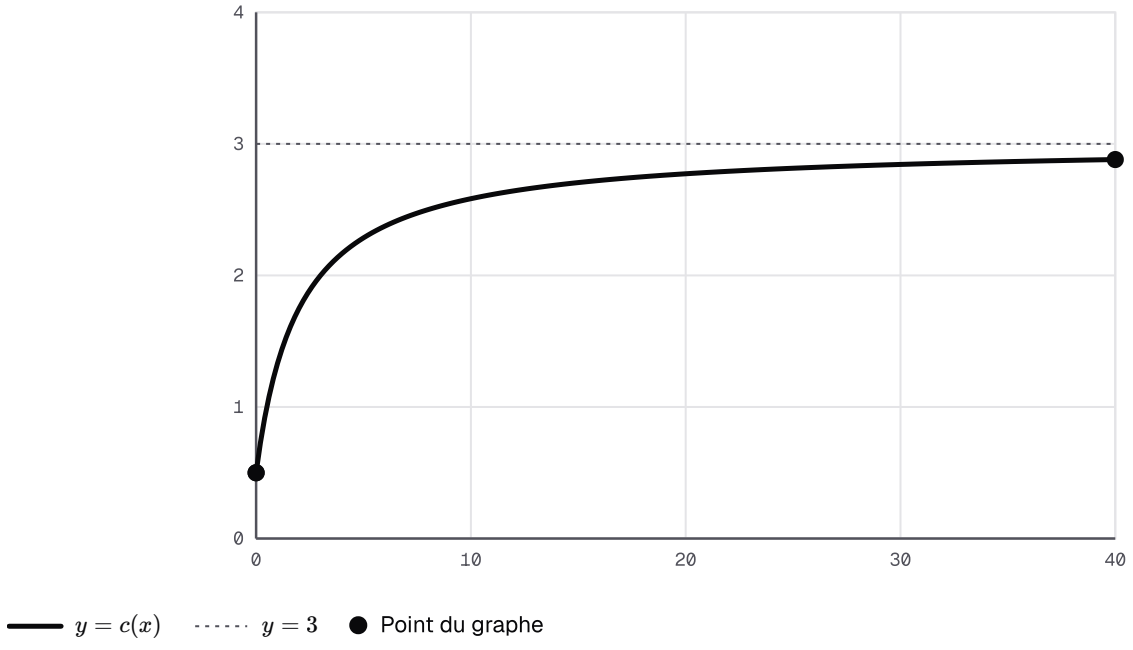
C'est la concentration de l'eau salée versée. Tu le justifieras par le calcul dans ce chapitre.

Définition : Limites en +∞ et en −∞

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[c, +\infty[$, où c est un réel, et ℓ un réel.

- On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ si $f(x)$ devient aussi proche de ℓ que l'on veut dès que x est assez grand. On écrit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand x tend vers $+\infty$ si $f(x)$ devient plus grand (respectivement plus petit) que n'importe quel réel fixé à l'avance dès que x est assez grand.

Pour une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, c]$, on définit de même la limite en $-\infty$, en remplaçant « x assez grand » par « x négatif et de valeur absolue assez grande ».



La concentration c(x) selon le volume x d'eau salée versé. De quelle droite horizontale la courbe se rapproche-t-elle ?

Les limites de référence à l'infini

Propriété : Limites de référence en +∞ et en −∞

Pour tout réel c et tout entier naturel non nul n :

- $\lim_{x\to+\infty} c = c$ et $\lim_{x\to-\infty} c = c$;
- $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n est pair, et $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ si n est impair ;
- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$;
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. En $-\infty$, le signe de x^n vient de la parité de n : c'est un produit de n facteurs négatifs.

Exemple : lire les limites de référence

D'après les limites de référence en $+\infty$ et en $-\infty$:

- $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, car 3 est impair ;
- $\lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$, car 4 est pair ;
- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Vérifier, puis à toi

Vérifie : En moins l'infini

Quelle est la limite de $\dfrac{1}{x^3}$ en $-\infty$?

A. $-\infty$

Faux.
C'est la limite de x^3 ; son inverse devient très petit en valeur absolue.

B. $+\infty$

Faux.
Ni x^3 ni son inverse ne deviennent grands et positifs en $-\infty$.

C. 1

Faux.
Le quotient $\dfrac{1}{x^3}$ se rapproche de 0, pas de 1.

D. 0

Juste.
Juste : d'après les limites de référence, $\dfrac{1}{x^n}$ tend vers 0 en $-\infty$.

Correction

D'après les limites de référence en $-\infty$, pour tout entier naturel n non nul :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Avec $n = 3$, on obtient $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$.

Les valeurs restent négatives : pour $x = -10$, $\dfrac{1}{x^3} = -\dfrac{1}{1\,000}$.

À toi : Quatre limites de référence

Donne $\lim_{x \to -\infty} x^5$, $\lim_{x \to -\infty} x^2$, $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}$ et $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Toutes figurent dans les limites de référence en $+\infty$ et en $-\infty$.
Indice 2
Pour une puissance en $-\infty$, regarde si l'exposant est pair ou impair.
Indice 3
Point délicat : $\sqrt{x}$ n'existe que pour $x \geq 0$; on ne l'étudie qu'en $+\infty$.

Réponse
D'après les limites de référence en $+\infty$ et en $-\infty$:

- $\lim_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$, car 5 est impair ;
- $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$, car 2 est pair ;
- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$;
- $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

Opérations sur les limites ; formes indéterminées

Somme et produit

En clair. Si $f(x)$ est proche de 2 et $g(x)$ proche de 5, alors $f(x) + g(x)$ est proche de 7, et le produit $f(x) \times g(x)$ est proche de 10.

Si $f(x)$ devient très grand et $g(x)$ reste proche de 5, la somme devient très grande.

Mais si un facteur devient très grand et l'autre très petit, rien n'est joué d'avance.

Devine : Grand fois petit

En $+\infty$, x tend vers $+\infty$ et $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0. Vers quoi tend le produit $x \times \dfrac{1}{x}$?

A. Vers 0, car un facteur tend vers 0.
Faux.

Le facteur x devient très grand en même temps : le produit ne s'écrase pas.

B. Vers 1, car ce produit vaut 1.

Juste.

Juste : $x \times \dfrac{1}{x} = 1$ pour tout $x \neq 0$.

C. Vers $+\infty$, car un facteur tend vers $+\infty$.

Faux.

Le facteur $\dfrac{1}{x}$ compense exactement x.

D. Vers rien : ce produit n'a pas de limite.

Faux.

Une fonction constante a une limite : sa valeur.

Correction

Pour tout réel $x \neq 0$:

$$x \times \frac{1}{x} = 1.$$

Ce produit est constant : sa limite en $+\infty$ est 1.

Avec $x \times \dfrac{2}{x} = 2$, on trouverait 2, pour des facteurs de mêmes limites. Savoir qu'un facteur tend vers 0 et l'autre vers $+\infty$ ne suffit donc pas.

C'est la forme indéterminée « $0 \times (+\infty)$ ».

Propriété : Limite d'une somme et d'un produit

Soit f et g deux fonctions qui ont une limite en a, où a désigne l'endroit où l'on cherche la limite : un réel, la droite ou la gauche d'un réel (a^+ ou a^-), $+\infty$ ou $-\infty$. Soit ℓ et ℓ' deux réels.

- **Somme.** Si f et g tendent vers ℓ et ℓ', alors $f+g$ tend vers $\ell+\ell'$. Si f tend vers ℓ ou vers $+\infty$, et g vers $+\infty$, alors $f+g$ tend vers $+\infty$; de même avec $-\infty$. Si f tend vers $+\infty$ et g vers $-\infty$: **forme indéterminée**.
- **Produit.** Si f et g tendent vers ℓ et ℓ', alors $f \times g$ tend vers $\ell\ell'$. Si f tend vers $\ell \neq 0$, vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, et g vers $+\infty$ ou $-\infty$, alors $f \times g$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, selon la règle des signes. Si f tend vers 0 et g vers $+\infty$ ou $-\infty$: **forme indéterminée**.
- En particulier, pour tout réel k : si f tend vers ℓ, alors kf tend vers $k\ell$; si $k \neq 0$ et si f tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, alors kf tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, selon la règle des signes.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Ces règles prolongent les calculs sur les réels, avec deux formes à part : « $+\infty - \infty$ » et « $0 \times (+\infty)$ ».

Exemple : sommes et produits

En 2. D'après les limites de référence, $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$. D'après la limite d'un produit par un réel, $\lim_{x\to 2} 3x = 6$. D'après la limite d'une somme :

$$\lim_{x\to 2}(x^2 + 3x) = 10.$$

En $+\infty$. Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ tendent vers $+\infty$. D'après la limite d'une somme, $\lim_{x\to+\infty}(x^2 + \sqrt{x}) = +\infty$.

En $-\infty$. La fonction $x \mapsto x^3$ tend vers $-\infty$. D'après la limite d'un produit par le réel -4, qui est strictement négatif :

$$\lim_{x\to-\infty}(-4x^3) = +\infty.$$

Quotient

En clair. Divise 3 par des nombres positifs de plus en plus proches de 0 : $\dfrac{3}{0{,}01} = 300$, puis $\dfrac{3}{0{,}001} = 3\,000$. Le quotient devient aussi grand que l'on veut.

Avec $-0{,}001$, on obtient $-3\,000$: le signe du dénominateur décide.

On écrit 0^+ quand on s'approche de 0 par valeurs positives, et 0^- par valeurs négatives.

Propriété : Limite d'un quotient

Soit f et g deux fonctions qui ont une limite en a, où a désigne l'endroit où l'on cherche la limite : un réel, la droite ou la gauche d'un réel (a^+ ou a^-), $+\infty$ ou $-\infty$, avec $g(x) \neq 0$. Soit ℓ et ℓ' deux réels.

- Si f tend vers ℓ et g vers $\ell' \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ tend vers $\dfrac{\ell}{\ell'}$.
- Si f tend vers ℓ et g vers $+\infty$ ou $-\infty$, alors $\dfrac{f}{g}$ tend vers 0.
- Si f tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, et g vers $\ell' \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, selon la règle des signes.
- Si f tend vers $\ell \neq 0$, vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, et g vers 0 en gardant un signe constant, alors $\dfrac{f}{g}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, selon la règle des signes. On note 0^+ une limite nulle atteinte par valeurs strictement positives, 0^- par valeurs strictement négatives.

- Si f et g tendent vers 0, ou si f et g tendent toutes deux vers $+\infty$ ou $-\infty$: **forme indéterminée**.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. La règle des signes s'applique comme pour un quotient de deux réels.

Exemple : un réel non nul sur 0

Étudions $\dfrac{x-3}{x}$ près de 0. D'après les limites de référence et la limite d'une somme, le numérateur tend vers -3. Le dénominateur tend vers 0.

À droite de 0. On a $x > 0$: le dénominateur tend vers 0^+. D'après la limite d'un quotient, un négatif sur un positif donne :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x-3}{x} = -\infty.$$

À gauche de 0. On a $x < 0$: le dénominateur tend vers 0^-. D'après la limite d'un quotient, un négatif sur un négatif donne :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x-3}{x} = +\infty.$$

À retenir : les opérations en bref

Opération	Ce qui conclut	Forme indéterminée
Somme	$\ell + (+\infty) = +\infty$; $+\infty + (+\infty) = +\infty$	« $+\infty - \infty$ »
Produit	un réel non nul, ou un infini, fois un infini : un infini, signé par la règle des signes	« $0 \times (+\infty)$ »
Quotient	un réel sur un infini : 0 ; un réel non nul sur 0^+ ou 0^- : un infini, signé par la règle des signes	« $\dfrac{0}{0}$ » et « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ »

Dans chaque calcul, nomme la règle employée : limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient.

Les formes indéterminées

Vérifie : Repérer une forme indéterminée

En $+\infty$, laquelle de ces expressions conduit à une forme indéterminée par les opérations ?

A. $x + \sqrt{x}$

Faux.
Somme de deux termes qui tendent vers $+\infty$: la limite est $+\infty$.

B. $x \times \sqrt{x}$
Faux.
Produit de deux limites $+\infty$: la limite est $+\infty$.

C. $\sqrt{x} - x$
Juste.
Juste : $\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$ et $-x$ vers $-\infty$.

D. $\dfrac{1}{x} - x$
Faux.
Somme d'une limite nulle et de $-\infty$: la limite est $-\infty$.

Correction
En $+\infty$, $\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$ et $-x$ vers $-\infty$. La limite d'une somme ne conclut pas : c'est la forme « $+\infty - \infty$ ».

Les trois autres expressions se traitent directement, par la limite d'une somme ou d'un produit.

Attention : une forme indéterminée n'est pas un résultat

✗ « En $+\infty$, x^2 et x tendent vers $+\infty$. Donc $x^2 - x$ tend vers 0. »

✓ La forme « $+\infty - \infty$ » ne vaut pas 0 : elle oblige à transformer l'expression.

Ici, pour tout réel x, $x^2 - x = x(x-1)$. En $+\infty$, les deux facteurs tendent vers $+\infty$; d'après la limite d'un produit, $x^2 - x$ tend vers $+\infty$.

Avec les mêmes limites, $x - x^2 = -x(x-1)$ tend vers $-\infty$.

Méthode : calculer une limite par les opérations

1. **Découpe** l'expression en sommes, produits et quotients de fonctions de référence.
2. **Écris** la limite de chacun de ces morceaux.
3. **Applique** la règle de la somme, du produit ou du quotient, et **nomme-la** dans ta phrase.
4. **Transforme** l'expression si tu tombes sur une forme indéterminée : factorisation, terme de plus haut degré ou quantité conjuguée. Puis recommence.

Exemple : lever une forme indéterminée en factorisant

En $+\infty$, $x - \sqrt{x}$ est de la forme « $+\infty - \infty$ ».

Factorisation. Pour $x \geq 0$, on a $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$, donc :

$$x - \sqrt{x} = \sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 1).$$

Limite. D'après les limites de référence, $\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$. D'après la limite d'une somme, $\sqrt{x} - 1$ tend aussi vers $+\infty$. D'après la limite d'un produit :

$$\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x}) = +\infty.$$

À toi : Nommer les règles

Calcule $\lim_{x \to -\infty} \left(x^3 + \dfrac{1}{x} \right)$, puis $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$. Nomme chaque règle employée. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris d'abord la limite de chaque morceau, d'après les limites de référence.

Indice 2

La première expression est une somme ; la seconde, un quotient dont le dénominateur tend vers 0.

Indice 3

Point délicat : $\sqrt{x}$ est positif, donc il tend vers 0^+ ; le signe du quotient en découle.

Réponse

Première limite. D'après les limites de référence, en $-\infty$, x^3 tend vers $-\infty$ et $\dfrac{1}{x}$ vers 0. D'après la limite d'une somme :

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x^3 + \frac{1}{x} \right) = -\infty.$$

Seconde limite. À droite de 0, $x + 1$ tend vers 1, d'après la limite d'une somme. D'après les limites de référence, $\sqrt{x}$ tend vers 0^+. D'après la limite d'un quotient :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x+1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Polynômes et fonctions rationnelles en un point

Remplacer quand c'est permis

Devine : Un quotient en un réel

Que vaut $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 1}{3x - 1}$?

A. 1

Juste.

Juste : $\dfrac{4+1}{6-1} = \dfrac{5}{5} = 1.$

B. 5

Faux.
C'est la limite du numérateur seul ; il faut diviser par celle du dénominateur.

C. $\frac{5}{7}$
Faux.
Le dénominateur vaut $3 \times 2 - 1 = 5$ en 2, pas 7.

D. Pas de limite : c'est un quotient.
Faux.
Un quotient a une limite quand le dénominateur ne tend pas vers 0.

Correction
Le numérateur tend vers $2^2 + 1 = 5$. Le dénominateur tend vers $3 \times 2 - 1 = 5$, qui est non nul.

D'après la limite d'un quotient, la limite vaut $\frac{5}{5} = 1$: on a simplement remplacé x par 2.

La propriété suivante généralise ce calcul.

Propriété : Polynômes et fonctions rationnelles en un point

Soit a un réel.

- Si P est un polynôme, alors $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$.
- Si P et Q sont deux polynômes et si $Q(a) \neq 0$, alors $\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$.

Démonstration
Idée de la preuve. Un polynôme est une somme de termes de la forme $c\,x^k$, où c est un réel et k un entier naturel. D'après les limites de référence en un point, chaque x^k tend vers a^k quand x tend vers a ; la limite d'un produit par un réel donne $c\,a^k$, et la limite d'une somme donne $P(a)$. Pour le quotient, $Q(x)$ tend vers $Q(a) \neq 0$; on admet aussi que $Q(x)$, non nul en a, ne s'annule pas pour x assez proche de a ; alors la limite d'un quotient donne $\frac{P(a)}{Q(a)}$. Ces vérifications, terme à terme, ne sont pas détaillées ici.

Exemple : remplacer x par le réel

Polynôme. D'après la limite d'un polynôme en un point :

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to -1} (2x^3 - x + 5) \\ &= 2 \times (-1)^3 - (-1) + 5 \\ &= -2 + 1 + 5 = 4. \end{aligned}$$

Fonction rationnelle. Le dénominateur de $\frac{x^2 - 4x}{x + 3}$ vaut 1 en -2 : il ne s'annule pas. D'après la limite d'une fonction rationnelle en un point :

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4x}{x + 3} = \frac{4 + 8}{1} = 12.$$

La forme 0 sur 0

Méthode : lever la forme 0 sur 0 en factorisant

1. **Vérifie** que le numérateur et le dénominateur s'annulent tous deux en a : c'est la forme « $\frac{0}{0}$ ».
2. **Factorise** chacun par $x - a$: le réel a les annule, on dit qu'il en est une racine.
3. **Simplifie** par $x - a$: c'est permis, puisque $x \neq a$ quand on cherche la limite.
4. **Calcule** la limite de l'expression simplifiée, en général en remplaçant x par a.

Exemple : Exemple guidé : une forme 0 sur 0

Cherchons $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$.

Forme. En 2, le numérateur vaut $4 + 2 - 6 = 0$, et le dénominateur aussi : c'est la forme « $\frac{0}{0}$ ».

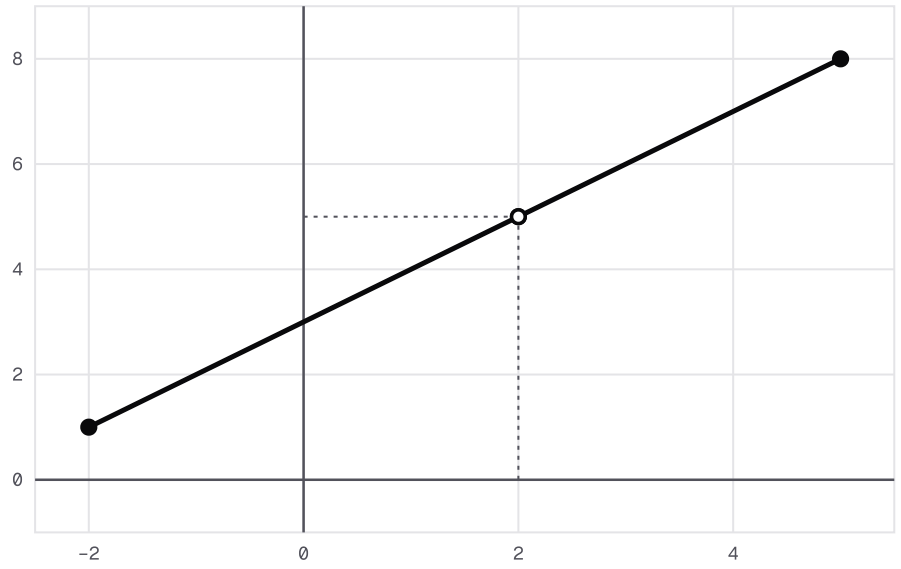
Rappel. Une racine d'un polynôme est un réel qui l'annule. Ici, 2 est une racine de $x^2 + x - 6$.

Factorisation. On cherche donc un réel b tel que $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + b)$. Les termes constants donnent $-2b = -6$, d'où $b = 3$. En développant, on vérifie que $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$.

Simplification. Pour $x \neq 2$:

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3.$$

Conclusion. D'après la limite d'un polynôme en un point, $\lim_{x \to 2}(x + 3) = 5$. Donc $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$.



$y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ ○ Point creux $(2, 5)$ ● Point du graphe ○ Point exclu du graphe

La courbe de la fonction de l'exemple guidé, privée du point d'abscisse 2. Repère le point creux et sa hauteur.

Point creux en x = 2, à l'ordonnée estimée ≈ 5 : ce point n'appartient pas à la courbe.

Point creux en x = 2, à l'ordonnée estimée ≈ 5 : limite à droite estimée numériquement.

Un réel non nul sur 0 ; comparer les côtés

Méthode : un réel non nul sur 0

1. **Constate** que le numérateur tend vers un réel non nul, et le dénominateur vers 0.
2. **Dresse** le tableau de signes du dénominateur près de a, à droite et à gauche.
3. **Conclus** de chaque côté par la limite d'un quotient et la règle des signes : $+\infty$ ou $-\infty$.
4. **Compare** : avec deux limites latérales différentes, f n'admet aucune limite en a.

Exemple : limites à droite et à gauche de 2

Étudions $\dfrac{x+1}{x-2}$ près de 2. D'après la limite d'un polynôme en un point, le numérateur tend vers 3, qui n'est pas nul, et le dénominateur vers 0.

x	$x < 2$	2	$x > 2$
signe de $x - 2$	$-$	0	$+$

À droite de 2. Le dénominateur $x - 2$ tend vers 0^+. D'après la limite d'un quotient :

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty.$$

À gauche de 2. Le dénominateur $x-2$ tend vers 0^-. D'après la limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty.$$

Conclusion. À droite $+\infty$, à gauche $-\infty$: d'après le lien entre limite et limites latérales, la fonction n'admet aucune limite en 2.

Vérifie : Un carré au dénominateur

Que vaut $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x+2}{(x-1)^2}$?

A. $-\infty$, car on est à gauche de 1.

Faux.

À gauche de 1, $x-1<0$, mais son carré est positif.

B. 0, car le dénominateur tend vers 0.

Faux.

Diviser par une quantité qui tend vers 0 donne une limite infinie, pas nulle.

C. $+\infty$, car le carré reste positif.

Juste.

Juste : $(x-1)^2$ tend vers 0^+, et le numérateur vers 3.

D. Pas de limite : les côtés diffèrent.

Faux.

On ne demande que la limite à gauche ; à droite, on trouverait d'ailleurs aussi $+\infty$.

Correction

D'après la limite d'un polynôme en un point, $x+2$ tend vers 3 et $(x-1)^2$ vers 0.

Pour $x\neq 1$, $(x-1)^2>0$: le dénominateur tend vers 0^+. D'après la limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+2}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Exemple : une fonction définie par morceaux

Soit m un réel. On définit g sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par :

$$g(x)=\begin{cases} x^2+m & \text{si } x<2 \\ 3x-1 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

- À gauche de 2, $g(x)=x^2+m$. D'après la limite d'un polynôme en un point, $\lim_{x\to 2^-} g(x) = 4+m$.
- À droite de 2, $g(x)=3x-1$. D'après la même propriété, $\lim_{x\to 2^+} g(x) = 5$.

Conclusion. D'après le lien entre limite et limites latérales, g a une limite en 2 si et seulement si $4 + m = 5$, soit $m = 1$. Cette limite vaut alors 5.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Une fraction, deux réels

Soit $h(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$. Calcule $\lim_{x \to 1} h(x)$, puis les limites de h à droite et à gauche de -1. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
En 1, le numérateur et le dénominateur s'annulent : factorise-les tous les deux par $x - 1$.
Indice 2
En -1, le numérateur tend vers 6 : étudie le signe de $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ près de -1.
Indice 3
Point délicat : près de -1, le facteur $x - 1$ est négatif ; il change le signe donné par $x + 1$.

Réponse
Factorisation. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= (x - 1)(x - 2), \\ x^2 - 1 &= (x - 1)(x + 1). \end{aligned}$$

Pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$, on simplifie par $x - 1$:

$$h(x) = \frac{x - 2}{x + 1}.$$

Limite en 1. D'après la limite d'une fonction rationnelle en un point :

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Près de -1. Le numérateur de h tend vers $1 + 3 + 2 = 6$, et le dénominateur vers 0. Près de -1, $x - 1 < 0$. Donc $x^2 - 1 > 0$ pour $x < -1$, et $x^2 - 1 < 0$ pour $-1 < x < 1$.

D'après la limite d'un quotient, à gauche puis à droite de -1 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1^-} h(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \to -1^+} h(x) &= -\infty. \end{aligned}$$

Remarque : Coin devoir : rédiger une forme 0 sur 0

En devoir, chaque étape s'écrit. Rédige ainsi :

« En 2, le numérateur et le dénominateur s'annulent : forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». Pour $x \neq 2$, $\frac{x^2+x-6}{x-2} = x+3$. D'après la limite d'un polynôme en un point, $x+3$ tend vers 5 : c'est la limite cherchée. »

N'oublie jamais la condition $x \neq 2$ avant de simplifier.

Polynômes et fonctions rationnelles à l'infini

Le terme qui l'emporte

Devine : Qui l'emporte ?

En $+\infty$, l'expression $x^3 - 100x^2$ est de la forme « $+\infty - \infty$ ». Que prévois-tu pour sa limite ?

A. 0, car les deux termes se compensent.

Faux.
Les deux termes ne grandissent pas au même rythme.

B. $-\infty$, car le coefficient 100 est grand.

Faux.
Le coefficient 100 pèse peu face à une puissance plus élevée de x.

C. Rien : c'est une forme indéterminée.

Faux.
Une forme indéterminée se lève : on transforme l'expression.

D. $+\infty$, car x^3 grandit plus vite.

Juste.
Juste : pour $x = 1\,000$, l'expression vaut déjà 9×10^8.

Correction
Pour $x = 10$:

$$\begin{aligned} x^3 - 100x^2 &= 1\,000 - 10\,000 \\ &= -9\,000. \end{aligned}$$

Pour $x = 1\,000$, elle vaut $10^9 - 10^8 = 9 \times 10^8$.

Pour $x > 100$, elle est positive, et elle grandit très vite : on conjecture la limite $+\infty$. La raison : x^3 l'emporte sur $100x^2$.

Pourquoi est-ce vrai ? Pour $x \neq 0$, on met le terme de plus haut degré en facteur :

$$x^3 - 100x^2 = x^3\left(1 - \frac{100}{x}\right).$$

En $+\infty$, la parenthèse se rapproche de 1, et x^3 devient très grand. Le produit se comporte donc comme x^3.

La propriété suivante étend cette idée à tout polynôme.

Propriété : Limite d'un polynôme en +∞ et en −∞

Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré $n \geq 1$, avec $a_n \neq 0$. Alors

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n.$$

En $+\infty$ et en $-\infty$, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré.

Démonstration

Étape 1. Pour tout réel $x \neq 0$, on met le terme de plus haut degré en facteur : $P(x) = a_n x^n \, u(x)$, avec $u(x) = 1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \dfrac{a_0}{a_n x^n}$.

Étape 2. Chaque quotient $\dfrac{a_k}{a_n x^{n-k}}$, avec $k < n$, est le produit du réel $\dfrac{a_k}{a_n}$ par $\dfrac{1}{x^{n-k}}$, qui tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$ d'après les limites de référence. La limite d'une somme donne donc $\lim u(x) = 1$.

Étape 3. D'après les limites de référence, x^n tend vers $+\infty$ ou $-\infty$; la limite d'un produit par le réel $a_n \neq 0$ donne la limite infinie de $a_n x^n$.

Étape 4. Le produit d'une fonction de limite infinie par $u(x)$, qui tend vers $1 > 0$, a la même limite, d'après la règle des signes : $P(x)$ et $a_n x^n$ ont la même limite.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On met le terme de plus haut degré en facteur. Les autres termes, divisés par lui, donnent des quotients du type $\dfrac{c}{x^k}$, avec $k \geq 1$, qui tendent vers 0.

La parenthèse tend donc vers 1. La limite d'un produit fait le reste : le polynôme se comporte comme son terme de plus haut degré.

Vérifie : La parenthèse, en chiffres

On a écrit $x^3 - 100x^2 = x^3\left(1 - \dfrac{100}{x}\right)$. Pour $x = 10\,000$, que vaut la parenthèse ?

A. $0{,}01$

Faux.

C'est la valeur de $\dfrac{100}{x}$; il faut encore la retrancher à 1.

B. -99

Faux.

Ce serait $1 - 100$: on a oublié de diviser 100 par x.

C. $0{,}99$

Juste.

Juste : $1 - 0{,}01 = 0{,}99$, tout près de 1.

D. 100

Faux.
Le terme $\dfrac{100}{x}$ devient petit quand x grandit, pas grand.

Correction
Pour $x = 10\,000$, $\dfrac{100}{x} = 0{,}01$, donc la parenthèse vaut $0{,}99$.

Plus x grandit, plus elle se rapproche de 1.

C'est l'idée de la mise en facteur : il reste x^3 multiplié par un nombre proche de 1.

Un exemple, puis les quotients

Exemple : un polynôme aux deux infinis

Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = -2x^3 + 5x^2 + 1$. Son terme de plus haut degré est $-2x^3$.

En $+\infty$. D'après la limite d'un polynôme en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} (-2x^3) = -\infty,$$

car x^3 tend vers $+\infty$ et $-2 < 0$.

En $-\infty$. D'après la limite d'un polynôme en $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} (-2x^3) = +\infty,$$

car x^3 tend vers $-\infty$ et $-2 < 0$.

Le terme $5x^2$, pourtant positif, ne change pas la limite en $+\infty$.

Pourquoi est-ce vrai ? En $+\infty$, un quotient de deux polynômes est en général de la forme « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ ».

Mets en facteur le terme de plus haut degré en haut, puis en bas. Les deux parenthèses tendent vers 1.

Il reste le quotient des termes de plus haut degré, qui se simplifie.

Propriété : Limite d'une fonction rationnelle en +∞ et en −∞

Soit P et Q deux polynômes non nuls, de termes de plus haut degré $a_n x^n$ et $b_m x^m$, avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. Alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

En $+\infty$ et en $-\infty$, une fonction rationnelle a la même limite que le quotient des termes de plus haut degré.

Démonstration

Étape 1. Comme pour un polynôme, pour tout réel $x \neq 0$: $P(x) = a_n x^n \, u(x)$ et $Q(x) = b_m x^m \, v(x)$, où $u(x)$ et $v(x)$ tendent vers 1 en $+\infty$ et en $-\infty$ (pour un polynôme constant, on prend $u = 1$ ou $v = 1$).

Étape 2. D'après la définition d'une limite en $+\infty$ et en $-\infty$, $v(x)$ est aussi proche de 1 que l'on veut pour x assez grand en valeur absolue ; en particulier $v(x) > \dfrac{1}{2}$, donc $v(x) \neq 0$ et $Q(x) \neq 0$. Alors $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m} \times \dfrac{u(x)}{v(x)}$, et la limite d'un quotient donne $\lim \dfrac{u(x)}{v(x)} = 1$.

Étape 3. Pour $x \neq 0$, le quotient $\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$ vaut $\dfrac{a_n}{b_m}$ si $n = m$, $\dfrac{a_n}{b_m} \, x^{n-m}$ si $n > m$, et $\dfrac{a_n}{b_m} \times \dfrac{1}{x^{m-n}}$ si $n < m$. D'après les limites de référence et la limite d'un produit par un réel, sa limite est $\dfrac{a_n}{b_m}$, une limite infinie ou 0. La limite d'un produit par $\dfrac{u(x)}{v(x)}$, qui tend vers 1, la conserve.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On factorise le numérateur et le dénominateur par leurs termes de plus haut degré. Les deux facteurs restants tendent vers 1, donc leur quotient aussi.

Il reste à simplifier $\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$. Sa limite est :

- $\dfrac{a_n}{b_m}$ si $n = m$;
- 0 si $n < m$;
- infinie si $n > m$.

On l'appelle la règle du terme de plus haut degré.

Vérifie : Le quotient, en chiffres

Pour $x = 1\,000$, que vaut le quotient $\dfrac{4x^2 - 1}{2x^2 + x}$?

A. $1{,}999$

Juste.

Juste : il vaut $\dfrac{3\,999\,999}{2\,001\,000} = 1{,}999$, tout près de 2.

B. $2\,000$

Faux.

Le numérateur et le dénominateur grandissent ensemble : leur quotient reste modéré.

C. $0{,}5$

Faux.

C'est le quotient $\dfrac{2x^2}{4x^2}$, pris à l'envers.

D. 4

Faux.

Le dénominateur compte aussi : $2x^2$ divise $4x^2$.

Correction

Pour $x = 1\,000$, le numérateur vaut $3\,999\,999$ et le dénominateur $2\,001\,000$: le quotient vaut $1{,}999$.

Les termes -1 et x pèsent peu devant $4x^2$ et $2x^2$.

C'est pourquoi on garde le quotient des termes de plus haut degré, $\dfrac{4x^2}{2x^2} = 2$.

Trois cas de degrés

Exemple : trois cas de degrés

D'après la limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$:

Même degré en haut et en bas.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - 1}{2x^2 + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = 2.$$

Degré plus petit en haut.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 3}{x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Degré plus grand en haut.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2}{5x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{5x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{5} = +\infty.$$

Méthode : un polynôme ou une fraction rationnelle à l'infini

1. **Repère** le terme de plus haut degré : celui du polynôme, ou ceux du numérateur et du dénominateur.

2. **Écris** la limite cherchée comme celle de ce terme, ou du quotient des deux termes, en citant la propriété.
3. **Simplifie** ce quotient de puissances de x.
4. **Conclus** avec les limites de référence en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Attention : en un réel, aucun terme ne domine

✗ « En 0, $\dfrac{x^2+3x}{2x}$ a la même limite que $\dfrac{x^2}{2x}=\dfrac{x}{2}$. Donc elle tend vers 0. »

✓ Garder les seuls termes de plus haut degré n'est permis qu'en $+\infty$ et en $-\infty$.

En 0, on simplifie par $x\neq 0$: $\dfrac{x^2+3x}{2x}=\dfrac{x+3}{2}$. D'après la limite d'un polynôme en un point, ce quotient tend vers $\dfrac{3}{2}$.

À toi, puis le coin devoir

À toi : La concentration, justifiée

Justifie la conjecture faite sur la concentration : calcule $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{x+2}$. Calcule aussi $\lim_{x\to-\infty}(x^4-7x^3+2)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Applique la propriété des fonctions rationnelles en $+\infty$, puis celle des polynômes en $-\infty$.

Indice 2

Le quotient des termes de plus haut degré est $\dfrac{3x}{x}$; le polynôme a pour terme de plus haut degré x^4.

Indice 3

Point délicat : en $-\infty$, x^4 tend vers $+\infty$, car l'exposant est pair.

Réponse

Concentration. D'après la limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x}=3.$$

La concentration se rapproche bien de 3 grammes par litre.

Polynôme. D'après la limite d'un polynôme en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^4-7x^3+2)=\lim_{x\to-\infty}x^4=+\infty.$$

Remarque : Coin devoir : rédiger une limite à l'infini

En devoir, cite la propriété avant de simplifier. Écris :

« D'après la limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$, la limite cherchée est celle de $\frac{4x^2}{2x^2}$, soit 2. »

N'emploie jamais cette règle en un réel : elle ne vaut qu'à l'infini.

Racine carrée ; quantité conjuguée

La racine d'une limite

En clair. Si $f(x)$ se rapproche de 9, alors $\sqrt{f(x)}$ se rapproche de 3. Si $f(x)$ devient très grand, sa racine aussi, plus lentement.

Mais une différence entre une racine et une autre quantité peut cacher une forme « $+\infty - \infty$ ».

Rappel. Pour tout réel $A \geq 0$ et tout réel B :

$$(\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2.$$

Devine : Deux racines voisines

En $+\infty$, $\sqrt{x+9}$ et $\sqrt{x}$ tendent toutes deux vers $+\infty$. Que prévois-tu pour $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+9} - \sqrt{x}\right)$?

A. 3, car $\sqrt{9} = 3$.
Faux.
La racine d'une somme n'est pas la somme des racines : pour $x > 0$, $\sqrt{x+9} \neq \sqrt{x} + 3$.

B. 0, car les racines se rapprochent.
Juste.
Juste : leur écart s'écrase quand x grandit.

C. $+\infty$, car chaque racine grandit.
Faux.
C'est une forme « $+\infty - \infty$ » : on ne peut pas conclure si vite.

D. 9, car $(x+9) - x = 9$.
Faux.
Ce calcul porte sur les nombres sous les racines, pas sur les racines.

Correction
Pour $x \geq 0$, on multiplie et on divise par la quantité conjuguée $\sqrt{x+9} + \sqrt{x}$, qui est strictement positive :

$$\begin{aligned}&\sqrt{x+9}-\sqrt{x}\\&=\frac{(x+9)-x}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}\\&=\frac{9}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Le dénominateur devient aussi grand que l'on veut, et le numérateur reste égal à 9. Le quotient se rapproche donc de 0.

Propriété : Limite de la racine carrée d'une fonction

Soit f une fonction positive ou nulle là où on l'étudie, qui a une limite en a, où a désigne l'endroit où l'on cherche la limite : un réel, la droite ou la gauche d'un réel (a^+ ou a^-), $+\infty$ ou $-\infty$.

- Si f tend vers un réel ℓ positif ou nul, alors $\sqrt{f}$ tend vers $\sqrt{\ell}$.
- Si f tend vers $+\infty$, alors $\sqrt{f}$ tend vers $+\infty$.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Il donne la limite d'une racine à partir de celle de la quantité sous la racine.

Exemple : des racines sans forme indéterminée

En 4. D'après la limite d'un polynôme en un point, $x+5$ tend vers 9 quand x tend vers 4. D'après la limite de la racine carrée d'une fonction :

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x+5}=\sqrt{9}=3.$$

En $+\infty$. D'après la limite d'un polynôme en $+\infty$, $2x^2+1$ tend vers $+\infty$. D'après la limite de la racine carrée d'une fonction :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+1}=+\infty.$$

La quantité conjuguée

Méthode : utiliser la quantité conjuguée

1. **Repère** une forme indéterminée qui contient une racine carrée, par exemple une différence $\sqrt{A}-B$.
2. **Multiplie** le haut et le bas par l'expression conjuguée $\sqrt{A}+B$.
3. **Développe** le numérateur : $(\sqrt{A}-B)(\sqrt{A}+B)=A-B^2$, pour $A\geq 0$.
4. **Simplifie**, puis conclus par les opérations sur les limites.

Exemple : Exemple guidé : une différence en plus l'infini

En $+\infty$, $\sqrt{x^2+x}-x$ est de la forme « $+\infty-\infty$ ».

Quantité conjuguée. Pour $x>0$, on multiplie et on divise par $\sqrt{x^2+x}+x$, qui est strictement positif :

$$\begin{aligned}&\sqrt{x^2+x}-x\\&=\frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}\\&=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}.\end{aligned}$$

Racine du dénominateur. Pour $x>0$, on fait sortir x^2 de la racine :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x}&=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\\&=\sqrt{x^2}\times\sqrt{1+\frac{1}{x}}\\&=x\sqrt{1+\frac{1}{x}},\end{aligned}$$

car $\sqrt{x^2}=x$ quand $x>0$.

Simplification. On simplifie alors par x :

$$\sqrt{x^2+x}-x=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}.$$

Limite. D'après les limites de référence et la limite d'une somme, $1+\frac{1}{x}$ tend vers 1. D'après la limite de la racine carrée d'une fonction, puis d'un quotient, la limite vaut $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

Exemple : une forme 0 sur 0 avec une racine

En 0, $\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ est de la forme « $\frac{0}{0}$ ».

Quantité conjuguée. Pour $x\geq-1$ et $x\neq0$, on multiplie le haut et le bas par $\sqrt{x+1}+1$, qui est strictement positif :

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\\&=\frac{(x+1)-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}\\&=\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}.\end{aligned}$$

Limite. D'après la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{x+1}$ tend vers 1. D'après la limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\frac{1}{2}.$$

À toi, puis le coin devoir

À toi : Avec une racine

Calcule $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$, puis $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Les deux limites sont des formes indéterminées, « $\dfrac{0}{0}$ » puis « $+\infty-\infty$ » : multiplie par une quantité conjuguée.

Indice 2

Pour la première, utilise $\sqrt{x+6}+3$; pour la seconde, $\sqrt{x^2+4}+x$.

Indice 3

Point délicat : dans la seconde, le numérateur devient le réel 4 ; seul le dénominateur grandit.

Réponse

Première limite. Pour $x\geq -6$ et $x\neq 3$, on multiplie le haut et le bas par $\sqrt{x+6}+3$:

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}\\&=\frac{(x+6)-9}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}\\&=\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}.\end{aligned}$$

D'après la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{x+6}$ tend vers 3. D'après la limite d'un quotient, la limite vaut $\dfrac{1}{6}$.

Seconde limite. Pour $x>0$, on multiplie de même par $\sqrt{x^2+4}+x$:

$$\begin{aligned}&\sqrt{x^2+4}-x\\&=\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}.\end{aligned}$$

D'après la limite d'une somme, x^2+4 tend vers $+\infty$. D'après la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{x^2+4}$ aussi, puis le dénominateur. D'après la limite d'un quotient :

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\\&=0.\end{aligned}$$

Remarque : Coin devoir : rédiger une quantité conjuguée

En devoir, justifie chaque transformation. Écris :

« Pour $x > 0$, la quantité conjuguée donne $\sqrt{x^2+x} - x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$. Comme $\sqrt{x^2} = x$ pour $x > 0$, ce quotient vaut $\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$. »

Nomme ensuite les règles : limites de référence, somme, racine carrée, quotient.

La limite de sin x / x en 0

Observer près de 0

En clair. Règle ta calculatrice en radians.

Le quotient $\dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas défini en 0 : il y prend la forme « $\dfrac{0}{0}$ ». Aucune factorisation ne s'applique, car $\sin x$ n'est pas un polynôme.

On commence donc par observer.

Devine : Sinus sur x

Quand x se rapproche de 0, de quoi se rapprochent les valeurs de $\dfrac{\sin x}{x}$?

A. De 0, car $\sin x$ tend vers 0.

Faux.

Le dénominateur tend aussi vers 0 : forme « $\dfrac{0}{0}$ ».

B. De $+\infty$, car on divise par presque 0.

Faux.

Le numérateur est lui aussi proche de 0.

C. D'aucun réel : on divise par 0.

Faux.

On ne divise jamais par 0 : $x \neq 0$.

D. De 1, car $\sin x$ est presque égal à x.

Juste.

Juste : près de 0, $\sin x$ et x sont très proches.

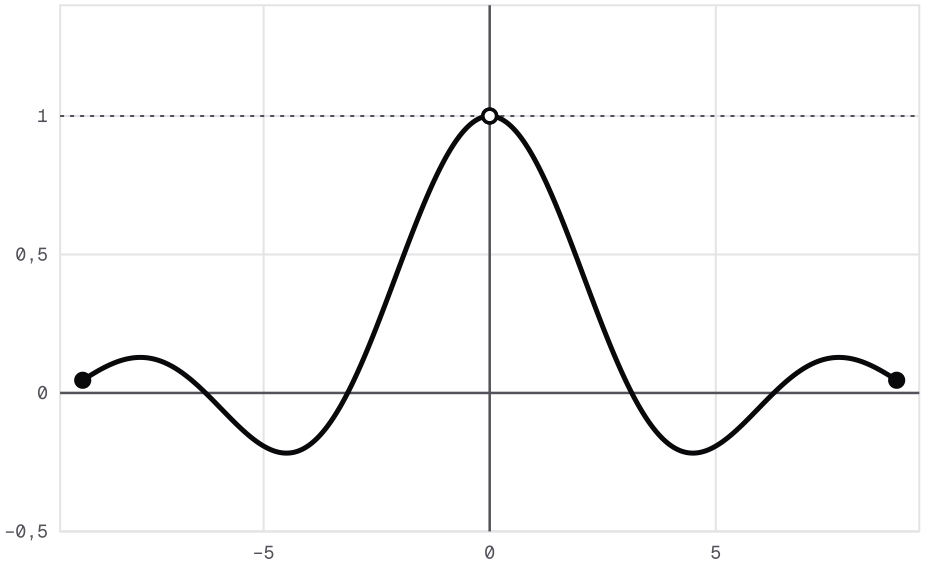
Correction

x	$0{,}5$	$0{,}1$	$0{,}05$	$0{,}01$
$\dfrac{\sin x}{x}$	$0{,}9589$	$0{,}9983$	$0{,}9996$	$1{,}0000$

Valeurs arrondies à 10^{-4}. Pour $-x$, le quotient est le même, car $\sin(-x) = -\sin x$.

On conjecture :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



$y = \frac{\sin x}{x}$ $y = 1$ Point du graphe Point exclu du graphe

La courbe de x ↦ sin x / x, privée du point d'abscisse 0. Observe sa hauteur près de 0.

Point creux en x = 0, à l'ordonnée estimée ≈ 1 : ce point n'appartient pas à la courbe.

Point creux en x = 0, à l'ordonnée estimée ≈ 1 : limite à droite estimée numériquement.

La limite usuelle

Propriété : Limite de sin x / x en 0

Le réel x étant mesuré en radians :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Plus généralement, pour tout réel a non nul, $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(ax)}{x} = a$.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Il n'est vrai que pour x mesuré en radians.

Exemple : le sinus de ax sur x

D'après la limite usuelle de $\dfrac{\sin(ax)}{x}$ en 0 :

- avec $a = 3$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x} = 3$;
- avec $a = -\dfrac{1}{2}$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(-\frac{x}{2}\right)}{x} = -\dfrac{1}{2}$.

Enfin, pour $x \neq 0$:

$$\frac{\sin(3x)}{2x} = \frac{1}{2} \times \frac{\sin(3x)}{x}.$$

D'après la limite d'un produit par un réel, sa limite en 0 est $\dfrac{3}{2}$.

Un piège, puis à toi

Attention : la limite usuelle ne vaut qu'en 0

✗ « En $+\infty$, $\dfrac{\sin x}{x}$ tend vers 1. »

✓ La limite usuelle ne vaut qu'en 0.

En $+\infty$, la courbe suggère plutôt la limite 0 : ses oscillations s'amortissent. Tu le justifieras par encadrement, à la fin de ce chapitre.

À toi : Des sinus en 0

Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x)}{3x}$ et $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Fais apparaître un quotient du type $\dfrac{\sin(ax)}{x}$.

Indice 2

Écris $\dfrac{\sin(4x)}{3x} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sin(4x)}{x}$, et $\dfrac{x}{\sin x}$ comme l'inverse de $\dfrac{\sin x}{x}$.

Indice 3

Point délicat : pour passer à l'inverse, vérifie que la limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas nulle.

Réponse

Première limite. Pour $x \neq 0$, $\dfrac{\sin(4x)}{3x} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sin(4x)}{x}$. D'après la limite usuelle de $\dfrac{\sin(ax)}{x}$ en 0, $\dfrac{\sin(4x)}{x}$ tend vers 4. D'après la limite d'un produit par un réel :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{3x} = \frac{4}{3}.$$

Seconde limite. Pour $0 < |x| < \pi$, $\sin x \neq 0$ et :

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}.$$

D'après la limite d'un quotient, le dénominateur tendant vers $1 \neq 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Les limites de tan x / x et de (1 – cos x) / x²

La tangente sur x

Devine : Tangente sur x

Quand x se rapproche de 0, de quoi se rapprochent les valeurs de $\dfrac{\tan x}{x}$?

A. De 0, car $\tan 0 = 0$.

Faux.

Le dénominateur x tend aussi vers 0 : forme « $\dfrac{0}{0}$ ».

B. De $+\infty$, car la tangente n'est pas bornée.

Faux.

La tangente devient grande près de $\dfrac{\pi}{2}$, pas près de 0.

C. De $\dfrac{\pi}{4}$, car $\tan \dfrac{\pi}{4} = 1$.

Faux.

Ce réel n'intervient pas : on étudie x près de 0.

D. De 1, comme pour $\dfrac{\sin x}{x}$.

Juste.

Juste : près de 0, $\tan x$ et x sont très proches.

Correction

x	$0{,}1$	$0{,}05$	$0{,}01$
$\dfrac{\tan x}{x}$	$1{,}0033$	$1{,}0008$	$1{,}0000$

Valeurs arrondies à 10^{-4} ; pour $-x$, le quotient est le même.

On conjecture :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

Pourquoi est-ce vrai ? Près de 0, $\cos x$ est strictement positif, et $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Le quotient $\dfrac{\tan x}{x}$ s'écrit donc avec $\dfrac{\sin x}{x}$, dont tu connais la limite, et avec $\dfrac{1}{\cos x}$. Deux règles d'opérations font le reste.

Propriété : Limite de tan x / x en 0

Le réel x étant mesuré en radians :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1.$$

Plus généralement, pour tout réel a non nul, $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan(ax)}{x}=a$.

Démonstration

Étape 1. Soit a un réel non nul. Pour $0<|x|<\dfrac{\pi}{2|a|}$, on a $-\dfrac{\pi}{2}<ax<\dfrac{\pi}{2}$, donc $\cos(ax)>0$: $\tan(ax)$ existe et $\dfrac{\tan(ax)}{x}=\dfrac{\sin(ax)}{x}\times\dfrac{1}{\cos(ax)}$.

Étape 2. D'après la limite de $\dfrac{\sin(ax)}{x}$ en 0, le premier facteur tend vers a. D'après les limites de référence en un point, $\cos(ax)$ tend vers $\cos 0=1$; la limite d'un quotient donne $\dfrac{1}{\cos(ax)}\to 1$.

Étape 3. La limite d'un produit donne $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan(ax)}{x}=a\times 1=a$. Avec $a=1$: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On écrit $\dfrac{\tan(ax)}{x}$ comme un produit :

$$\frac{\tan(ax)}{x}=\frac{\sin(ax)}{x}\times\frac{1}{\cos(ax)}.$$

Le premier facteur tend vers a, d'après la limite usuelle du sinus. Le second tend vers 1, car $\cos(ax)$ tend vers $\cos 0=1$.

Il faut seulement que $\cos(ax)$ reste non nul : c'est vrai près de 0.

Vérifie : Deux facteurs, en chiffres

Calculatrice en radians : que vaut environ $\dfrac{\tan(2x)}{x}$ pour $x=0{,}01$?

A. Environ $0{,}02$

Faux.

C'est à peu près $\tan(0{,}02)$; il faut encore diviser par $0{,}01$.

B. Environ 1

Faux.

Ce serait la valeur pour $\dfrac{\tan x}{x}$; ici, l'angle est $2x$.

C. Environ 200

Faux.

On a divisé deux fois par $0{,}01$.

D. Environ 2

Juste.
Juste : on trouve $2{,}0003$ en arrondissant à 10^{-4}.

Correction
Le quotient $\dfrac{\tan(0{,}02)}{0{,}01}$ vaut environ $2{,}0003$.

Le premier facteur, $\dfrac{\sin(0{,}02)}{0{,}01}$, vaut environ $1{,}9999$: il est proche de 2.

Le second, $\dfrac{1}{\cos(0{,}02)}$, vaut environ $1{,}0002$: il est proche de 1. C'est l'idée de la preuve.

Un cosinus en 0

Exemple : la tangente de ax sur x

D'après la limite usuelle de $\dfrac{\tan(ax)}{x}$ en 0, avec $a = 2$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(2x)}{x} = 2.$$

Ensuite, pour x non nul proche de 0, $\dfrac{\tan(2x)}{5x} = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{\tan(2x)}{x}$. D'après la limite d'un produit par un réel, sa limite en 0 est $\dfrac{2}{5}$.

Pourquoi est-ce vrai ? En 0, $\dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ est de la forme « $\dfrac{0}{0}$ ».

On multiplie le haut et le bas par $1 + \cos x$, comme pour une quantité conjuguée. La relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ fait alors apparaître $\sin^2 x$, donc le carré de $\dfrac{\sin x}{x}$.

Propriété : Limite de (1 – cos x) / x² en 0

Le réel x étant mesuré en radians :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Démonstration

Étape 1. Pour $0 < |x| < \pi$, on a $\cos x > -1$, donc $1 + \cos x > 0$. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $1 + \cos x$, puis on utilise la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos x}.$$

Étape 2. D'après la limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ en 0 et la limite d'un produit, $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ tend vers 1.

Étape 3. D'après les limites de référence en un point, $\cos x$ tend vers 1, donc, d'après la limite d'une somme, $1+\cos x$ tend vers 2 ; la limite d'un quotient donne $\dfrac{1}{1+\cos x} \to \dfrac{1}{2}$. La limite d'un produit conclut : la limite cherchée vaut $1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On multiplie par $1+\cos x$, non nul près de 0. Le numérateur devient $1-\cos^2 x = \sin^2 x$.

Le quotient s'écrit alors :

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \frac{1}{1+\cos x}.$$

Le premier facteur tend vers 1, le second vers $\dfrac{1}{2}$.

Vérifie : La relation utilisée

Dans la preuve, quelle relation transforme $1-\cos^2 x$?

A. $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

Faux.

Elle relie $\cos(2x)$ à $\cos x$; elle n'est pas utilisée ici.

B. $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Faux.

La tangente n'apparaît pas dans cette preuve.

C. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Juste.

Juste : elle donne $1-\cos^2 x = \sin^2 x$.

D. $-1 \leq \cos x \leq 1$

Faux.

Cet encadrement est vrai, mais il ne transforme pas $1-\cos^2 x$.

Correction

D'après la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on a $1-\cos^2 x = \sin^2 x$. Ainsi :

$$\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \frac{1}{1+\cos x}.$$

La limite usuelle du sinus s'applique alors.

Combiner les limites usuelles

Exemple : une limite usuelle, puis un contre-exemple

Un exemple direct. D'après la limite usuelle de $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ en 0 et la limite d'un produit par un réel :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Un contre-exemple. La limite usuelle porte sur $\cos x$, pas sur $\cos(2x)$: $\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$ ne tend pas vers $\dfrac{1}{2}$.

Rappel. D'après la formule de duplication, $\cos(2x) = 1-2\sin^2 x$, donc $1-\cos(2x) = 2\sin^2 x$.

Pour $x \neq 0$, on en déduit :

$$\frac{1-\cos(2x)}{x^2} = 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2.$$

D'après la limite usuelle du sinus et la limite d'un produit, la limite vaut 2.

Méthode : faire apparaître une limite usuelle

1. **Repère** en 0 une forme indéterminée avec $\sin(ax)$, $\tan(ax)$ ou $1-\cos x$.
2. **Divise** si besoin le haut et le bas par x, ou par x^2, pour former des quotients usuels.
3. **Écris** la limite de chaque quotient usuel, en la nommant.
4. **Conclus** par la limite d'un produit ou d'un quotient.

Exemple : Exemple guidé : un quotient de deux sinus

Cherchons $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$: c'est la forme « $\dfrac{0}{0}$ ».

Écriture. Pour $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$, $\sin(2x) \neq 0$. On divise le haut et le bas par x :

$$\frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} = \frac{\frac{\sin(5x)}{x}}{\frac{\sin(2x)}{x}}.$$

Conclusion. D'après la limite usuelle de $\dfrac{\sin(ax)}{x}$ en 0, le numérateur tend vers 5 et le dénominateur vers 2. D'après la limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} = \frac{5}{2}.$$

À toi, puis le coin devoir

À toi : Deux limites à faire apparaître

Calcule $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(4x)}{\tan(3x)}$, puis $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Divise le haut et le bas par x dans le premier quotient, par x^2 dans le second.

Indice 2

Tu obtiens $\dfrac{\sin(4x)}{x}$ sur $\dfrac{\tan(3x)}{x}$, puis $\dfrac{\sin x}{x}$ sur $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Indice 3

Point délicat : la limite d'un quotient exige une limite non nulle au dénominateur ; vérifie-le.

Réponse

Pour $0<|x|<\dfrac{\pi}{6}$, $\tan(3x)$ existe et n'est pas nul, et $1-\cos x\neq 0$.

Première limite. On divise le haut et le bas par x :

$$\frac{\sin(4x)}{\tan(3x)}=\frac{\frac{\sin(4x)}{x}}{\frac{\tan(3x)}{x}}.$$

D'après les limites usuelles du sinus et de la tangente, le haut tend vers 4 et le bas vers 3. D'après la limite d'un quotient, la limite vaut $\dfrac{4}{3}$.

Seconde limite. On divise le haut et le bas par x^2 :

$$\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}.$$

D'après les limites usuelles, le haut tend vers 1 et le bas vers $\dfrac{1}{2}$. D'après la limite d'un quotient, la limite vaut 2.

Remarque : Coin devoir : rédiger une limite trigonométrique

En devoir, montre la forme usuelle avant de conclure. Écris :

« Pour x non nul proche de 0, $\dfrac{\sin(5x)}{\sin(2x)}=\dfrac{\frac{\sin(5x)}{x}}{\frac{\sin(2x)}{x}}$. D'après la limite usuelle de $\dfrac{\sin(ax)}{x}$ en 0 et la limite d'un quotient, la limite vaut $\dfrac{5}{2}$. »

Ne remplace jamais $\sin(5x)$ par $5x$ sans justification.

Limites par encadrement et par comparaison

Deux gendarmes

En clair. Un promeneur marche entre deux gendarmes qui le tiennent par le bras. Si les deux gendarmes arrivent au même poste, le promeneur y arrive aussi.

Pour une fonction, c'est pareil. Si $f(x)$ reste coincée entre deux expressions qui tendent vers le même réel, elle tend vers ce réel.

Devine : Une fonction coincée

Pour $x \neq 0$, on a $-x^2 \leq x^2 \sin\dfrac{1}{x} \leq x^2$, car $-1 \leq \sin\dfrac{1}{x} \leq 1$. Que prévois-tu pour $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x}$?

A. 0, car elle est coincée entre deux fonctions de limite 0.

Juste.

Juste : $-x^2$ et x^2 tendent toutes deux vers 0.

B. 1, comme pour la limite usuelle du sinus.

Faux.

Ici, le sinus porte sur $\dfrac{1}{x}$, et il est multiplié par x^2.

C. Aucune limite, car $\sin\dfrac{1}{x}$ oscille sans fin près de 0.

Faux.

Elle oscille, mais le facteur x^2 écrase ces oscillations.

D. $+\infty$, car $\dfrac{1}{x}$ devient très grand.

Faux.

C'est l'argument du sinus qui grandit ; le sinus reste entre -1 et 1.

Correction

Pour $x \neq 0$, $x^2 > 0$. On multiplie par x^2 l'encadrement $-1 \leq \sin\dfrac{1}{x} \leq 1$:

$$-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2.$$

D'après les limites de référence, $-x^2$ et x^2 tendent vers 0 en 0.

La fonction, coincée entre les deux, tend vers 0 : c'est ce qu'énonce la propriété suivante.

Propriété : Limites et ordre : encadrement et comparaison

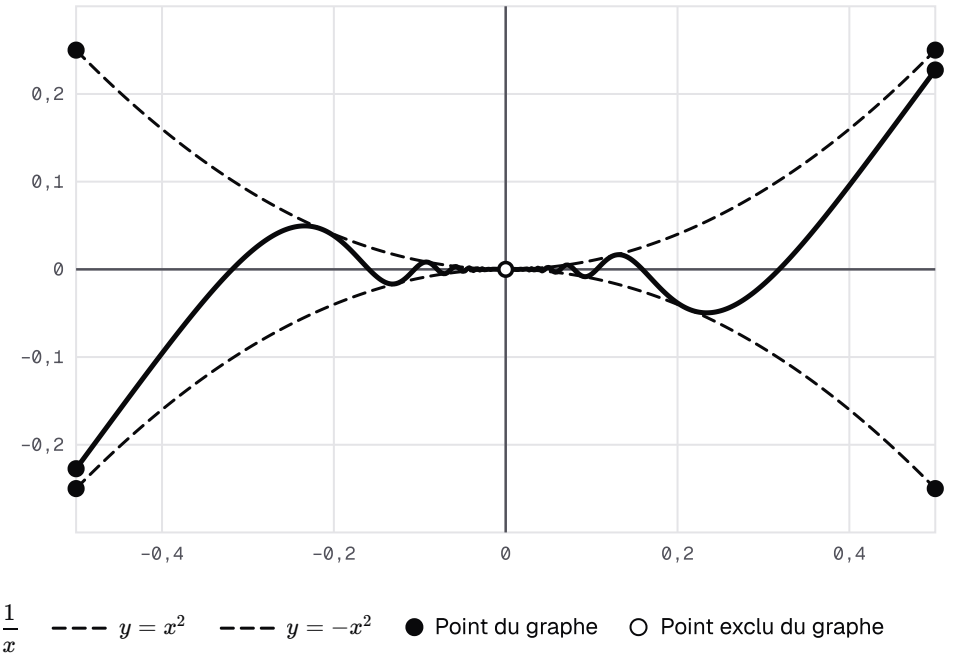
Soit f, u et v trois fonctions ; a désigne l'endroit où l'on cherche la limite : un réel, la droite ou la gauche d'un réel (a^+ ou a^-), $+\infty$ ou $-\infty$. Les inégalités ci-dessous sont supposées vraies pour tout x assez proche de a (ou assez grand en valeur absolue, en $+\infty$ ou en $-\infty$). Soit ℓ un réel.

- **Encadrement.** Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si u et v tendent toutes deux vers ℓ, alors f tend vers ℓ.
- Si $|f(x) - \ell| \leq u(x)$ et si u tend vers 0, alors f tend vers ℓ.

- **Comparaison.** Si $f(x) \geq u(x)$ et si u tend vers $+\infty$, alors f tend vers $+\infty$. Si $f(x) \leq v(x)$ et si v tend vers $-\infty$, alors f tend vers $-\infty$.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Les inégalités n'ont besoin d'être vraies que près de l'endroit étudié.



La courbe de x ↦ x² sin(1/x) près de 0, coincée entre les paraboles d'équations y = x² et y = −x².

Point creux en x = 0, à l'ordonnée estimée ≈ 0 : ce point n'appartient pas à la courbe.

Encadrer, comparer

Méthode : encadrer ou comparer

1. **Pars** d'un encadrement connu, en général celui du sinus ou du cosinus entre -1 et 1.
2. **Transforme-le** pas à pas pour encadrer $f(x)$, ou pour la minorer ; un facteur négatif renverse les inégalités.
3. **Vérifie** que tes bornes ont une **même** limite réelle, ou que le minorant tend vers $+\infty$, ou que le majorant tend vers $-\infty$.
4. **Conclus** en nommant l'encadrement ou la comparaison.

Exemple : un sinus divisé par x au carré

Cherchons $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2+\sin x}{x^2}$.

Encadrement. Pour tout réel x, $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $1 \leq 2+\sin x \leq 3$. Pour $x > 0$, on divise par $x^2 > 0$:

$$\frac{1}{x^2} \leq \frac{2+\sin x}{x^2} \leq \frac{3}{x^2}.$$

Bornes. D'après les limites de référence et la limite d'un produit par un réel, $\dfrac{1}{x^2}$ et $\dfrac{3}{x^2}$ tendent vers 0 en $+\infty$.

Conclusion. Par encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2+\sin x}{x^2} = 0.$$

Exemple : une limite infinie par comparaison

Cherchons $\lim_{x\to+\infty}(x+\cos x)$. Le cosinus n'a pas de limite en $+\infty$: la limite d'une somme ne s'applique pas.

Minoration. Pour tout réel x, $\cos x \geq -1$, donc $x+\cos x \geq x-1$.

Conclusion. D'après la limite d'une somme, $x-1$ tend vers $+\infty$. Par comparaison :

$$\lim_{x\to+\infty} (x+\cos x) = +\infty.$$

De même, si $f(x) \leq v(x)$ pour x assez grand et si v tend vers $-\infty$, alors f tend vers $-\infty$: on majore au lieu de minorer.

Un piège, à toi, le coin devoir

Attention : des bornes de même limite

✗ « Pour tout réel x, $-1 \leq \sin x \leq 1$. Par encadrement, $\sin x$ a une limite en $+\infty$. »

✓ Les bornes -1 et 1 n'ont pas la même limite : l'encadrement ne conclut rien.

D'ailleurs, $\sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$: elle repasse sans fin par toutes les valeurs de $[-1,1]$.

Vérifie toujours que les deux bornes ont la même limite.

Vérifie : Quel encadrement conclut ?

On étudie $\dfrac{3-\cos x}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$. Les quatre inégalités ci-dessous sont vraies pour $x \geq 1$. Laquelle permet de conclure ?

A. $\dfrac{3-\cos x}{\sqrt{x}} \geq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Faux.

Une minoration seule ne conclut que si le minorant tend vers $+\infty$; ici, il tend vers 0.

B. $\dfrac{2}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{3-\cos x}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

Juste.

Juste : les deux bornes tendent vers 0.

C. $\dfrac{3-\cos x}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

Faux.

Une majoration seule ne donne pas une limite réelle.

D. $0 \leq \dfrac{3-\cos x}{\sqrt{x}} \leq 4$

Faux.

Les bornes 0 et 4 n'ont pas la même limite.

Correction

Pour tout réel x, $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $2 \leq 3-\cos x \leq 4$. Pour $x \geq 1$, on divise par $\sqrt{x} > 0$:

$$\frac{2}{\sqrt{x}} \leq \frac{3-\cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{4}{\sqrt{x}}.$$

D'après les limites de référence et la limite d'un produit par un réel, les deux bornes tendent vers 0.

Par encadrement, la limite vaut 0.

À toi : Encadrer, puis comparer

Justifie que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$. Calcule ensuite $\lim_{x\to-\infty}(x^2 - 3\sin x)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pars de $-1 \leq \sin x \leq 1$ dans les deux cas.

Indice 2

Pour la première, divise par $x > 0$; pour la seconde, minore $-3\sin x$.

Indice 3

Point délicat : multiplier par -3 renverse les inégalités ; de $\sin x \leq 1$, on tire $-3\sin x \geq -3$.

Réponse

Première limite. Pour $x > 0$, on divise par x l'encadrement $-1 \leq \sin x \leq 1$:

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

D'après les limites de référence, les deux bornes tendent vers 0 en $+\infty$. Par encadrement, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

Seconde limite. Pour tout réel x, $\sin x \leq 1$ donne $-3\sin x \geq -3$, donc :

$$x^2 - 3\sin x \geq x^2 - 3.$$

D'après les limites de référence et la limite d'une somme, $x^2 - 3$ tend vers $+\infty$ en $-\infty$. Par comparaison :

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 3\sin x) = +\infty.$$

Remarque : Coin devoir : rédiger un encadrement

En devoir, écris l'encadrement de départ, puis chaque transformation. Rédige :

« Pour tout réel x, $1 \leq 2 + \sin x \leq 3$. Pour $x > 0$, $\frac{1}{x^2} \leq \frac{2 + \sin x}{x^2} \leq \frac{3}{x^2}$. Les deux bornes tendent vers 0 en $+\infty$; par encadrement, la limite vaut 0. »

Précise toujours le signe du nombre par lequel tu divises.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle méthode pour quelle forme

- **Conjecturer** : un tableau de valeurs ou une courbe, puis une justification par le calcul.
- **Aucune forme indéterminée** : les limites de référence et les opérations, en nommant chaque règle.
- **Un réel non nul sur** 0 : le signe du dénominateur, à droite et à gauche.
- **« $\frac{0}{0}$ » avec des polynômes** : factoriser par $x - a$, puis simplifier.
- **Polynôme ou fraction rationnelle à l'infini** : le terme de plus haut degré.
- **Une racine carrée** : la quantité conjuguée.
- **Sinus, tangente ou cosinus en** 0 : faire apparaître $\frac{\sin(ax)}{x}$, $\frac{\tan(ax)}{x}$ ou $\frac{1 - \cos x}{x^2}$.
- **Une fonction comprise entre deux valeurs, comme** $\sin x$: un encadrement, ou une comparaison.

Le mot du prof. Devant une limite, commence toujours par remplacer. Si aucune forme indéterminée n'apparaît, les règles concluent.

Sinon, reconnais la forme et choisis la transformation.

Tu retrouveras ces calculs dans les chapitres « Dérivabilité » et « Étude et représentation des fonctions ».

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Limite d'une fonction numérique » (1bac · sciences-experimentales · mathematiques)