BURHAN

Résumé : Géométrie analytique de l'espace

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/geometrie-analytique-de-l-espace/resume

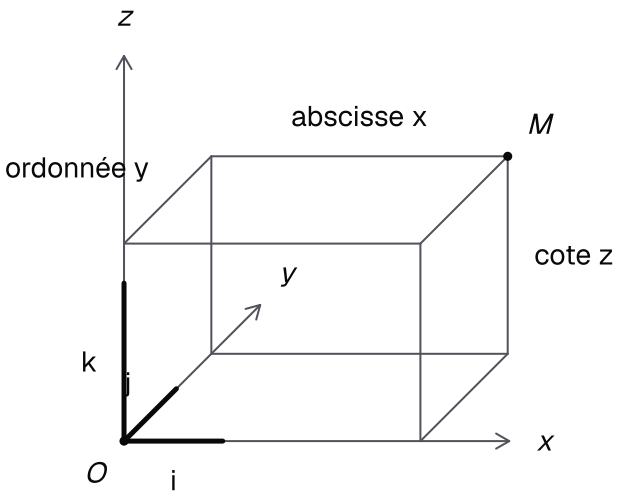
Chapitre	Semestre
Géométrie analytique de l'espace	Semestre 2

Repère et coordonnées

À retenir : Trois nombres pour un point

Dans l'espace, un repère est formé d'un point et de trois vecteurs non coplanaires. Chaque point reçoit alors trois nombres : son abscisse, son ordonnée et sa cote.

Le repère est quelconque : seuls comptent l'origine et les trois vecteurs de base. Les calculs ressemblent à ceux du plan, avec une coordonnée de plus.



Le point M et sa boîte de lecture : x se mesure parallèlement à i, y parallèlement à j, z parallèlement à k.

Propriété : Base de l'espace et décomposition d'un vecteur

Soit $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ trois vecteurs **non coplanaires** de l'espace.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un **unique** triplet (x, y, z) de réels tel que :

$$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}.$$

On dit que le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une **base** de l'espace.

Définition : Repère et coordonnées

Un **repère** de l'espace est un quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ formé d'un point O, l'**origine**, et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Les **coordonnées** d'un vecteur $\vec{u}$ dans ce repère sont les réels x, y, z tels que $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$; on note $\vec{u}(x, y, z)$.
- Les **coordonnées** d'un point M sont celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$; on note $M(x, y, z)$. Le réel x est l'**abscisse** de M, y son **ordonnée** et z sa **cote**.

Propriété : Calculs en coordonnées

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs, λ un réel, $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points.

- $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.
- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y', z + z')$ et $\lambda\,\vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
- $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}, \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Méthode : calculer des coordonnées

1. **Note** chaque point avec ses trois coordonnées, toujours dans l'ordre abscisse, ordonnée, cote.
2. **Vecteur** $\overrightarrow{AB}$: retranche une à une les coordonnées du départ A à celles de l'arrivée B.
3. **Milieu** : additionne les deux coordonnées de même rang, puis divise par 2.
4. **Point défini par une égalité** : traduis l'égalité vectorielle sur chaque coordonnée, puis résous trois équations du premier degré.

Exemple

Énoncé. On donne $K(2, -1, 3)$ et $L(4, 3, -1)$. Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{KL}$, du milieu I de $[KL]$ et du point N tel que $\overrightarrow{LN} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{KL}$.

Vecteur. D'après les calculs en coordonnées, $\overrightarrow{KL}(4 - 2, 3 + 1, -1 - 3)$, soit $\overrightarrow{KL}(2, 4, -4)$.

Milieu. On fait la moyenne des coordonnées, une à une :

$$I\left(\frac{2 + 4}{2}, \frac{-1 + 3}{2}, \frac{3 - 1}{2}\right),$$

soit $I(3, 1, 1)$.

Point N. Le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{KL}$ a pour coordonnées $(1, 2, -2)$. Avec $N(x_N, y_N, z_N)$, l'égalité donne, coordonnée par coordonnée :

$$\begin{aligned} x_N - 4 &= 1, \\ y_N - 3 &= 2, \\ z_N + 1 &= -2. \end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{KL}(2, 4, -4)$, $I(3, 1, 1)$ et $N(5, 5, -3)$.

Attention : L'arrivée moins le départ

Pour $\overrightarrow{KL}$, on calcule L moins K, et non l'inverse. Avec les points de l'exemple, K moins L donne $(-2, -4, 4)$: ce sont les coordonnées de $\overrightarrow{LK}$, le vecteur opposé.

Un signe faux sur un vecteur fausse ensuite tous les calculs qui suivent.

Colinéarité et alignement

Propriété : Colinéarité de deux vecteurs en coordonnées

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$ deux vecteurs.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si les **trois** déterminants suivants sont nuls :

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}.$$

Ces déterminants sont appelés les **déterminants extraits** du couple $(\vec{u}, \vec{v})$.

Méthode : tester un alignement

1. **Forme** deux vecteurs de même origine, par exemple $\overrightarrow{JQ}$ et $\overrightarrow{JR}$.
2. **Calcule** leurs trois déterminants extraits : abscisses et ordonnées, abscisses et cotes, ordonnées et cotes.
3. **Trois zéros** : les vecteurs sont colinéaires, et les trois points sont alignés.
4. **Un résultat non nul** suffit : les points ne sont pas alignés.

Exemple

Énoncé. Les points $J(1, 0, 2)$, $Q(3, 1, -1)$ et $R(7, 3, -7)$ sont-ils alignés ? Et les points J, Q et $S(5, 2, -5)$?

Vecteurs. $\overrightarrow{JQ}(2, 1, -3)$, $\overrightarrow{JR}(6, 3, -9)$ et $\overrightarrow{JS}(4, 2, -7)$.

Premier cas. Les trois déterminants extraits de $\overrightarrow{JQ}$ et $\overrightarrow{JR}$ sont nuls :

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0,$$
$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} = -18 + 18 = 0,$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0.$$

D'après la colinéarité en coordonnées, J, Q, R sont alignés.

Second cas. Pour $\overrightarrow{JQ}$ et $\overrightarrow{JS}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0,$$
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} = -14 + 12 = -2.$$

Le deuxième déterminant n'est pas nul : J, Q, S ne sont pas alignés.

Attention : Les trois déterminants, pas un seul

Dans le second cas de l'exemple, le premier déterminant extrait est nul. Pourtant, les points ne sont pas alignés.

Calcule toujours les trois déterminants avant de conclure à une colinéarité.

Représentation paramétrique d'une droite

Propriété : Représentation paramétrique d'une droite

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point et $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur **non nul**.

Un point $M(x, y, z)$ appartient à la droite $D(A, \vec{u})$ si et seulement s'il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$$

Ce système, où t décrit $\mathbb{R}$, est une **représentation paramétrique** de la droite $D(A, \vec{u})$; t est le **paramètre**.

Méthode : écrire une droite et tester un point

1. **Choisis** sur la droite un point A, puis un vecteur directeur $\vec{u}$ non nul ; pour la droite (JQ), $\overrightarrow{JQ}$ convient.
2. **Écris** les trois équations avec le même paramètre t, suivies de $(t \in \mathbb{R})$.
3. **Pour un point donné**, remplace x, y, z par ses coordonnées et calcule t dans chaque équation.

4. **Compare** : il appartient à la droite si et seulement si une même valeur de t vérifie les trois équations (une équation sans t doit simplement être vraie).

Exemple

Énoncé. La droite D passe par $R(0, 2, -1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(1, -2, 3)$. Les points $S(2, -2, 5)$ et $T(-1, 4, -3)$ sont-ils sur D ?

Représentation. D'après la représentation paramétrique d'une droite :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Point S. La première équation donne $t = 2$. Alors $y = 2 - 4 = -2$ et $z = -1 + 6 = 5$: S est le point de paramètre 2.

Point T. Les deux premières équations donnent $t = -1$. Mais alors $z = -1 - 3 = -4$, qui diffère de -3 : T n'est pas sur D.

Attention **: Plusieurs écritures pour une même droite**

La droite D de l'exemple passe aussi par S, et le vecteur $2\,\vec{u}$ la dirige. Le système $x = 2 + 2t$, $y = -2 - 4t$, $z = 5 + 6t$ la représente donc aussi.

Deux systèmes différents peuvent décrire la même droite. Ne conclus jamais sur une seule équation : les trois doivent donner le même t.

Déterminant et coplanarité

Définition **: Déterminant de trois vecteurs**

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\vec{u}(a, b, c)$, $\vec{v}(a', b', c')$ et $\vec{w}(a'', b'', c'')$ trois vecteurs.

Le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, dans cet ordre, est le réel :

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \\ &= a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} \\ &\quad - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} \\ &\quad + c \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ce calcul s'appelle le **développement suivant la première colonne**. On rappelle que :

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = ps - qr.$$

Propriété : Déterminant et coplanarité

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.

Autrement dit, le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$.

Méthode : décider d'une coplanarité

1. **Pour quatre points** K, L, T, N, calcule $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{KT}$ et $\overrightarrow{KN}$.
2. **Range** leurs coordonnées en colonnes, dans cet ordre.
3. **Calcule** le déterminant : chaque coordonnée du premier vecteur multiplie un petit déterminant, et le terme du milieu prend le signe moins.
4. **Conclus** : un résultat nul signifie « coplanaires » ; un résultat non nul signifie « base de l'espace ».

Exemple

Énoncé. Calcule $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ pour $\vec{u}(1, 2, 0)$, $\vec{v}(-1, 1, 3)$ et $\vec{w}(2, 0, 1)$.

Développement. On range les coordonnées en colonnes et on développe suivant la première colonne :

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + 0 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Calcul. On obtient $1 \times 1 - 2 \times (-7) + 0 = 15$.

Conclusion. Le déterminant n'est pas nul. D'après le lien entre déterminant et coplanarité, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.

Exemple

Énoncé. Les points $K(1, 1, 0)$, $L(2, 3, 1)$, $T(0, 2, 2)$ et $N(1, 4, 3)$ sont-ils coplanaires ?

Vecteurs. $\overrightarrow{KL}(1, 2, 1)$, $\overrightarrow{KT}(-1, 1, 2)$ et $\overrightarrow{KN}(0, 3, 3)$.

Déterminant. En développant suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}&\det(\overrightarrow{KL}, \overrightarrow{KT}, \overrightarrow{KN})\\&= 1 \times (-3) - 2 \times (-3)\\&\quad + 1 \times (-3) = 0.\end{aligned}$$

Conclusion. D'après le lien entre déterminant et coplanarité, les trois vecteurs sont coplanaires. Les quatre points sont donc coplanaires.

Représentation paramétrique et équation d'un plan

Propriété : Représentation paramétrique d'un plan

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point, $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$ deux vecteurs **non colinéaires**.

Un point $M(x, y, z)$ appartient au plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ si et seulement s'il existe deux réels s et t tels que :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha s + \alpha' t \\ y = y_A + \beta s + \beta' t \\ z = z_A + \gamma s + \gamma' t \end{cases}$$

Ce système, où s et t décrivent $\mathbb{R}$, est une **représentation paramétrique** du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Propriété : Équation cartésienne d'un plan

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit P le plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Il existe des réels a, b, c, **non tous nuls**, et un réel d tels que, pour tout point $M(x, y, z)$, on ait $M \in P$ si et seulement si :

$$ax + by + cz + d = 0.$$

On dit que $ax + by + cz + d = 0$ est une **équation cartésienne** du plan P.

Propriété : Plan défini par une équation cartésienne

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit a, b, c, d quatre réels, avec a, b, c **non tous nuls**. On considère l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que :

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Cet ensemble est un **plan**.

Méthode : équation cartésienne d'un plan

1. **Vérifie** que $\overrightarrow{JQ}$ et $\overrightarrow{JR}$ ne sont pas colinéaires.
2. **Traduis** l'appartenance de $M(x, y, z)$ au plan (JQR) par $\det(\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{JQ}, \overrightarrow{JR}) = 0$.

3. **Développe** suivant la première colonne, puis réduis : tu obtiens $ax + by + cz + d = 0$.
4. **Contrôle** avec les coordonnées de J, Q et R : chacune doit donner 0.

Exemple

Énoncé. Écris une représentation paramétrique du plan passant par $\Omega(0, 1, -1)$ et dirigé par $\vec{u}(1, 0, 2)$ et $\vec{v}(0, 1, 1)$.

Directions. Le premier déterminant extrait n'est pas nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Système. D'après la représentation paramétrique d'un plan :

$$\begin{cases} x = s \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 2s + t \end{cases} \qquad (s \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R})$$

Pour $s = 1$ et $t = -1$, on obtient le point $(1, 0, 0)$ de ce plan.

Exemple

Énoncé. Détermine une équation cartésienne du plan (JQR), avec $J(1, 0, 1)$, $Q(2, 1, 1)$ et $R(1, 2, 3)$.

Directions. $\overrightarrow{JQ}(1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{JR}(0, 2, 2)$. Leur premier déterminant extrait vaut 2 : ils ne sont pas colinéaires.

Déterminant. Avec $\overrightarrow{JM}(x - 1, y, z - 1)$, on développe suivant la première colonne :

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{JQ}, \overrightarrow{JR}) \\ &= (x - 1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &\quad + (z - 1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2(x - 1) - 2y + 2(z - 1). \end{aligned}$$

Équation. En divisant par 2 : $x - y + z - 2 = 0$. Contrôle : $1 - 0 + 1 - 2 = 0$, $2 - 1 + 1 - 2 = 0$ et $1 - 2 + 3 - 2 = 0$.

Attention : Une seule équation, un plan

Dans l'espace, l'équation $y = 3$ ne décrit pas une droite. Elle s'écrit $0x + 1y + 0z - 3 = 0$, avec un triplet $(0, 1, 0)$ non nul. D'après le plan défini par une équation cartésienne, c'est donc un plan.

Pour une droite, il faut deux équations ou une représentation paramétrique.

Position relative de deux droites

Propriété : Position relative de deux droites

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit D la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$, et D' la droite passant par B de vecteur directeur $\vec{v}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**, les droites D et D' sont parallèles : confondues si $A \in D'$, strictement parallèles sinon.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont **pas colinéaires**, les droites D et D' sont soit sécantes en un point, soit non coplanaires. Elles sont sécantes si et seulement si le système formé par leurs deux représentations paramétriques, écrites avec **deux paramètres distincts**, admet une solution.

Méthode : étudier deux droites

1. **Compare** les vecteurs directeurs par leurs déterminants extraits.
2. **Colinéaires** : les droites sont parallèles ; un point de l'une situé sur l'autre les rend confondues.
3. **Non colinéaires** : nomme les paramètres t et s, égale deux coordonnées et résous ce système de deux équations.
4. **Teste** la troisième équation : vraie, les droites sont sécantes ; fausse, elles sont non coplanaires.

Exemple

Énoncé. Étudie la position des droites D et D' :

$$D : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$D' : \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 1 - s \\ z = 3 + s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Directions. Pour $\vec{u}(1, 2, -1)$ et $\vec{v}(1, -1, 1)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3.$$

Il est non nul, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Système. On égale les abscisses et les ordonnées : $1 + t = 3 + s$ et $2t = 1 - s$. La première donne $s = t - 2$; la seconde devient $2t = 3 - t$. Donc $t = 1$ et $s = -1$.

Troisième équation. $3 - 1 = 2$ et $3 + (-1) = 2$: elle est vérifiée. D'après la position relative de deux droites, D et D' sont sécantes en $(2, 2, 2)$.

Attention : Non parallèles, pas forcément sécantes

Dans l'espace, deux droites non parallèles peuvent ne jamais se rencontrer. Remplace $z = 3 + s$ par $z = s$ dans l'exemple : la troisième équation devient $2 = -1$, qui est fausse.

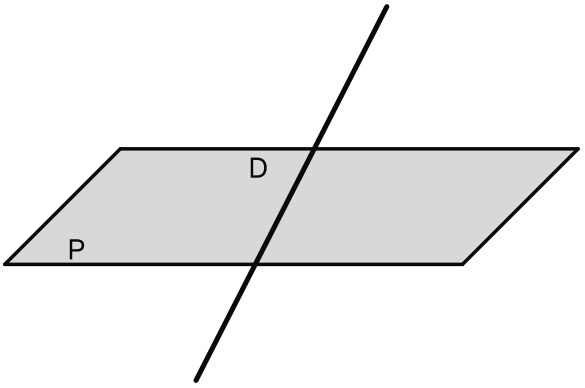
Les droites sont alors non coplanaires. Vérifie donc toujours la troisième équation.

Position relative d'une droite et d'un plan

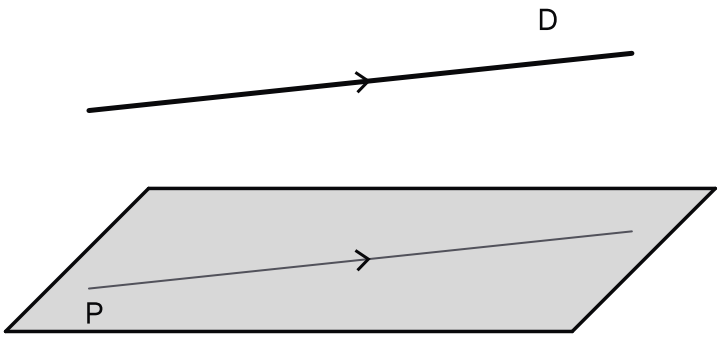
Propriété : Position relative d'une droite et d'un plan

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, où a, b, c ne sont pas tous nuls, et D la droite passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$.

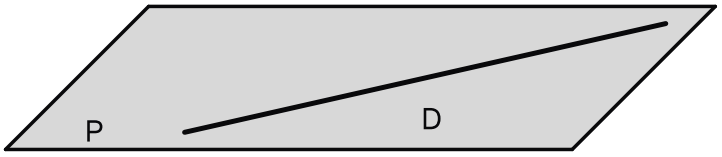
- Si $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$, la droite D et le plan P sont **sécants** en un seul point.
- Si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, la droite D est **parallèle** au plan P : elle est contenue dans P si $A \in P$, et elle n'a aucun point commun avec P sinon.



Premier cas : la droite D traverse le plan P en un unique point.



Deuxième cas : D reste à distance constante de P, sans jamais le toucher.



Troisième cas : D est couchée dans P, tous ses points appartiennent au plan.

Méthode : couper une droite par un plan

1. **Écris** la droite sous forme paramétrique.
2. **Injecte** ses trois expressions dans l'équation du plan : il reste une équation d'inconnue t.
3. **Une solution** : calcule t, puis les coordonnées du point commun.
4. **Équation impossible** : la droite est strictement parallèle au plan. **Équation toujours vraie** : la droite est contenue dans le plan.

Exemple

Énoncé. Le plan P a pour équation $x + 2y - z - 3 = 0$. Étudie sa position avec la droite :

$$D : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Test. Avec $\vec{u}(1,1,2)$: $1\times 1+2\times 1-1\times 2=1$. Comme $1\neq 0$, d'après la position relative d'une droite et d'un plan, D et P sont sécants.

Point commun. On remplace : $(2+t)+2t-(1+2t)-3=0$ donne $t-2=0$, soit $t=2$. Le point d'intersection est $(4,2,5)$. Contrôle : $4+4-5-3=0$.

Exemple

Énoncé. Même plan P. La droite D' passe par l'origine O et a pour vecteur directeur $\vec{w}(1,1,3)$.

Test. $1\times 1+2\times 1-1\times 3=0$: la droite D' est parallèle au plan P.

Contenue ou non ? Pour O, on trouve $0+0-0-3=-3$, qui n'est pas nul : O n'est pas dans P. Donc D' et P n'ont aucun point commun.

Position relative de deux plans

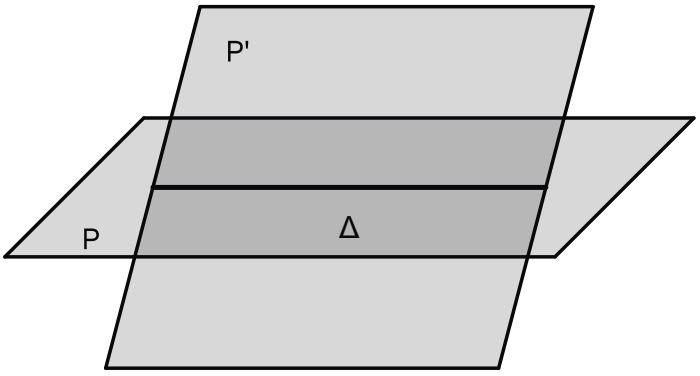
Propriété : Position relative de deux plans

L'espace est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit P et P' les plans d'équations $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$, où a, b, c ne sont pas tous nuls, ni a', b', c'.

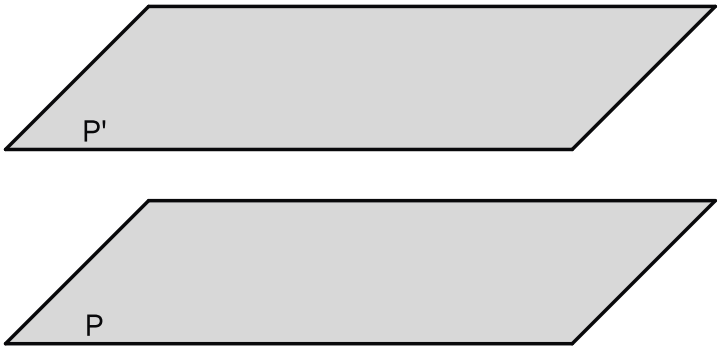
- P et P' sont **parallèles** si et seulement si les triplets (a,b,c) et (a',b',c') sont proportionnels. Ils sont alors confondus si les quadruplets (a,b,c,d) et (a',b',c',d') sont proportionnels, et strictement parallèles sinon.
- Sinon, P et P' sont **sécants** suivant une droite Δ, et le système

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

est un **système d'équations cartésiennes** de la droite Δ.



Plans sécants : P et P' se croisent le long de la droite Δ.



Plans strictement parallèles : P' est au-dessus de P, sans aucun point commun.



Plans confondus : une seule surface, qui porte à la fois le nom P et le nom P'.

Méthode : étudier deux plans

1. **Compare** les triplets (a, b, c) et (a', b', c'), sans regarder d et d'.
2. **Proportionnels** : les plans sont parallèles ; la comparaison de d et d' décide s'ils sont confondus.
3. **Non proportionnels** : les plans sont sécants ; élimine une inconnue en combinant les deux équations.
4. **Pose** une inconnue égale à t et exprime les deux autres : tu obtiens une représentation paramétrique de Δ.

Exemple

Énoncé. Étudie la position des plans P : $x + y - z - 1 = 0$ et P' : $2x - y + z - 2 = 0$.

Triplets. $(1, 1, -1)$ et $(2, -1, 1)$ ne sont pas proportionnels : le coefficient 2 convient pour x, mais pas pour y. Les plans sont sécants suivant une droite Δ.

Élimination. En additionnant les deux équations : $3x - 3 = 0$, donc $x = 1$. La première équation devient alors $y - z = 0$.

Paramètre. On pose $z = t$:

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Attention : Le réel d vient en dernier

Les plans $x + y - z - 1 = 0$ et $2x + 2y - 2z + 5 = 0$ ont des triplets proportionnels : ils sont parallèles.

On compare ensuite d : $2 \times (-1) = -2$, qui diffère de 5. Ils sont donc strictement parallèles, et non confondus. Le réel d ne décide pas du parallélisme.

Quel outil pour quelle question ?

Méthode : Quel outil pour quelle question ?

- **Un vecteur, un milieu** : les calculs en coordonnées.
- **Deux vecteurs colinéaires, trois points alignés** : les trois déterminants extraits.
- **Un point sur une droite** : la même valeur du paramètre dans les trois équations.
- **Trois vecteurs coplanaires, une base** : le déterminant de trois vecteurs.
- **Une équation de plan** : $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$, puis une vérification.
- **Droite et plan** : la représentation paramétrique substituée dans l'équation.
- **Deux droites** : comparer les directions, puis résoudre le système en t et s.
- **Deux plans** : les triplets (a, b, c), puis la droite d'intersection.

Vecteur défini par deux points

$$\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A)$$

Milieu I de [AB]

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2},\ \frac{y_A + y_B}{2},\ \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Déterminant de deux nombres sur deux

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = ps - qr$$

Développement suivant la première colonne

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$$

Droite passant par A, de vecteur directeur u

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Droite et plan sécants

$$a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$$

À retenir : Rédiger en devoir

En devoir, écris d'abord les coordonnées des vecteurs utiles, avec soin pour les signes.

Nomme ensuite l'énoncé qui justifie chaque conclusion : « d'après le lien entre déterminant et coplanarité ». Pour une intersection, vérifie le point trouvé dans toutes les équations.

> Trace enfin une figure à main levée sur ton cahier.