BURHAN

Géométrie analytique de l'espace : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

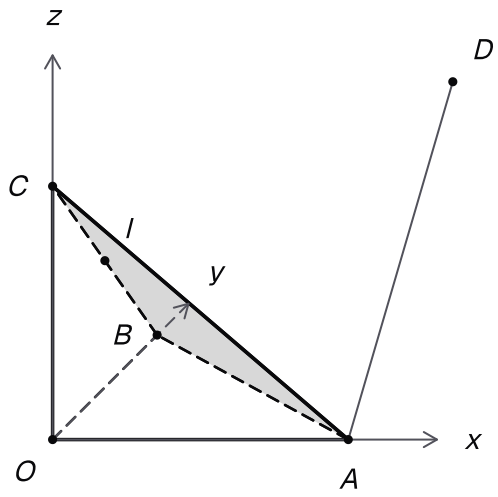
Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/geometrie-analytique-de-l-espace/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie analytique de l'espace	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Un tétraèdre repéré par trois de ses arêtes

$OABC$ est un tétraèdre. Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ ne sont donc pas coplanaires, et l'on munit l'espace du repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$. On note I le milieu de l'arête $[BC]$ et D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Trace la figure sur ton cahier. Durée indicative : 40 minutes.



Le tétraèdre OABC posé sur ses trois axes, avec le milieu I de [BC] et le point D, extrémité du trait AD.

1. 0,75 pts

Donner les coordonnées des points O, A, B, C dans ce repère, puis calculer celles de I et de D.

INDICE

Début : $\overrightarrow{OA} = 1\,\overrightarrow{OA} + 0\,\overrightarrow{OB} + 0\,\overrightarrow{OC}$. **Ensuite :** le milieu, puis l'égalité qui définit D, coordonnée par coordonnée.

2. 1,25 pts

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

INDICE

Début : $\overrightarrow{AM}(x-1, y, z)$. **Outil :** M est dans (ABC) si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

3. 1 pts

Écrire une représentation paramétrique de la droite (OD). En déduire les coordonnées du point G où elle coupe le plan (ABC).

INDICE

Début : $\overrightarrow{OD}(1, 1, 1)$ dirige (OD). **Ensuite :** substitue dans l'équation de la question 2.

4. 1 pts

La droite (AI) a pour représentation paramétrique $x = 1 - 2s$, $y = s$, $z = s$, où s décrit $\mathbb{R}$. Vérifier que (AI) passe par A et I, puis étudier la position relative des droites (AI) et (OD).

INDICE

Début : pour A puis pour I, cherche la valeur de s qui redonne ses coordonnées. **Ensuite :** compare les vecteurs directeurs ; puis garde deux paramètres distincts t et s.

5. 1 pts

Justifier que le plan (OBC) a pour équation $x = 0$. En déduire la position relative de la droite (AD) et du plan (OBC).

INDICE

Début : calcule $\det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$. **Ensuite :** $\overrightarrow{AD}(0, 1, 1)$, et le point A.

Exercice 2 5 pts

Un plan, une droite qui le traverse et un second plan

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(1,0,2)$, $B(2,1,1)$, $C(0,1,1)$ et $E(3,-1,1)$, ainsi que le plan Q d'équation $x - y + 2z - 1 = 0$. Place ces points sur une figure à main levée. Durée indicative : 45 minutes.

1. 0,75 pts

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Justifier que A, B, C ne sont pas alignés.

INDICE

Outil : un seul déterminant extrait non nul suffit.

2. 1,25 pts

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

INDICE

Début : $\overrightarrow{AM}(x-1, y, z-2)$ dans la première colonne. **Attention :** l'un des trois déterminants de deux nombres sur deux est nul.

3. 1 pts

Le point E appartient-il au plan (ABC) ? En déduire si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace, puis le confirmer par un déterminant.

INDICE

Début : remplace les coordonnées de E dans l'équation. **Ensuite :** $\overrightarrow{AE}(2,-1,-1)$.

4. 1 pts

La droite D passe par E et a pour vecteur directeur $\vec{w}(0,1,1)$. Écrire une représentation paramétrique de D, puis déterminer le point H où elle coupe le plan (ABC).

INDICE

Début : x reste égal à 3. **Ensuite :** calcule $0 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 1$, puis substitue.

5. 1 pts

Justifier que les plans (ABC) et Q sont sécants. En posant $z = t$, déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection Δ.

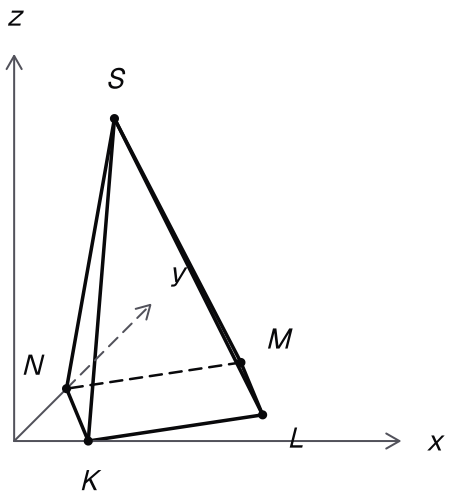
INDICE

Outil : la position relative de deux plans : compare les triplets (a,b,c) des deux équations. **Ensuite :** tire y de la première équation, puis x de la seconde.

Exercice 3 — 5 pts

Une pyramide à base parallélogramme

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La pyramide $SKLMN$ a pour sommet $S(1,1,4)$ et pour base le quadrilatère $KLMN$, avec $K(1,0,0)$, $L(3,1,0)$, $M(2,3,0)$ et $N(0,2,0)$. Ses faces latérales sont les triangles SKL, SLM, SMN et SNK. Trace la figure sur ton cahier. Durée indicative : 50 minutes.



La pyramide SKLMN : sa base KLMN est dans le plan des deux premiers axes, son sommet S au-dessus.

1. — 0,75 pts

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{KL}$ et de $\overrightarrow{NM}$. En déduire la nature de $KLMN$, puis les coordonnées de son centre Ω.

INDICE

Outil : deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées. Le centre est le milieu de la diagonale $[KM]$.

2. — 0,75 pts

Justifier que le plan (KLN) a pour équation $z = 0$. Le sommet S appartient-il à ce plan ?

INDICE

Début : $\overrightarrow{KL}(2,1,0)$ et $\overrightarrow{KN}(-1,2,0)$. Calcule $\det(\overrightarrow{KX}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{KN})$ avec $X(x,y,z)$.

3. — 1,25 pts

Déterminer une équation cartésienne du plan (SKL).

INDICE

Début : $\overrightarrow{KS}(0,1,4)$. Développe $\det(\overrightarrow{KX}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{KS})$ suivant la première colonne.

4. 0,75 pts

Vérifier que $4x - 8y - 3z + 16 = 0$ est une équation du plan (SMN).

INDICE

Début : l'équation décrit un plan ; il suffit que M, N, S la vérifient et ne soient pas alignés.

5. 1 pts

Justifier que les plans (SKL) et (SMN) sont sécants. En posant $y = t$, déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection Δ.

INDICE

Début : compare les triplets (a, b, c) des deux équations. **Ensuite :** avec $y = t$, tes deux équations n'ont plus que x et z ; résous-les par substitution.

6. 0,5 pts

Vérifier que Δ passe par S, puis comparer sa direction avec celle de $\overrightarrow{KL}$.

INDICE

Début : l'ordonnée de S donne la valeur de t à essayer. **Outil :** les coefficients de t donnent un vecteur directeur.

Exercice 4 5 pts

Deux droites qui se coupent pour un seul réel

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La droite D passe par $A(0, 1, 2)$ et elle est dirigée par $\vec{u}(2, 1, -1)$. Pour tout réel m, la droite D_m a pour représentation paramétrique :

$$D_m : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = s \\ z = m + s \end{cases} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

Elle est dirigée par $\vec{v}(1, 1, 1)$. Trace la figure sur ton cahier. Durée indicative : 45 minutes.

1. 0,75 pts

Écrire une représentation paramétrique de la droite D. Justifier que, pour tout réel m, les droites D et D_m ne sont pas parallèles.

INDICE

Début : garde le paramètre t pour D. **Outil :** compare $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par un déterminant extrait ; le réel m ne change pas la direction de D_m.

2. 1,25 pts

Résoudre le système formé par l'égalité des abscisses et l'égalité des ordonnées des deux représentations, d'inconnues t et s. En déduire la valeur de m pour laquelle D et D_m sont sécantes, ainsi que les coordonnées de leur point commun I. Que dire des deux droites pour les autres valeurs de m ?

INDICE

Début : $2t = 1 + s$ et $1 + t = s$; remplace s dans la première égalité. **Ensuite :** compare les deux cotes obtenues avec ces valeurs de t et de s.

3. 1,25 pts

Le plan P passe par A et il est dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Déterminer une équation cartésienne de P. Pour $m = -3$, vérifier que le point I et le point $(1, 0, -3)$ de D_{-3} appartiennent à P.

INDICE

Début : $\overrightarrow{AM}(x, y - 1, z - 2)$ dans la première colonne. **Outil :** M est dans P si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$.

4. 1 pts

Le plan Q a pour équation $-4x + 6y - 2z + 5 = 0$. Étudier la position relative des plans P et Q. En déduire que la droite D n'a aucun point commun avec Q.

INDICE

Outil : compare d'abord les triplets (a, b, c), puis les quadruplets (a, b, c, d). **Ensuite :** dans quel plan se trouve la droite D ?

5. 0,75 pts

On suppose $m \neq -3$. En remplaçant la représentation paramétrique de D_m dans l'équation de P, étudier la position relative de la droite D_m et du plan P.

INDICE

Début : calcule $2(1+s)-3s+(m+s)+1$; regarde ce qui reste du paramètre s.

Exercice 5 5 pts

Un plan, de son équation à ses deux paramètres

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le plan P a pour équation $x - 3y - 2z + 2 = 0$. On considère aussi les plans Q et R d'équations respectives $x + y - 2z + 6 = 0$ et $2y + z = 0$. Place les points rencontrés sur une figure à main levée. Durée indicative : 50 minutes.

1. 1,25 pts

En posant $y = s$ et $z = t$, écrire une représentation paramétrique du plan P. En déduire un point A de P et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui le dirigent.

INDICE

Début : exprime x en fonction de y et de z à l'aide de l'équation. **Ensuite :** lis le point obtenu pour $s = 0$ et $t = 0$, puis les coefficients de s et de t.

2. 0,75 pts

Calculer les coordonnées du point G de P obtenu pour $s = -1$ et $t = 1$. Le point $H(1, -1, 3)$ appartient-il à P ? Si oui, donner les valeurs de s et de t qui lui correspondent.

INDICE

Début : remplace s et t dans le système de la question 1. **Ensuite :** pour H, l'équation de P décide ; l'ordonnée et la cote donnent s et t.

3. 1,25 pts

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{GH}$ et écrire une représentation paramétrique de la droite (GH). Justifier que les plans P et Q sont sécants, vérifier que (GH) est contenue dans Q, puis en déduire la droite d'intersection de P et de Q.

INDICE

Début : (GH) passe par G et elle est dirigée par $\overrightarrow{GH}$. **Outil :** compare les triplets (a, b, c) de P et de Q ; puis substitue la représentation de (GH) dans l'équation de Q.

4. 0,75 pts

La droite D passe par A et elle est dirigée par $\vec{v}$. Étudier la position relative des droites D et (GH).

INDICE

Début : compare $\overrightarrow{GH}$ et $\vec{v}$. **Ensuite :** regarde l'ordonnée des points de (GH) et celle de A.

5. 1 pts

Justifier que la droite (GH) et le plan R sont sécants. En déduire les coordonnées du point J commun aux trois plans P, Q et R.

INDICE

Outil : avec le triplet $(0, 2, 1)$ de R et $\overrightarrow{GH}(4, 0, 2)$, calcule $0 \times 4 + 2 \times 0 + 1 \times 2$. **Ensuite :** un point commun à P et à Q est sur la droite de la question 3.