BURHAN

Géométrie analytique de l'espace : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

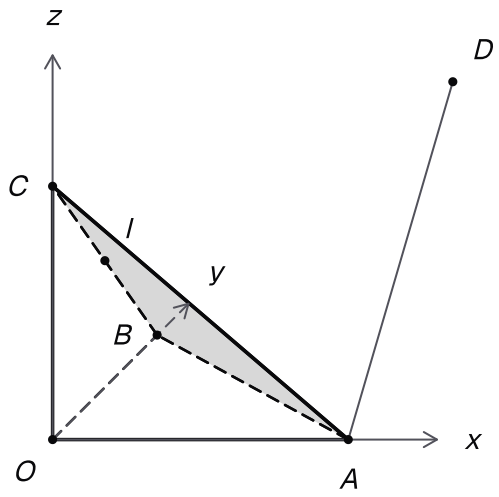
Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/geometrie-analytique-de-l-espace/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie analytique de l'espace	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Un tétraèdre repéré par trois de ses arêtes

$OABC$ est un tétraèdre. Les vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ ne sont donc pas coplanaires, et l'on munit l'espace du repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$. On note I le milieu de l'arête $[BC]$ et D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Trace la figure sur ton cahier. Durée indicative : 40 minutes.



Le tétraèdre OABC posé sur ses trois axes, avec le milieu I de [BC] et le point D, extrémité du trait AD.

1. 0,75 pts

Donner les coordonnées des points O, A, B, C dans ce repère, puis calculer celles de I et de D.

INDICE

Début : $\overrightarrow{OA} = 1\,\overrightarrow{OA} + 0\,\overrightarrow{OB} + 0\,\overrightarrow{OC}$. **Ensuite :** le milieu, puis l'égalité qui définit D, coordonnée par coordonnée.

CORRIGÉ

Sommets. Par définition des coordonnées dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, l'égalité

$$\overrightarrow{OA} = 1\,\overrightarrow{OA} + 0\,\overrightarrow{OB} + 0\,\overrightarrow{OC}$$

donne $A(1,0,0)$. De même $B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$, et l'origine est $O(0,0,0)$.

Milieu. D'après les calculs en coordonnées, le milieu I de $[BC]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{0+0}{2}, \frac{1+0}{2}, \frac{0+1}{2}\right).$$

Point D. Avec $D(x,y,z)$, on a $\overrightarrow{AD}(x-1, y, z)$, et $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ a pour coordonnées $(0,1,1)$. L'égalité des coordonnées donne $x-1=0$, $y=1$ et $z=1$. Donc $D(1,1,1)$.

Conclusion. $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $I\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $D(1,1,1)$.

2. 1,25 pts

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

INDICE

Début : $\overrightarrow{AM}(x-1, y, z)$. **Outil :** M est dans (ABC) si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

CORRIGÉ

Vecteurs. $\overrightarrow{AB}(-1,1,0)$ et $\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$. Le déterminant extrait $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1$ n'est pas nul, donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et A, B, C définissent bien un plan.

Déterminant. Soit $M(x,y,z)$, avec $\overrightarrow{AM}(x-1, y, z)$. En développant suivant la première colonne :

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ &= (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad - y\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + z\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (x-1) + y + z. \end{aligned}$$

Conclusion. Le point M appartient à (ABC) si et seulement si ce déterminant est nul : le plan (ABC) a pour équation $x + y + z - 1 = 0$. Contrôle : A, B et C donnent chacun $1 - 1 = 0$.

3. 1 pts

Écrire une représentation paramétrique de la droite (OD). En déduire les coordonnées du point G où elle coupe le plan (ABC).

INDICE

Début : $\overrightarrow{OD}(1,1,1)$ dirige (OD). **Ensuite :** substitue dans l'équation de la question 2.

CORRIGÉ

Droite. $\overrightarrow{OD}(1,1,1)$ n'est pas nul. D'après la représentation paramétrique d'une droite, (OD) : $x = t$, $y = t$, $z = t$, où t décrit $\mathbb{R}$.

Sécants. Avec le triplet $(1,1,1)$ du plan (ABC) et le vecteur $\overrightarrow{OD}(1,1,1)$: $1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 3$, différent de 0. La propriété de position relative d'une droite et d'un plan montre alors que (OD) coupe (ABC) en un unique point G.

Point. Le point de paramètre t est dans (ABC) si et seulement si $t + t + t - 1 = 0$, soit $3t = 1$, c'est-à-dire $t = \dfrac{1}{3}$.

Conclusion. La droite (OD) a pour représentation $x = t$, $y = t$, $z = t$ ($t \in \mathbb{R}$), et elle coupe (ABC) en $G\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

4. 1 pts

La droite (AI) a pour représentation paramétrique $x = 1 - 2s$, $y = s$, $z = s$, où s décrit $\mathbb{R}$. Vérifier que (AI) passe par A et I, puis étudier la position relative des droites (AI) et (OD).

INDICE

Début : pour A puis pour I, cherche la valeur de s qui redonne ses coordonnées. **Ensuite :** compare les vecteurs directeurs ; puis garde deux paramètres distincts t et s.

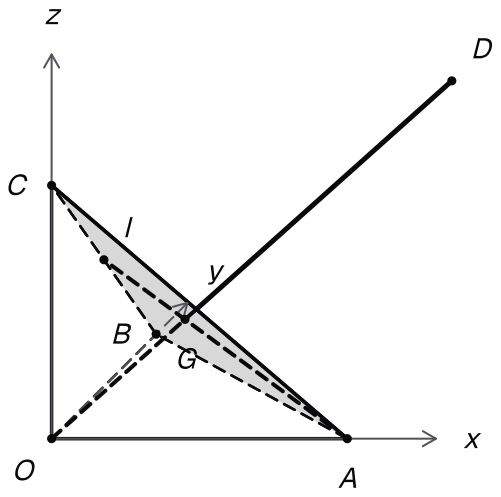
CORRIGÉ

Points. Pour $s = 0$, on obtient $(1, 0, 0)$: c'est le point A. Pour $s = \dfrac{1}{2}$, on obtient $\left(1 - 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$: c'est le point I. La droite donnée passe donc par A et par I.

Directions. (OD) est dirigée par $(1, 1, 1)$ et (AI) par $(-2, 1, 1)$. Le déterminant extrait $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ est non nul : ces vecteurs ne sont pas colinéaires, et les droites (AI) et (OD) ne sont pas parallèles.

Système. On garde deux paramètres distincts. L'égalité des abscisses et celle des ordonnées donnent $t = 1 - 2s$ et $t = s$, donc $s = 1 - 2s$, puis $s = \dfrac{1}{3}$ et $t = \dfrac{1}{3}$. Pour ces valeurs, les deux cotes valent $\dfrac{1}{3}$: le système admet une solution.

Conclusion. Par la propriété de position relative de deux droites, (AI) et (OD) sont sécantes. Leur point commun, de paramètre $t = \dfrac{1}{3}$ sur (OD), est le point G de la question 3.



La droite (OD) et la droite (AI) se coupent en G, le point où (OD) traverse la face ABC.

5. 1 pts

Justifier que le plan (OBC) a pour équation $x = 0$. En déduire la position relative de la droite (AD) et du plan (OBC).

INDICE

Début : calcule $\det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$. **Ensuite :** $\overrightarrow{AD}(0,1,1)$, et le point A.

CORRIGÉ

Plan. $\overrightarrow{OB}(0,1,0)$ et $\overrightarrow{OC}(0,0,1)$ ne sont pas colinéaires, car $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ n'est pas nul. Pour $M(x,y,z)$, on a $\overrightarrow{OM}(x,y,z)$ et

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \\ &= x \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad - y \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + z \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= x. \end{aligned}$$

Le point M appartient donc à (OBC) si et seulement si $x = 0$: c'est une équation de (OBC).

Direction. Cette équation a pour triplet $(1,0,0)$. Avec $\overrightarrow{AD}(0,1,1)$: $1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 0$. La droite (AD) est donc parallèle au plan (OBC).

Point. L'abscisse de A vaut 1, et non 0 : le point A de (AD) n'est pas dans (OBC).

Conclusion. La propriété de position relative d'une droite et d'un plan permet de conclure : la droite (AD) est strictement parallèle au plan (OBC), sans aucun point commun avec lui.

Exercice 2 — 5 pts

Un plan, une droite qui le traverse et un second plan

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(1,0,2)$, $B(2,1,1)$, $C(0,1,1)$ et $E(3,-1,1)$, ainsi que le plan Q d'équation $x - y + 2z - 1 = 0$. Place ces points sur une figure à main levée. Durée indicative : 45 minutes.

1. — 0,75 pts

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Justifier que A, B, C ne sont pas alignés.

INDICE

Outil : un seul déterminant extrait non nul suffit.

CORRIGÉ

Vecteurs. $\overrightarrow{AB}(2-1, 1-0, 1-2)$, soit $\overrightarrow{AB}(1,1,-1)$, et $\overrightarrow{AC}(0-1, 1-0, 1-2)$, soit $\overrightarrow{AC}(-1,1,-1)$.

Colinéarité. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$ n'est pas nul. Le critère de colinéarité en coordonnées permet de conclure : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Conclusion. Les points A, B, C ne sont pas alignés.

2. 1,25 pts

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

INDICE

Début : $\overrightarrow{AM}(x-1, y, z-2)$ dans la première colonne. **Attention :** l'un des trois déterminants de deux nombres sur deux est nul.

CORRIGÉ

Soit $M(x, y, z)$, avec $\overrightarrow{AM}(x-1, y, z-2)$. Le point M est dans (ABC) si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

Développement. Suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\
&= (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&\quad - y\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&\quad + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 0 \times (x-1) + 2y \\
&\quad + 2(z-2).
\end{aligned}$$

Réduction. Ce déterminant vaut $2y + 2z - 4$. En divisant par 2, le point M est dans (ABC) si et seulement si $y + z - 2 = 0$. L'inconnue x n'apparaît pas, ce qui est permis : le triplet $(0, 1, 1)$ n'est pas nul.

Conclusion. Le plan (ABC) a pour équation $y + z - 2 = 0$. Contrôle : A donne $0 + 2 - 2 = 0$, B et C donnent $1 + 1 - 2 = 0$.

3. 1 pts

Le point E appartient-il au plan (ABC) ? En déduire si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace, puis le confirmer par un déterminant.

INDICE

Début : remplace les coordonnées de E dans l'équation. **Ensuite :** $\overrightarrow{AE}(2, -1, -1)$.

CORRIGÉ

Appartenance. Pour $E(3, -1, 1)$: $-1 + 1 - 2 = -2$, qui n'est pas nul. Le point E n'est donc pas dans (ABC).

Raisonnons par l'absurde. Si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$ étaient coplanaires, $\overrightarrow{AE}$ s'écrirait à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$, qui ne sont pas colinéaires (question 1), et E serait dans le plan (ABC). Ces trois vecteurs ne sont donc pas coplanaires : d'après la décomposition dans une base, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.

Déterminant. Avec $\overrightarrow{AE}(2, -1, -1)$, en développant suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) \\
&= 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&\quad - 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&\quad + (-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -2 - 3 + 1 \\
&= -4.
\end{aligned}$$

Conclusion. Comme $-4 \neq 0$, le lien entre déterminant et coplanarité confirme que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.

4. 1 pts

La droite D passe par E et a pour vecteur directeur $\vec{w}(0, 1, 1)$. Écrire une représentation paramétrique de D, puis déterminer le point H où elle coupe le plan (ABC).

INDICE

Début : x reste égal à 3. **Ensuite :** calcule $0 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 1$, puis substitue.

CORRIGÉ

Droite. D'après la représentation paramétrique d'une droite, avec $E(3, -1, 1)$ et $\vec{w}(0, 1, 1)$: $D : x = 3$, $y = -1 + t$, $z = 1 + t$, où t décrit $\mathbb{R}$.

Sécants. Avec le triplet $(0, 1, 1)$ de (ABC) : $0 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$, différent de 0. Par la propriété de position relative d'une droite et d'un plan, D et (ABC) ont donc un unique point commun.

Point. Le point de paramètre t est dans (ABC) si et seulement si $(-1 + t) + (1 + t) - 2 = 0$, soit $2t - 2 = 0$ et $t = 1$. On obtient $x = 3$, $y = 0$ et $z = 2$. Donc $H(3, 0, 2)$.

Conclusion. La droite D coupe le plan (ABC) au point $H(3, 0, 2)$. Contrôle : $0 + 2 - 2 = 0$.

5. 1 pts

Justifier que les plans (ABC) et Q sont sécants. En posant $z = t$, déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection Δ.

INDICE

Outil : la position relative de deux plans : compare les triplets (a, b, c) des deux équations. **Ensuite :** tire y de la première équation, puis x de la seconde.

CORRIGÉ

Sécants. Les triplets sont $(0, 1, 1)$ pour (ABC) et $(1, -1, 2)$ pour Q. S'il existait un réel k tel que $(1, -1, 2) = k\,(0, 1, 1)$, les abscisses donneraient $1 = k \times 0$, c'est-à-dire $1 = 0$, ce qui est impossible. Faute de triplets proportionnels, la propriété de position relative de deux plans assure que (ABC) et Q se coupent suivant une droite Δ.

Système. Un point $M(x, y, z)$ est sur Δ si et seulement si $y + z - 2 = 0$ et $x - y + 2z - 1 = 0$. Avec $z = t$, la première équation donne $y = 2 - t$. La seconde donne alors

$$\begin{aligned} x &= 1 + y - 2z \\ &= 1 + (2 - t) - 2t \\ &= 3 - 3t. \end{aligned}$$

Conclusion. Une représentation paramétrique de Δ est

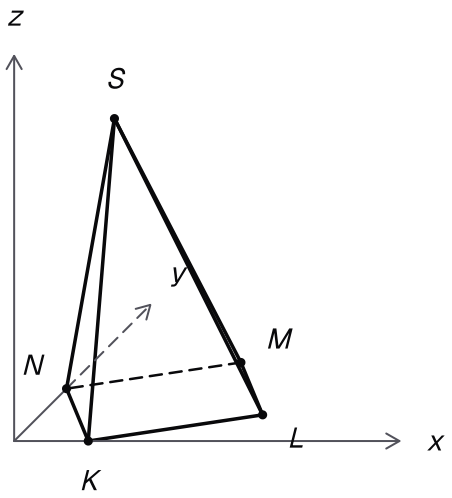
$$\Delta : \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 2 - t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$$

Exercice 3

5 pts

Une pyramide à base parallélogramme

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La pyramide $SKLMN$ a pour sommet $S(1,1,4)$ et pour base le quadrilatère $KLMN$, avec $K(1,0,0)$, $L(3,1,0)$, $M(2,3,0)$ et $N(0,2,0)$. Ses faces latérales sont les triangles SKL, SLM, SMN et SNK. Trace la figure sur ton cahier. Durée indicative : 50 minutes.



La pyramide SKLMN : sa base KLMN est dans le plan des deux premiers axes, son sommet S au-dessus.

1. 0,75 pts

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{KL}$ et de $\overrightarrow{NM}$. En déduire la nature de $KLMN$, puis les coordonnées de son centre Ω.

INDICE

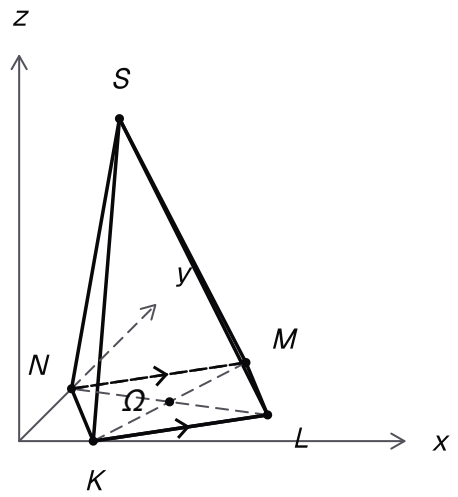
Outil : deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées. Le centre est le milieu de la diagonale $[KM]$.

CORRIGÉ

Vecteurs. $\overrightarrow{KL}(3-1, 1-0, 0-0)$, soit $\overrightarrow{KL}(2, 1, 0)$, et $\overrightarrow{NM}(2-0, 3-2, 0-0)$, soit $\overrightarrow{NM}(2, 1, 0)$. Ces vecteurs ont les mêmes coordonnées, donc $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$: le quadrilatère $KLMN$ est un parallélogramme.

Centre. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, qui est son centre. Le milieu de $[KM]$ a pour coordonnées $\left(\frac{1+2}{2}, \frac{0+3}{2}, 0\right)$; celui de $[LN]$, $\left(\frac{3+0}{2}, \frac{1+2}{2}, 0\right)$: c'est bien le même point.

Conclusion. $KLMN$ est un parallélogramme, de centre $\Omega\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$.



KLMN est un parallélogramme : ses diagonales [KM] et [LN] ont le même milieu Ω.

2. `0,75 pts`

Justifier que le plan (KLN) a pour équation $z = 0$. Le sommet S appartient-il à ce plan ?

INDICE

Début : $\overrightarrow{KL}(2,1,0)$ et $\overrightarrow{KN}(-1,2,0)$. Calcule $\det(\overrightarrow{KX}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{KN})$ avec $X(x,y,z)$.

CORRIGÉ

Directions. $\overrightarrow{KL}(2,1,0)$ et $\overrightarrow{KN}(-1,2,0)$. Le déterminant extrait $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5$ n'est pas nul, donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et K, L, N définissent un plan.

Équation. Soit $X(x,y,z)$, avec $\overrightarrow{KX}(x-1,y,z)$. En développant suivant la première colonne :

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{KX}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{KN}) \\ &= (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad - y\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad + z\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 0 - 0 + 5z \\ &= 5z. \end{aligned}$$

Le point X est dans (KLN) si et seulement si $5z = 0$, c'est-à-dire $z = 0$.

Conclusion. Le plan (KLN) a pour équation $z = 0$. La cote de S vaut 4, et non 0 : S n'appartient pas à ce plan, ce qui convient pour le sommet d'une pyramide.

3. 1,25 pts

Déterminer une équation cartésienne du plan (SKL).

INDICE

Début : $\overrightarrow{KS}(0,1,4)$. Développe $\det(\overrightarrow{KX},\overrightarrow{KL},\overrightarrow{KS})$ suivant la première colonne.

CORRIGÉ

Directions. $\overrightarrow{KS}(0,1,4)$. Le déterminant extrait $\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}=2$ n'est pas nul : $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KS}$ ne sont pas colinéaires, ils dirigent le plan (SKL).

Développement. Avec $\overrightarrow{KX}(x-1,y,z)$, suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}&\det(\overrightarrow{KX},\overrightarrow{KL},\overrightarrow{KS})\\&=(x-1)\begin{vmatrix}1&1\\0&4\end{vmatrix}\\&\quad-y\begin{vmatrix}2&0\\0&4\end{vmatrix}\\&\quad+z\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}\\&=4(x-1)-8y+2z.\end{aligned}$$

Conclusion. En divisant par 2, le plan (SKL) a pour équation $2x-4y+z-2=0$. Contrôle : K donne $2-2=0$, L donne $6-4-2=0$ et S donne $2-4+4-2=0$.

4. 0,75 pts

Vérifier que $4x-8y-3z+16=0$ est une équation du plan (SMN).

INDICE

Début : l'équation décrit un plan ; il suffit que M, N, S la vérifient et ne soient pas alignés.

CORRIGÉ

Points. On remplace dans $4x-8y-3z+16$:

- $N(0,2,0)$: $0-16-0+16=0$;
- $M(2,3,0)$: $8-24-0+16=0$;
- $S(1,1,4)$: $4-8-12+16=0$.

Non-alignement. $\overrightarrow{NM}(2,1,0)$ et $\overrightarrow{NS}(1,-1,4)$. Le déterminant extrait $\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2-1=-3$ n'est pas nul : N, M, S ne sont pas alignés.

Conclusion. Le triplet $(4,-8,-3)$ n'est pas nul : d'après le plan défini par une équation cartésienne, $4x-8y-3z+16=0$ est l'équation d'un plan. Ce plan contient les trois points non alignés M, N, S : c'est le plan (SMN).

5. 1 pts

Justifier que les plans (SKL) et (SMN) sont sécants. En posant $y = t$, déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection Δ.

INDICE

Début : compare les triplets (a, b, c) des deux équations. **Ensuite :** avec $y = t$, tes deux équations n'ont plus que x et z ; résous-les par substitution.

CORRIGÉ

Sécants. Si $(4, -8, -3) = k\,(2, -4, 1)$, les coefficients de x imposent $k = 2$. Mais $2 \times 1 = 2$ diffère de -3 : les triplets $(2, -4, 1)$ et $(4, -8, -3)$ ne sont pas proportionnels. Par la propriété de position relative de deux plans, (SKL) et (SMN) se coupent donc suivant une droite Δ.

Substitution. Avec $y = t$, l'équation de (SKL) donne $z = 2 - 2x + 4t$. On remplace dans le premier membre de l'équation de (SMN) :

$$\begin{aligned} &4x - 8t \\ &\quad - 3(2 - 2x + 4t) + 16 \\ &= 10x - 20t + 10. \end{aligned}$$

Le point est dans (SMN) si et seulement si cette expression est nulle, soit $10x - 20t + 10 = 0$. Donc $x = 2t - 1$, puis

$$\begin{aligned} z &= 2 - 2(2t - 1) + 4t \\ &= 4. \end{aligned}$$

Conclusion. Une représentation paramétrique de Δ est : $x = -1 + 2t$, $y = t$, $z = 4$, où t décrit $\mathbb{R}$.

6. `0,5 pts`

Vérifier que Δ passe par S, puis comparer sa direction avec celle de $\overrightarrow{KL}$.

INDICE

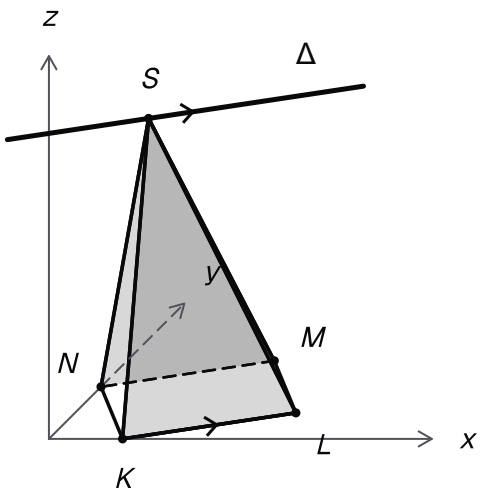
Début : l'ordonnée de S donne la valeur de t à essayer. **Outil :** les coefficients de t donnent un vecteur directeur.

CORRIGÉ

Point. L'ordonnée de S vaut 1 : on essaie $t = 1$. Pour $t = 1$, on obtient $(1, 1, 4)$: c'est le sommet S.

Direction. D'après la représentation paramétrique d'une droite, les coefficients de t montrent que Δ est dirigée par $(2, 1, 0)$, c'est-à-dire par $\overrightarrow{KL}$.

Conclusion. La droite Δ passe par S et elle est dirigée par $\overrightarrow{KL}$: c'est la parallèle à (KL) menée par S.



La droite Δ, commune aux faces SKL et SMN, passe par S parallèlement à (KL).

Exercice 4 5 pts

Deux droites qui se coupent pour un seul réel

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La droite D passe par $A(0, 1, 2)$ et elle est dirigée par $\vec{u}(2, 1, -1)$. Pour tout réel m, la droite D_m a pour représentation paramétrique :

$$D_m : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = s \\ z = m + s \end{cases} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

Elle est dirigée par $\vec{v}(1, 1, 1)$. Trace la figure sur ton cahier. Durée indicative : 45 minutes.

1. 0,75 pts

Écrire une représentation paramétrique de la droite D. Justifier que, pour tout réel m, les droites D et D_m ne sont pas parallèles.

INDICE

Début : garde le paramètre t pour D. **Outil :** compare $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par un déterminant extrait ; le réel m ne change pas la direction de D_m.

CORRIGÉ

Droite D. D'après la représentation paramétrique d'une droite, avec $A(0, 1, 2)$ et $\vec{u}(2, 1, -1)$: D : $x = 2t$, $y = 1 + t$, $z = 2 - t$, où t décrit $\mathbb{R}$.

Directions. Quel que soit le réel m, la droite D_m est dirigée par $\vec{v}(1, 1, 1)$. Le déterminant extrait $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$ n'est pas nul ; par le critère de colinéarité en coordonnées, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Conclusion. Pour tout réel m, les droites D et D_m ne sont pas parallèles.

2. 1,25 pts

Résoudre le système formé par l'égalité des abscisses et l'égalité des ordonnées des deux représentations, d'inconnues t et s. En déduire la valeur de m pour laquelle D et D_m sont sécantes, ainsi que les coordonnées de leur point commun I. Que dire des deux droites pour les autres valeurs de m ?

INDICE

Début : $2t = 1 + s$ et $1 + t = s$; remplace s dans la première égalité. **Ensuite :** compare les deux cotes obtenues avec ces valeurs de t et de s.

CORRIGÉ

Système. L'égalité des abscisses et celle des ordonnées s'écrivent :

$$\begin{cases} 2t = 1 + s \\ 1 + t = s \end{cases}$$

En remplaçant s par $1 + t$ dans la première égalité : $2t = 2 + t$, soit $t = 2$, puis $s = 3$.

Cotes. Pour $t = 2$, la cote du point de D vaut $2 - 2 = 0$. Pour $s = 3$, celle du point de D_m vaut $m + 3$. Ces cotes sont égales si et seulement si $m + 3 = 0$, c'est-à-dire $m = -3$.

Conclusion. Les directions ne sont pas colinéaires (question 1). D'après la position relative de deux droites :

- pour $m = -3$, le système admet la solution $t = 2$, $s = 3$: les droites D et D_{-3} sont sécantes en $I(4, 3, 0)$;
- pour $m \neq -3$, le système n'a aucune solution : D et D_m sont non coplanaires.

3. 1,25 pts

Le plan P passe par A et il est dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Déterminer une équation cartésienne de P. Pour $m = -3$, vérifier que le point I et le point $(1, 0, -3)$ de D_{-3} appartiennent à P.

INDICE

Début : $\overrightarrow{AM}(x, y-1, z-2)$ dans la première colonne. **Outil :** M est dans P si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$.

CORRIGÉ

Soit $M(x, y, z)$, avec $\overrightarrow{AM}(x, y-1, z-2)$. Le point M est dans P si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Développement. Suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) \\
&= x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad - (y-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad + (z-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2x - 3(y-1) + (z-2).
\end{aligned}$$

Équation. On obtient $2x - 3y + z + 1 = 0$, de triplet $(2, -3, 1)$ non nul. Contrôle avec A : $0 - 3 + 2 + 1 = 0$.

Conclusion. Une équation de P est $2x - 3y + z + 1 = 0$. Pour $I(4, 3, 0)$: $8 - 9 + 0 + 1 = 0$; pour $(1, 0, -3)$: $2 - 0 - 3 + 1 = 0$. Les deux points sont dans P. Ainsi P contient D, qui passe par A et est dirigée par $\vec{u}$, et D_{-3}, qui passe par $(1, 0, -3)$ et est dirigée par $\vec{v}$.

4. 1 pts

Le plan Q a pour équation $-4x + 6y - 2z + 5 = 0$. Étudier la position relative des plans P et Q. En déduire que la droite D n'a aucun point commun avec Q.

INDICE

Outil : compare d'abord les triplets (a, b, c), puis les quadruplets (a, b, c, d). **Ensuite :** dans quel plan se trouve la droite D ?

CORRIGÉ

Triplets. $(-4, 6, -2) = -2\,(2, -3, 1)$: les triplets sont proportionnels, donc P et Q sont parallèles.

Quadruplets. Le seul coefficient possible est -2, et $-2 \times 1 = -2$ diffère de 5 : les quadruplets ne sont pas proportionnels. La propriété de position relative de deux plans permet de conclure : P et Q sont strictement parallèles.

Droite D. D'après la question 3, la droite D est contenue dans P, qui n'a aucun point commun avec Q. Contrôle par le calcul : on remplace la représentation de D dans le premier membre de l'équation de Q ; pour tout réel t :

$$\begin{aligned} &-8t + 6(1 + t) \\ &\quad - 2(2 - t) + 5 \\ &= 7. \end{aligned}$$

Conclusion. Ce résultat n'est jamais nul : la droite D n'a aucun point commun avec Q.

5. 0,75 pts

On suppose $m \neq -3$. En remplaçant la représentation paramétrique de D_m dans l'équation de P, étudier la position relative de la droite D_m et du plan P.

INDICE

Début : calcule $2(1 + s) - 3s + (m + s) + 1$; regarde ce qui reste du paramètre s.

CORRIGÉ

Substitution. On remplace la représentation de D_m dans le premier membre de l'équation de P ; pour tout réel s :

$$\begin{aligned} &2(1 + s) - 3s \\ &\quad + (m + s) + 1 \\ &= m + 3. \end{aligned}$$

Le paramètre s disparaît : le point de D_m de paramètre s est dans P si et seulement si $m + 3 = 0$.

Conclusion. Comme $m \neq -3$, l'égalité $m + 3 = 0$ est fausse pour tout s : D_m et P n'ont aucun point commun. D'après la position relative d'une droite et d'un plan, D_m est strictement parallèle à P. Pour $m = -3$, l'égalité serait vraie pour tout s : on retrouve que D_{-3} est contenue dans P.

Exercice 5 5 pts

Un plan, de son équation à ses deux paramètres

L'espace est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Le plan P a pour équation $x-3y-2z+2=0$. On considère aussi les plans Q et R d'équations respectives $x+y-2z+6=0$ et $2y+z=0$. Place les points rencontrés sur une figure à main levée. Durée indicative : 50 minutes.

1. 1,25 pts

En posant $y=s$ et $z=t$, écrire une représentation paramétrique du plan P. En déduire un point A de P et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui le dirigent.

INDICE

Début : exprime x en fonction de y et de z à l'aide de l'équation. **Ensuite :** lis le point obtenu pour $s=0$ et $t=0$, puis les coefficients de s et de t.

CORRIGÉ

Système. L'équation de P donne $x=-2+3y+2z$. Un point $M(x,y,z)$ est donc dans P si et seulement s'il existe deux réels s et t (il suffit de prendre $s=y$ et $t=z$) tels que

$$\begin{cases} x=-2+3s+2t \\ y=s \\ z=t \end{cases}$$

où s et t décrivent $\mathbb{R}$.

Point et vecteurs. D'après la représentation paramétrique d'un plan, ce système décrit le plan passant par le point obtenu pour $s=0$ et $t=0$, soit $A(-2,0,0)$, et dirigé par les vecteurs des coefficients de s et de t : $\vec{u}(3,1,0)$ et $\vec{v}(2,0,1)$.

Non-colinéarité. Le déterminant extrait $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-2$ n'est pas nul : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Conclusion. Le plan P passe par $A(-2,0,0)$ et il est dirigé par les vecteurs non colinéaires $\vec{u}(3,1,0)$ et $\vec{v}(2,0,1)$. Contrôle : $-2-0-0+2=0$.

2. 0,75 pts

Calculer les coordonnées du point G de P obtenu pour $s = -1$ et $t = 1$. Le point $H(1, -1, 3)$ appartient-il à P ? Si oui, donner les valeurs de s et de t qui lui correspondent.

INDICE

Début : remplace s et t dans le système de la question 1. **Ensuite :** pour H, l'équation de P décide ; l'ordonnée et la cote donnent s et t.

CORRIGÉ

Point G. Pour $s = -1$ et $t = 1$: $x = -2 - 3 + 2 = -3$, $y = -1$ et $z = 1$. Donc $G(-3, -1, 1)$. Contrôle : $-3 + 3 - 2 + 2 = 0$.

Point H. L'équation de P décide : $1 - 3 \times (-1) - 2 \times 3 + 2 = 0$, donc H appartient à P. Son ordonnée et sa cote donnent $s = -1$ et $t = 3$; l'abscisse convient, car $-2 + 3 \times (-1) + 2 \times 3 = 1$.

Conclusion. Le point G a pour coordonnées $(-3, -1, 1)$; le point H appartient à P, avec les paramètres $s = -1$ et $t = 3$.

3. 1,25 pts

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{GH}$ et écrire une représentation paramétrique de la droite (GH). Justifier que les plans P et Q sont sécants, vérifier que (GH) est contenue dans Q, puis en déduire la droite d'intersection de P et de Q.

INDICE

Début : (GH) passe par G et elle est dirigée par $\overrightarrow{GH}$. **Outil :** compare les triplets (a, b, c) de P et de Q ; puis substitue la représentation de (GH) dans l'équation de Q.

CORRIGÉ

Droite. $\overrightarrow{GH}(1 + 3, -1 + 1, 3 - 1)$, soit $\overrightarrow{GH}(4, 0, 2)$, qui n'est pas nul. D'après la représentation paramétrique d'une droite, (GH) : $x = -3 + 4t$, $y = -1$, $z = 1 + 2t$, où t décrit $\mathbb{R}$.

Sécants. Si $(1, 1, -2) = k\,(1, -3, -2)$, les coefficients de x imposent $k = 1$; mais $1 \times (-3) = -3$ diffère de 1. Les triplets n'étant pas proportionnels, la propriété de position relative de deux plans montre que P et Q se coupent suivant une droite Δ.

Contenue. Pour tout réel t, on remplace dans le premier membre de l'équation de Q :

$$\begin{aligned}&(-3 + 4t) - 1\\&\quad - 2(1 + 2t) + 6\\&= 0.\end{aligned}$$

Tous les points de (GH) sont donc dans Q : la droite (GH) est contenue dans Q.

Conclusion. Les points G et H sont dans P (question 2), donc la droite (GH) est contenue dans P. Contenue dans P et dans Q, elle est incluse dans leur droite commune ; deux droites dont l'une est incluse dans l'autre sont égales, donc $\Delta = (GH)$.

4. 0,75 pts

La droite D passe par A et elle est dirigée par $\vec{v}$. Étudier la position relative des droites D et (GH).

INDICE

Début : compare $\overrightarrow{GH}$ et $\vec{v}$. **Ensuite :** regarde l'ordonnée des points de (GH) et celle de A.

CORRIGÉ

Directions. $\overrightarrow{GH}(4,0,2)$ et $\vec{v}(2,0,1)$ vérifient $\overrightarrow{GH}=2\,\vec{v}$: ils sont colinéaires, donc D et (GH) sont parallèles.

Point. Tout point de (GH) a pour ordonnée -1, alors que $A(-2,0,0)$ a pour ordonnée 0 : A n'est pas sur (GH).

Conclusion. Par la propriété de position relative de deux droites, D et (GH) sont strictement parallèles.

5. 1 pts

Justifier que la droite (GH) et le plan R sont sécants. En déduire les coordonnées du point J commun aux trois plans P, Q et R.

INDICE

Outil : avec le triplet $(0,2,1)$ de R et $\overrightarrow{GH}(4,0,2)$, calcule $0\times4+2\times0+1\times2$. **Ensuite :** un point commun à P et à Q est sur la droite de la question 3.

CORRIGÉ

Sécants. Le plan R a pour triplet $(0,2,1)$ et (GH) est dirigée par $\overrightarrow{GH}(4,0,2)$:

$$0\times4+2\times0+1\times2=2.$$

Ce nombre est différent de 0 ; la propriété de position relative d'une droite et d'un plan donne donc un unique point commun à (GH) et R.

Point. Le point de (GH) de paramètre t est dans R si et seulement si $2\times(-1)+(1+2t)=0$, c'est-à-dire $2t-1=0$, soit $t=\dfrac{1}{2}$. On obtient $x=-3+2=-1$, $y=-1$ et $z=1+1=2$, d'où le point $J(-1,-1,2)$.

Conclusion. Un point commun à P, Q et R est un point de $\Delta=(GH)$ (question 3) situé dans R : c'est J, et lui seul. Le point commun aux trois plans est donc $J(-1,-1,2)$. Contrôle : pour P, $-1+3-4+2=0$; pour Q, $-1-1-4+6=0$; pour R, $-2+2=0$.