BURHAN

Géométrie analytique de l'espace : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/geometrie-analytique-de-l-espace/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie analytique de l'espace	Entraînement	7

Exercice 1

Alignement, puis coplanarité de quatre points

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(1, 0, -1)$, $B(2, 2, 0)$, $C(0, 1, 1)$, $D(2, 5, 3)$ et $F(1, 1, 1)$.

1.

Justifier que les points A, B, C ne sont pas alignés.

INDICE

Début : calcule $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis un déterminant extrait non nul.

2.

Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ?

INDICE

Outil : le lien entre déterminant et coplanarité, appliqué à $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

3.

Le point F appartient-il au plan (ABC) ?

INDICE

Outil : même calcul, avec $\overrightarrow{AF}$ dans la troisième colonne.

Exercice 2

Une équation du plan passant par trois points

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(1,1,0)$, $B(2,1,1)$ et $C(0,2,2)$.

1.

Justifier que les points A, B, C définissent un plan.

INDICE

Outil : trois points non alignés définissent un plan. Teste la colinéarité de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2.

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC), puis la contrôler avec les trois points.

INDICE

Début : écris $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$ avec $\overrightarrow{AM}(x-1, y-1, z)$.

3.

Les points $D(2,0,-2)$ et $G(0,0,1)$ appartiennent-ils au plan (ABC) ?

INDICE

Outil : remplace les coordonnées dans l'équation trouvée.

Exercice 3

Le point où une droite traverse un plan

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le plan P a pour équation $2x + y - z - 5 = 0$. On donne les points $E(1,2,0)$ et $F(2,1,2)$.

1.

Écrire une représentation paramétrique de la droite (EF).

INDICE

Outil : la représentation paramétrique d'une droite, avec E et $\overrightarrow{EF}$.

2.

Justifier que la droite (EF) et le plan P sont sécants.

INDICE

Outil : la position relative d'une droite et d'un plan : calcule $2\alpha + \beta - \gamma$ pour le vecteur $\overrightarrow{EF}$.

3.

Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

INDICE

Début : substitue les trois expressions de la question 1 dans l'équation de P.

Exercice 4

Deux droites qui ne se rencontrent pas

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les droites D et D' de représentations paramétriques :

$$D : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 - t \end{cases}$$

$$D' : \begin{cases} x = -1 + s \\ y = 4 - s \quad (s \in \mathbb{R}) \\ z = s \end{cases}$$

1.

Les droites D et D' sont-elles parallèles ?

INDICE

Outil : lis un vecteur directeur de chaque droite dans les coefficients des paramètres, puis teste leur colinéarité.

2.

Les droites D et D' sont-elles sécantes ?

INDICE

Début : égale les abscisses, puis les ordonnées. Résous ce système en t et s, puis teste les cotes.

3.

La droite D'' a pour représentation paramétrique $x = 2t$, $y = 2 + 2t$, $z = 2 - 2t$, où t décrit $\mathbb{R}$. Étudier la position relative de D et D''.

INDICE

Outil : compare les vecteurs directeurs ; s'ils sont colinéaires, cherche si le point $A(1, 0, 2)$ de D est sur D''.

Exercice 5

La droite commune à deux plans

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les plans $P : x + 2y - z - 1 = 0$ et $P' : x - y + z - 2 = 0$.

1.

Justifier que les plans P et P' sont sécants.

INDICE

Outil : la position relative de deux plans ; les coefficients de x fixent le seul coefficient de proportionnalité possible.

2.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, en posant $x = t$.

INDICE

Début : additionne les deux équations pour éliminer z. **Ensuite :** exprime y, puis z, en fonction de t.

3.

Contrôler le résultat avec le point de Δ de paramètre $t = 1$.

INDICE

Outil : ce point doit vérifier les deux équations de départ.

Exercice 6

D'une représentation paramétrique à une équation

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le plan Q a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = 3 - s + 2t \\ z = s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R})$$

1.

Donner un point A de Q et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui le dirigent. Vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires.

INDICE

Outil : la représentation paramétrique d'un plan. Le point correspond à $s = t = 0$; les coefficients de s , puis de t, donnent les vecteurs.

2.

En déduire une équation cartésienne du plan Q.

INDICE

Début : $M(x, y, z)$ est dans Q si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$, avec $\overrightarrow{AM}(x - 1, y - 3, z)$.

3.

Contrôler cette équation avec le point de Q obtenu pour $s = 1$ et $t = -1$.

INDICE

Début : calcule d'abord ce point avec la représentation paramétrique.

Exercice 7

Un paramètre pour la coplanarité

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Pour tout réel m, on considère les vecteurs $\vec{u}(1, 2, -1)$, $\vec{v}(0, 1, 1)$ et $\vec{w}(m, 3, 0)$.

1.

Calculer $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ en fonction de m.

INDICE

Outil : le développement suivant la première colonne ; garde m comme une lettre.

2.

Pour quelle valeur de m les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

INDICE

Outil : le lien entre déterminant et coplanarité : écris que le résultat de la question 1 est nul.

3.

On prend $m = 1$. Trouver deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$.

INDICE

Début : écris l'égalité sur chaque coordonnée ; l'abscisse donne a tout de suite.