BURHAN

Géométrie analytique de l'espace : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/geometrie-analytique-de-l-espace/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie analytique de l'espace	Entraînement	7

Exercice 1

Alignement, puis coplanarité de quatre points

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(1, 0, -1)$, $B(2, 2, 0)$, $C(0, 1, 1)$, $D(2, 5, 3)$ et $F(1, 1, 1)$.

1.

Justifier que les points A, B, C ne sont pas alignés.

INDICE

Début : calcule $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis un déterminant extrait non nul.

CORRIGÉ

Vecteurs. $\overrightarrow{AB}(2-1, 2-0, 0+1)$, soit $\overrightarrow{AB}(1, 2, 1)$, et $\overrightarrow{AC}(0-1, 1-0, 1+1)$, soit $\overrightarrow{AC}(-1, 1, 2)$.

Déterminant extrait. Avec les abscisses et les ordonnées :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3.$$

Il n'est pas nul. Le critère de colinéarité en coordonnées permet de conclure : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Conclusion. Les points A, B, C ne sont pas alignés.

2.

Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ?

INDICE

Outil : le lien entre déterminant et coplanarité, appliqué à $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

CORRIGÉ

Les points A, B, C, D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ le sont.

Vecteur $\overrightarrow{AD}$. $\overrightarrow{AD}(2-1, 5-0, 3+1)$, soit $\overrightarrow{AD}(1, 5, 4)$.

Déterminant. En développant suivant la première colonne :

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \\ &= 1 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &\quad - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &\quad + 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -6 + 12 - 6 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après le lien entre déterminant et coplanarité, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires : les points A, B, C, D sont dans un même plan.

3.

Le point F appartient-il au plan (ABC) ?

INDICE

Outil : même calcul, avec $\overrightarrow{AF}$ dans la troisième colonne.

CORRIGÉ

Le point F appartient au plan (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$ sont coplanaires.

Vecteur $\overrightarrow{AF}$. $\overrightarrow{AF}(1-1, 1-0, 1+1)$, soit $\overrightarrow{AF}(0, 1, 2)$.

Déterminant. Suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}) \\
&= 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&\quad - 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&\quad + 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times 0 - 2 \times (-2) \\
&\quad + 1 \times (-1) \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Conclusion. Ce déterminant vaut 3, et non 0. Par le lien entre déterminant et coplanarité, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$ ne sont pas coplanaires. Le point F n'appartient pas au plan (ABC).

Exercice 2

Une équation du plan passant par trois points

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(1,1,0)$, $B(2,1,1)$ et $C(0,2,2)$.

1.

Justifier que les points A, B, C définissent un plan.

INDICE

Outil : trois points non alignés définissent un plan. Teste la colinéarité de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

CORRIGÉ

Trois points non alignés définissent un plan. Il suffit donc de vérifier que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Vecteurs. $\overrightarrow{AB}(1,0,1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1,1,2)$.

Déterminant extrait. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$ n'est pas nul. Le critère de colinéarité en coordonnées permet de conclure : ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

Conclusion. Les points A, B, C ne sont pas alignés : ils définissent un plan, le plan (ABC).

2.

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC), puis la contrôler avec les trois points.

INDICE

Début : écris $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$ avec $\overrightarrow{AM}(x-1, y-1, z)$.

CORRIGÉ

Soit $M(x, y, z)$, avec $\overrightarrow{AM}(x-1, y-1, z)$. Le point M appartient à (ABC) si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

Développement. Suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\
&= (x-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&\quad - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&\quad + z\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -(x-1) - 3(y-1) + z \\
&= -x - 3y + z + 4.
\end{aligned}$$

Équation. En multipliant par -1, on obtient une équation de (ABC) : $x + 3y - z - 4 = 0$.

Contrôle.

- $A(1, 1, 0)$: $1 + 3 - 0 - 4 = 0$;
- $B(2, 1, 1)$: $2 + 3 - 1 - 4 = 0$;
- $C(0, 2, 2)$: $0 + 6 - 2 - 4 = 0$.

Conclusion. Le plan (ABC) a pour équation $x + 3y - z - 4 = 0$, vérifiée par ses trois points.

3.

Les points $D(2, 0, -2)$ et $G(0, 0, 1)$ appartiennent-ils au plan (ABC) ?

INDICE

Outil : remplace les coordonnées dans l'équation trouvée.

CORRIGÉ

On remplace les coordonnées dans $x + 3y - z - 4$.

- Pour $D(2, 0, -2)$: $2 + 0 - (-2) - 4 = 0$, donc D appartient au plan (ABC).
- Pour $G(0, 0, 1)$: $0 + 0 - 1 - 4 = -5$. Ce nombre n'est pas nul, donc G n'appartient pas au plan (ABC).

Conclusion. Le point D appartient au plan (ABC) (les points A, B, C, D sont donc coplanaires) ; le point G ne lui appartient pas.

Exercice 3

Le point où une droite traverse un plan

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le plan P a pour équation $2x + y - z - 5 = 0$. On donne les points $E(1, 2, 0)$ et $F(2, 1, 2)$.

1.

Écrire une représentation paramétrique de la droite (EF).

INDICE

Outil : la représentation paramétrique d'une droite, avec E et $\overrightarrow{EF}$.

CORRIGÉ

Vecteur directeur. $\overrightarrow{EF}(2-1, 1-2, 2-0)$, soit $\overrightarrow{EF}(1, -1, 2)$, qui n'est pas nul.

Représentation. Avec le point $E(1, 2, 0)$ et le vecteur $\overrightarrow{EF}$, la représentation paramétrique d'une droite donne :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t \end{cases}$$

Conclusion. Le système obtenu représente paramétriquement la droite (EF).

2.

Justifier que la droite (EF) et le plan P sont sécants.

INDICE

Outil : la position relative d'une droite et d'un plan : calcule $2\alpha + \beta - \gamma$ pour le vecteur $\overrightarrow{EF}$.

CORRIGÉ

Le plan P a pour coefficients $a = 2, b = 1, c = -1$, et la droite (EF) est dirigée par $\overrightarrow{EF}(1, -1, 2)$. On calcule :

$$2 \times 1 + (-1) - 2 = -1.$$

Conclusion. Ce nombre est différent de 0 : la droite (EF) coupe le plan P en un unique point, par la propriété de position relative d'une droite et d'un plan.

3.

Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

INDICE

Début : substitue les trois expressions de la question 1 dans l'équation de P.

CORRIGÉ

Équation en t. On substitue la représentation de (EF) dans le premier membre de l'équation de P :

$$\begin{aligned} &2(1+t)+(2-t) \\ &\quad -2t-5 \\ &=-t-1. \end{aligned}$$

Le point de paramètre t est donc dans P si et seulement si $-t-1=0$, soit $t=-1$.

Point. Pour $t=-1$: $x=1-1=0$, $y=2+1=3$ et $z=2\times(-1)=-2$. Contrôle : $2\times 0+3-(-2)-5=0$.

Conclusion. Le point d'intersection est $(0,3,-2)$.

Exercice 4

Deux droites qui ne se rencontrent pas

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les droites D et D' de représentations paramétriques :

$$D : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 - t \end{cases}$$

$$D' : \begin{cases} x = -1 + s \\ y = 4 - s \quad (s \in \mathbb{R}) \\ z = s \end{cases}$$

1.

Les droites D et D' sont-elles parallèles ?

INDICE

Outil : lis un vecteur directeur de chaque droite dans les coefficients des paramètres, puis teste leur colinéarité.

CORRIGÉ

Vecteurs directeurs. Les coefficients des paramètres donnent $\vec{u}(1, 1, -1)$ pour D et $\vec{v}(1, -1, 1)$ pour D'.

Déterminant extrait. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$ n'est pas nul ; par le critère de colinéarité en coordonnées, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Conclusion. Les droites D et D' ne sont pas parallèles.

2.

Les droites D et D' sont-elles sécantes ?

INDICE

Début : égale les abscisses, puis les ordonnées. Résous ce système en t et s, puis teste les cotes.

CORRIGÉ

Les droites sont sécantes si et seulement si le système obtenu en égalant leurs coordonnées, avec les deux paramètres t et s, admet une solution.

Abscisses et ordonnées.

$$\begin{cases} 1+t=-1+s \\ t=4-s \end{cases}$$

La première équation donne $s=t+2$. La seconde devient $t=4-(t+2)$, soit $2t=2$. Donc $t=1$, puis $s=3$.

Cotes. Pour $t=1$, la cote du point de D vaut $2-1=1$; pour $s=3$, celle du point de D' vaut 3. Ces cotes diffèrent : le système n'a aucune solution.

Conclusion. Par la propriété de position relative de deux droites, D et D', qui ne sont pas parallèles, ne sont pas non plus sécantes : elles sont non coplanaires.

3.

La droite D'' a pour représentation paramétrique $x=2t$, $y=2+2t$, $z=2-2t$, où t décrit $\mathbb{R}$. Étudier la position relative de D et D''.

INDICE

Outil : compare les vecteurs directeurs ; s'ils sont colinéaires, cherche si le point $A(1,0,2)$ de D est sur D''.

CORRIGÉ

Directions. D'' est dirigée par $\vec{w}(2,2,-2)$, et $\vec{w}=2\,\vec{u}$: les vecteurs directeurs sont colinéaires, donc D et D'' sont parallèles.

Point. Le point $A(1,0,2)$ est sur D (paramètre $t=0$). S'il était sur D'', il existerait un réel t tel que $2t=1$ et $2+2t=0$. La première égalité donne $t=\dfrac{1}{2}$, la seconde $t=-1$: c'est impossible. Donc A n'est pas sur D''.

Conclusion. Par la propriété de position relative de deux droites, D et D'' sont strictement parallèles.

Exercice 5

La droite commune à deux plans

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les plans $P : x + 2y - z - 1 = 0$ et $P' : x - y + z - 2 = 0$.

1.

Justifier que les plans P et P' sont sécants.

INDICE

Outil : la position relative de deux plans ; les coefficients de x fixent le seul coefficient de proportionnalité possible.

CORRIGÉ

Les triplets (a, b, c) sont $(1, 2, -1)$ pour P et $(1, -1, 1)$ pour P'.

Coefficient possible. Les coefficients de x valent tous deux 1 : un éventuel coefficient de proportionnalité ne peut valoir que 1.

Coefficients de y. Or $1 \times 2 = 2$ diffère de -1 : les triplets ne sont pas proportionnels.

Conclusion. Par la propriété de position relative de deux plans, P et P' sont sécants suivant une droite Δ.

2.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, en posant $x = t$.

INDICE

Début : additionne les deux équations pour éliminer z. **Ensuite :** exprime y, puis z, en fonction de t.

CORRIGÉ

Un point $M(x, y, z)$ est sur Δ si et seulement si ses coordonnées vérifient le système formé par les équations de P et de P'.

Élimination de z. On remplace la seconde équation par la somme des deux, ce qui donne un système équivalent : $x + 2y - z - 1 = 0$ et $2x + y - 3 = 0$. Avec $x = t$, la seconde donne $y = 3 - 2t$.

Cote. La première donne $z = x + 2y - 1$, donc

$$\begin{aligned} z &= t + 2(3 - 2t) - 1 \\ &= 5 - 3t. \end{aligned}$$

Conclusion. Une représentation paramétrique de Δ est

$$\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

3.

Contrôler le résultat avec le point de Δ de paramètre $t = 1$.

INDICE

Outil : ce point doit vérifier les deux équations de départ.

CORRIGÉ

Pour $t = 1$, la représentation donne le point de coordonnées $(1, 3 - 2, 5 - 3)$, soit le point $(1, 1, 2)$.

- Équation de P : $1 + 2 \times 1 - 2 - 1 = 0$.
- Équation de P' : $1 - 1 + 2 - 2 = 0$.

Conclusion. Le point $(1, 1, 2)$ appartient aux deux plans, ce qui est cohérent avec la représentation trouvée.

Exercice 6

D'une représentation paramétrique à une équation

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le plan Q a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = 3 - s + 2t \\ z = s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R})$$

1.

Donner un point A de Q et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui le dirigent. Vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires.

INDICE

Outil : la représentation paramétrique d'un plan. Le point correspond à $s = t = 0$; les coefficients de s , puis de t, donnent les vecteurs.

CORRIGÉ

Point. Pour $s = 0$ et $t = 0$, la représentation donne le point $A(1, 3, 0)$ de Q.

Vecteurs. D'après la représentation paramétrique d'un plan, les coefficients de s donnent $\vec{u}(1, -1, 1)$ et ceux de t donnent $\vec{v}(1, 2, 0)$.

Colinéarité. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3$ n'est pas nul. Le critère de colinéarité en coordonnées permet de conclure : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Conclusion. Le plan Q passe par $A(1, 3, 0)$ et il est dirigé par les vecteurs non colinéaires $\vec{u}(1, -1, 1)$ et $\vec{v}(1, 2, 0)$.

2.

En déduire une équation cartésienne du plan Q.

INDICE

Début : $M(x,y,z)$ est dans Q si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v})=0$, avec $\overrightarrow{AM}(x-1,y-3,z)$.

CORRIGÉ

Soit $M(x,y,z)$, avec $\overrightarrow{AM}(x-1,y-3,z)$. Le point M appartient à Q si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v})=0$.

Développement. Suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}&\det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v})\\&=(x-1)\begin{vmatrix}-1&2\\1&0\end{vmatrix}\\&\quad-(y-3)\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}\\&\quad+z\begin{vmatrix}1&1\\-1&2\end{vmatrix}\\&=-2(x-1)+(y-3)+3z\\&=-2x+y+3z-1.\end{aligned}$$

Conclusion. En multipliant par -1, une équation cartésienne de Q est $2x-y-3z+1=0$.

3.

Contrôler cette équation avec le point de Q obtenu pour $s=1$ et $t=-1$.

INDICE

Début : calcule d'abord ce point avec la représentation paramétrique.

CORRIGÉ

Point. Pour $s=1$ et $t=-1$: $x=1+1-1=1$, $y=3-1-2=0$ et $z=1$. On obtient le point $(1,0,1)$ de Q.

Contrôle. $2\times1-0-3\times1+1=0$.

Conclusion. Le point $(1,0,1)$ vérifie l'équation $2x-y-3z+1=0$, ce qui confirme le résultat de la question 2.

Exercice 7

Un paramètre pour la coplanarité

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Pour tout réel m, on considère les vecteurs $\vec{u}(1, 2, -1)$, $\vec{v}(0, 1, 1)$ et $\vec{w}(m, 3, 0)$.

1.

Calculer $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ en fonction de m.

INDICE

Outil : le développement suivant la première colonne ; garde m comme une lettre.

CORRIGÉ

On range $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ en colonnes et on développe suivant la première colonne, en gardant m comme une lettre :

$$\begin{aligned}
&\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad - 2 \begin{vmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad + (-1) \begin{vmatrix} 0 & m \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= -3 - 2(-m) - (-m) \\
&= 3m - 3.
\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel m, $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 3m - 3$.

2.

Pour quelle valeur de m les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

INDICE

Outil : le lien entre déterminant et coplanarité : écris que le résultat de la question 1 est nul.

CORRIGÉ

D'après le lien entre déterminant et coplanarité, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si leur déterminant est nul. D'après la question 1 :

$$3m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Conclusion. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires pour $m = 1$ seulement. Pour tout réel $m \neq 1$, ils forment une base de l'espace.

3.

On prend $m = 1$. Trouver deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$.

INDICE

Début : écris l'égalité sur chaque coordonnée ; l'abscisse donne a tout de suite.

CORRIGÉ

Pour $m = 1$, on a $\vec{w}(1, 3, 0)$. On cherche deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$.

Système. L'égalité des coordonnées s'écrit :

$$\begin{cases} 1 = a \\ 3 = 2a + b \\ 0 = -a + b \end{cases}$$

Résolution. La première équation donne $a = 1$, puis la deuxième $b = 3 - 2 = 1$. La troisième est vérifiée : $-1 + 1 = 0$.

Conclusion. Les réels $a = 1$ et $b = 1$ conviennent : $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.