BURHAN

Géométrie analytique de l'espace : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/geometrie-analytique-de-l-espace/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie analytique de l'espace	Application	8

Exercice 1

Vecteurs et milieux à partir de trois points

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(3, -2, 1)$, $B(-1, 4, 5)$ et $C(2, 0, -3)$.

1.

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : les calculs en coordonnées. On retranche les coordonnées du point de départ à celles du point d'arrivée.

2.

Calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$ et du milieu J de $[BC]$.

INDICE

Outil : chaque coordonnée du milieu est la moyenne des deux coordonnées de même rang.

3.

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$. Comparer ce vecteur avec $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes coordonnées.

Exercice 2

Un quatrième sommet et un point défini par une égalité

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $E(1, 2, -1)$, $F(2, 0, 1)$ et $G(0, 1, 2)$.

1.

Déterminer les coordonnées du point H tel que $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$.

INDICE

Début : calcule $\overrightarrow{FG}$, puis écris $\overrightarrow{EH}$ avec les coordonnées inconnues (x, y, z) de H.

2.

Vérifier que les segments $[EG]$ et $[FH]$ ont le même milieu. Que peut-on dire du quadrilatère $EFGH$?

INDICE

Outil : calcule les deux milieux séparément, puis compare-les.

3.

Déterminer les coordonnées du point K tel que $\overrightarrow{EK} = 2\,\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EG}$.

INDICE

Début : calcule $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$, puis la combinaison, coordonnée par coordonnée.

Exercice 3

Colinéaires ou non : trois déterminants

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les vecteurs $\vec{u}(2, -1, 3)$, $\vec{v}(-4, 2, -6)$ et $\vec{w}(6, -3, 8)$.

1.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

INDICE

Outil : la colinéarité en coordonnées. Calcule les trois déterminants extraits du couple $(\vec{u}, \vec{v})$.

2.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?

INDICE

Attention : ne t'arrête pas au premier déterminant extrait s'il est nul.

3.

Déterminer le réel m pour lequel le vecteur $\vec{r}(-2, 1, m)$ est colinéaire à $\vec{u}$.

INDICE

Début : le premier déterminant extrait ne dépend pas de m. Écris que le deuxième est nul, puis contrôle le troisième.

Exercice 4

Une droite et ses points

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(1, -2, 0)$ et $B(3, -1, 2)$.

1.

Écrire une représentation paramétrique de la droite (AB).

INDICE

Outil : la représentation paramétrique d'une droite, avec le point A et le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

2.

Les points $C(5, 0, 4)$ et $E(-3, -4, -2)$ appartiennent-ils à la droite (AB) ?

INDICE

Outil : tire t de la première équation, puis contrôle les deux autres avec cette valeur.

3.

Déterminer les coordonnées du point de la droite (AB) dont l'abscisse vaut -1.

INDICE

Début : quelle valeur de t donne $x = -1$?

Exercice 5

Calculer un déterminant et conclure

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les vecteurs $\vec{u}(1, 0, 2)$, $\vec{v}(2, 1, -1)$, $\vec{w}(0, 3, 1)$ et $\vec{r}(3, 1, 1)$.

1.

Calculer $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-il une base de l'espace ?

INDICE

Outil : le déterminant de trois vecteurs. Range les coordonnées en colonnes et développe suivant la première colonne.

2.

Calculer $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$. Que peut-on en conclure ?

INDICE

Outil : le même développement, avec $\vec{r}$ dans la troisième colonne.

3.

Vérifier que $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v}$.

INDICE

Outil : additionne les coordonnées de même rang.

Exercice 6

Équation d'un plan donné par un point et deux vecteurs

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le plan P passe par le point $A(2, -1, 1)$ et il est dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1, 1, 0)$ et $\vec{v}(0, 2, 1)$.

1.

Justifier que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

INDICE

Outil : il suffit qu'un seul déterminant extrait ne soit pas nul.

2.

Le point $M(x, y, z)$ appartient à P si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$. En déduire une équation cartésienne de P.

INDICE

Début : $\overrightarrow{AM}(x-2, y+1, z-1)$ occupe la première colonne. Développe suivant cette colonne.

3.

Les points $B(3, 2, 2)$ et $C(1, 0, 1)$ appartiennent-ils au plan P ?

INDICE

Outil : remplace x, y, z par les coordonnées du point dans l'équation.

Exercice 7

Trois droites face à un même plan

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le plan P a pour équation $2x - y + z - 4 = 0$. On considère trois droites, où, chaque fois, t décrit $\mathbb{R}$:

$$D_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

$$D_3 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

1.

Étudier la position relative de la droite D_1 et du plan P.

INDICE

Outil : la position relative d'une droite et d'un plan. Avec le vecteur directeur (α, β, γ), calcule $2\alpha - \beta + \gamma$.

2.

Justifier que D_2 coupe P, puis déterminer les coordonnées de leur point commun.

INDICE

Début : remplace x, y, z dans l'équation de P par les expressions de D_2.

3.

Étudier la position relative de D_3 et de P.

INDICE

Outil : même test sur la direction ; s'il donne 0, regarde si un point de D_3 est dans P.

Exercice 8

Plans parallèles, confondus ou sécants

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les plans d'équations :

- $P_1 : x - 2y + 3z - 1 = 0$;
- $P_2 : -2x + 4y - 6z + 2 = 0$;
- $P_3 : 3x - 6y + 9z + 4 = 0$;
- $P_4 : x + 2y + 3z = 0$.

1.

Comparer les plans P_1 et P_2.

INDICE

Outil : la position relative de deux plans. Cherche un réel k tel que chaque coefficient de P_2 soit k fois celui de P_1.

2.

Comparer les plans P_1 et P_3.

INDICE

Outil : compare d'abord les triplets (a, b, c), et seulement ensuite les réels d.

3.

Comparer les plans P_1 et P_4.

INDICE

Outil : le seul coefficient possible est fixé par les coefficients de x ; teste-le sur ceux de y.