BURHAN

Géométrie analytique de l'espace : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/geometrie-analytique-de-l-espace/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie analytique de l'espace	Application	8

Exercice 1

Vecteurs et milieux à partir de trois points

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(3, -2, 1)$, $B(-1, 4, 5)$ et $C(2, 0, -3)$.

1.

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : les calculs en coordonnées. On retranche les coordonnées du point de départ à celles du point d'arrivée.

CORRIGÉ

Les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{MN}$ s'obtiennent en retranchant celles de M à celles de N (calculs en coordonnées).

Vecteur $\overrightarrow{AB}$. Ses coordonnées sont $(-1-3, 4+2, 5-1)$.

Vecteur $\overrightarrow{AC}$. Ses coordonnées sont $(2-3, 0+2, -3-1)$.

Conclusion. $\overrightarrow{AB}(-4, 6, 4)$ et $\overrightarrow{AC}(-1, 2, -4)$.

2.

Calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$ et du milieu J de $[BC]$.

INDICE

Outil : chaque coordonnée du milieu est la moyenne des deux coordonnées de même rang.

CORRIGÉ

Chaque coordonnée du milieu d'un segment est la moyenne des coordonnées de même rang de ses extrémités (calculs en coordonnées).

Milieu I de $[AB]$.

$$I\left(\frac{3-1}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{1+5}{2}\right)$$

Milieu J de $[BC]$.

$$J\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{5-3}{2}\right)$$

Conclusion. $I(1, 1, 3)$ et $J\left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)$.

3.

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$. Comparer ce vecteur avec $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes coordonnées.

CORRIGÉ

Coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$. On retranche les coordonnées de I à celles de J :

$$\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{2}-1, 2-1, 1-3\right)$$

donc $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2}, 1, -2\right)$.

Coordonnées de $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. On multiplie chaque coordonnée de $\overrightarrow{AC}(-1, 2, -4)$ par $\frac{1}{2}$: on obtient $\left(-\frac{1}{2}, 1, -2\right)$.

Conclusion. Les deux vecteurs ont les mêmes coordonnées, donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Exercice 2

Un quatrième sommet et un point défini par une égalité

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $E(1, 2, -1)$, $F(2, 0, 1)$ et $G(0, 1, 2)$.

1.

Déterminer les coordonnées du point H tel que $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$.

INDICE

Début : calcule $\overrightarrow{FG}$, puis écris $\overrightarrow{EH}$ avec les coordonnées inconnues (x, y, z) de H.

CORRIGÉ

Coordonnées de $\overrightarrow{FG}$. $\overrightarrow{FG}(0-2, 1-0, 2-1)$, soit $\overrightarrow{FG}(-2, 1, 1)$.

Mise en équation. Notons (x, y, z) les coordonnées de H ; alors $\overrightarrow{EH}(x-1, y-2, z+1)$. L'égalité $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$ se traduit, coordonnée par coordonnée, par le système

$$\begin{cases} x - 1 = -2 \\ y - 2 = 1 \\ z + 1 = 1 \end{cases}$$

qui donne $x = -1$, $y = 3$ et $z = 0$.

Conclusion. Le point cherché est $H(-1, 3, 0)$.

2.

Vérifier que les segments $[EG]$ et $[FH]$ ont le même milieu. Que peut-on dire du quadrilatère $EFGH$?

INDICE

Outil : calcule les deux milieux séparément, puis compare-les.

CORRIGÉ

Milieu de $[EG]$. Ses coordonnées sont

$$\left(\frac{1+0}{2}, \frac{2+1}{2}, \frac{-1+2}{2}\right)$$

soit $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Milieu de $[FH]$. Ses coordonnées sont

$$\left(\frac{2-1}{2}, \frac{0+3}{2}, \frac{1+0}{2}\right)$$

soit encore $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Conclusion. Les segments $[EG]$ et $[FH]$ ont le même milieu. Ce sont les diagonales du quadrilatère $EFGH$: $EFGH$ est donc un parallélogramme.

3.

Déterminer les coordonnées du point K tel que $\overrightarrow{EK} = 2\,\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EG}$.

INDICE

Début : calcule $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$, puis la combinaison, coordonnée par coordonnée.

CORRIGÉ

Vecteurs. $\overrightarrow{EF}(2-1, 0-2, 1+1)$, soit $\overrightarrow{EF}(1, -2, 2)$, et $\overrightarrow{EG}(0-1, 1-2, 2+1)$, soit $\overrightarrow{EG}(-1, -1, 3)$.

Combinaison. D'après les calculs en coordonnées, $2\,\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EG}$ a pour coordonnées $(2+1, -4+1, 4-3)$, soit $(3, -3, 1)$.

Point K. Avec $K(x, y, z)$, on a $\overrightarrow{EK}(x-1, y-2, z+1)$. L'égalité des coordonnées donne $x-1=3$, $y-2=-3$ et $z+1=1$, d'où $x=4$, $y=-1$ et $z=0$.

Conclusion. Le point cherché est $K(4, -1, 0)$.

Exercice 3

Colinéaires ou non : trois déterminants

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les vecteurs $\vec{u}(2, -1, 3)$, $\vec{v}(-4, 2, -6)$ et $\vec{w}(6, -3, 8)$.

1.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

INDICE

Outil : la colinéarité en coordonnées. Calcule les trois déterminants extraits du couple $(\vec{u}, \vec{v})$.

CORRIGÉ

On calcule les trois déterminants extraits du couple $(\vec{u}, \vec{v})$:

- abscisses et ordonnées : $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$;
- abscisses et cotes : $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$;
- ordonnées et cotes : $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$.

Les trois sont nuls. On peut aussi le vérifier directement : chaque coordonnée de $\vec{v}$ vaut -2 fois celle de $\vec{u}$, donc $\vec{v} = -2\,\vec{u}$.

Conclusion. D'après la colinéarité en coordonnées, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?

INDICE

Attention : ne t'arrête pas au premier déterminant extrait s'il est nul.

CORRIGÉ

Premier déterminant extrait. $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$. Il est nul, ce qui ne permet pas encore de conclure.

Deuxième déterminant extrait. $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 18 = -2$. Il n'est pas nul.

Conclusion. Un déterminant extrait du couple $(\vec{u}, \vec{w})$ n'est pas nul ; par le critère de colinéarité en coordonnées, $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

3.

Déterminer le réel m pour lequel le vecteur $\vec{r}(-2, 1, m)$ est colinéaire à $\vec{u}$.

INDICE

Début : le premier déterminant extrait ne dépend pas de m. Écris que le deuxième est nul, puis contrôle le troisième.

CORRIGÉ

Les vecteurs $\vec{u}(2, -1, 3)$ et $\vec{r}(-2, 1, m)$ sont colinéaires si et seulement si leurs trois déterminants extraits sont nuls.

Premier. $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$, quel que soit le réel m.

Deuxième. $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & m \end{vmatrix} = 2m + 6$. Il est nul si et seulement si $m = -3$.

Troisième. Pour $m = -3$: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0$.

Conclusion. Le vecteur $\vec{r}$ est colinéaire à $\vec{u}$ pour $m = -3$, et seulement pour $m = -3$.

Exercice 4

Une droite et ses points

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(1, -2, 0)$ et $B(3, -1, 2)$.

1.

Écrire une représentation paramétrique de la droite (AB).

INDICE

Outil : la représentation paramétrique d'une droite, avec le point A et le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

CORRIGÉ

Vecteur directeur. $\overrightarrow{AB}(3-1, -1+2, 2-0)$, soit $\overrightarrow{AB}(2, 1, 2)$. Ce vecteur n'est pas nul, car A et B sont distincts.

Représentation. D'après la représentation paramétrique d'une droite, la droite (AB) est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t \end{cases}$$

Conclusion. Le système obtenu représente paramétriquement la droite (AB).

2.

Les points $C(5, 0, 4)$ et $E(-3, -4, -2)$ appartiennent-ils à la droite (AB) ?

INDICE

Outil : tire t de la première équation, puis contrôle les deux autres avec cette valeur.

CORRIGÉ

Un point appartient à (AB) si et seulement s'il existe un réel t qui vérifie les trois équations à la fois.

Point C. L'abscisse donne $1 + 2t = 5$, soit $t = 2$. Pour $t = 2$: $y = -2 + 2 = 0$ et $z = 2 \times 2 = 4$. Les trois équations sont vérifiées, donc C appartient à (AB).

Point E. L'abscisse donne $1 + 2t = -3$, soit $t = -2$. Pour $t = -2$, l'ordonnée $-2 - 2 = -4$ convient, mais la cote $2 \times (-2) = -4$ diffère de -2. Aucun réel t ne vérifie les trois équations.

Conclusion. Le point C appartient à la droite (AB) ; le point E ne lui appartient pas.

3.

Déterminer les coordonnées du point de la droite (AB) dont l'abscisse vaut -1.

INDICE

Début : quelle valeur de t donne $x = -1$?

CORRIGÉ

Le paramètre t du point cherché vérifie $1 + 2t = -1$, soit $t = -1$.

Pour $t = -1$: $y = -2 - 1 = -3$ et $z = 2 \times (-1) = -2$.

Conclusion. Le point de (AB) d'abscisse -1 a pour coordonnées $(-1, -3, -2)$.

Exercice 5

Calculer un déterminant et conclure

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les vecteurs $\vec{u}(1, 0, 2)$, $\vec{v}(2, 1, -1)$, $\vec{w}(0, 3, 1)$ et $\vec{r}(3, 1, 1)$.

1.

Calculer $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-il une base de l'espace ?

INDICE

Outil : le déterminant de trois vecteurs. Range les coordonnées en colonnes et développe suivant la première colonne.

CORRIGÉ

On range les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ en colonnes, puis on développe suivant la première colonne (déterminant de trois vecteurs) :

$$\begin{aligned}
&\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad - 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times 4 - 0 + 2 \times 6 \\
&= 16.
\end{aligned}$$

Conclusion. Ce déterminant vaut 16, et non 0. Par le lien entre déterminant et coplanarité, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.

2.

Calculer $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$. Que peut-on en conclure ?

INDICE

Outil : le même développement, avec $\vec{r}$ dans la troisième colonne.

CORRIGÉ

On développe de même suivant la première colonne, avec $\vec{r}$ en troisième colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{r}) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times 2 - 0 + 2 \times (-1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Conclusion. Ce déterminant étant nul, le lien entre déterminant et coplanarité montre que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{r}$ sont coplanaires, et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$ n'est pas une base de l'espace.

3.

Vérifier que $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v}$.

INDICE

Outil : additionne les coordonnées de même rang.

CORRIGÉ

D'après les calculs en coordonnées, $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(1 + 2, 0 + 1, 2 - 1)$, soit $(3, 1, 1)$.

Conclusion. Ce sont les coordonnées de $\vec{r}$, donc $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v}$. Cette égalité écrit $\vec{r}$ à l'aide de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, ce qui confirme la coplanarité obtenue à la question 2.

Exercice 6

Équation d'un plan donné par un point et deux vecteurs

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le plan P passe par le point $A(2, -1, 1)$ et il est dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1, 1, 0)$ et $\vec{v}(0, 2, 1)$.

1.

Justifier que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

INDICE

Outil : il suffit qu'un seul déterminant extrait ne soit pas nul.

CORRIGÉ

Le déterminant extrait formé des abscisses et des ordonnées vaut

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2.$$

Conclusion. Ce déterminant extrait n'est pas nul. Le critère de colinéarité en coordonnées permet de conclure : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

2.

Le point $M(x, y, z)$ appartient à P si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$. En déduire une équation cartésienne de P.

INDICE

Début : $\overrightarrow{AM}(x - 2, y + 1, z - 1)$ occupe la première colonne. Développe suivant cette colonne.

CORRIGÉ

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. Alors $\overrightarrow{AM}(x - 2, y + 1, z - 1)$.

Développement. On place $\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}$ en colonnes et on développe suivant la première colonne :

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) \\ &= (x - 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad - (y + 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + (z - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (x - 2) - (y + 1) \\ &\quad + 2(z - 1) \\ &= x - y + 2z - 5. \end{aligned}$$

Équation. Le point M appartient à P si et seulement si ce déterminant est nul. Contrôle avec $A(2, -1, 1)$: $2 + 1 + 2 - 5 = 0$.

Conclusion. Le plan P a pour équation cartésienne $x - y + 2z - 5 = 0$.

3.

Les points $B(3,2,2)$ et $C(1,0,1)$ appartiennent-ils au plan P ?

INDICE

Outil : remplace x, y, z par les coordonnées du point dans l'équation.

CORRIGÉ

On remplace x, y, z par les coordonnées du point dans $x-y+2z-5$.

- Pour $B(3,2,2)$: $3-2+2\times 2-5=0$, donc B appartient à P.
- Pour $C(1,0,1)$: $1-0+2\times 1-5=-2$. Ce nombre n'est pas nul, donc C n'appartient pas à P.

Conclusion. Le point B appartient au plan P, le point C ne lui appartient pas.

Exercice 7

Trois droites face à un même plan

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le plan P a pour équation $2x - y + z - 4 = 0$. On considère trois droites, où, chaque fois, t décrit $\mathbb{R}$:

$$D_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

$$D_3 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

1.

Étudier la position relative de la droite D_1 et du plan P.

INDICE

Outil : la position relative d'une droite et d'un plan. Avec le vecteur directeur (α, β, γ), calcule $2\alpha - \beta + \gamma$.

CORRIGÉ

Direction. D_1 est dirigée par $\vec{u}_1(1, 3, 1)$, et $2 \times 1 - 3 + 1 = 0$. D'après la position relative d'une droite et d'un plan, D_1 est parallèle à P.

Point de D_1. Pour $t = 0$, on obtient le point $(1, 2, -1)$ de D_1. Or $2 \times 1 - 2 + (-1) - 4 = -5$, qui n'est pas nul : ce point n'est pas dans P.

Conclusion. La droite D_1 est strictement parallèle au plan P : elle n'a aucun point commun avec P.

2.

Justifier que D_2 coupe P, puis déterminer les coordonnées de leur point commun.

INDICE

Début : remplace x, y, z dans l'équation de P par les expressions de D_2.

CORRIGÉ

Direction. D_2 est dirigée par $\vec{u}_2(1,1,1)$, et $2\times 1-1+1=2$. Ce nombre étant différent de 0, la droite D_2 coupe P en un seul point (position relative d'une droite et d'un plan).

Point commun. Le point de D_2 de paramètre t appartient à P si et seulement si

$$\begin{aligned} 2(1+t)-t+t-4&=0\\ 2t-2&=0, \end{aligned}$$

soit $t=1$. Pour $t=1$, on obtient $x=2$, $y=1$ et $z=1$. Contrôle : $2\times 2-1+1-4=0$.

Conclusion. Le point commun est $(2,1,1)$.

3.

Étudier la position relative de D_3 et de P.

INDICE

Outil : même test sur la direction ; s'il donne 0, regarde si un point de D_3 est dans P.

CORRIGÉ

Direction. D_3 est dirigée par $\vec{u}_3(1,3,1)$, et $2\times 1-3+1=0$: D_3 est parallèle à P.

Point de D_3. Pour $t=0$, on obtient le point $(2,0,0)$, et $2\times 2-0+0-4=0$: ce point est dans P.

Conclusion. Par la propriété de position relative d'une droite et d'un plan, D_3 est contenue dans P.

Exercice 8

Plans parallèles, confondus ou sécants

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les plans d'équations :

- $P_1 : x - 2y + 3z - 1 = 0$;
- $P_2 : -2x + 4y - 6z + 2 = 0$;
- $P_3 : 3x - 6y + 9z + 4 = 0$;
- $P_4 : x + 2y + 3z = 0$.

1.

Comparer les plans P_1 et P_2.

INDICE

Outil : la position relative de deux plans. Cherche un réel k tel que chaque coefficient de P_2 soit k fois celui de P_1.

CORRIGÉ

Triplets. $(-2, 4, -6) = -2\,(1, -2, 3)$: les triplets (a, b, c) sont proportionnels, donc P_1 et P_2 sont parallèles.

Quadruplets. Les réels d valent -1 et 2, et $-2 \times (-1) = 2$. Le quadruplet $(-2, 4, -6, 2)$ est donc -2 fois le quadruplet $(1, -2, 3, -1)$.

Conclusion. Par la propriété de position relative de deux plans, P_1 et P_2 sont confondus.

2.

Comparer les plans P_1 et P_3.

INDICE

Outil : compare d'abord les triplets (a, b, c), et seulement ensuite les réels d.

CORRIGÉ

Triplets. $(3, -6, 9) = 3\,(1, -2, 3)$: les plans P_1 et P_3 sont parallèles.

Réels d. Le seul coefficient possible est 3, et $3 \times (-1) = -3$ diffère de 4 : les quadruplets ne sont pas proportionnels.

Conclusion. Par la propriété de position relative de deux plans, P_1 et P_3 sont strictement parallèles.

3.

Comparer les plans P_1 et P_4.

INDICE

Outil : le seul coefficient possible est fixé par les coefficients de x ; teste-le sur ceux de y.

CORRIGÉ

Coefficient possible. Si $(1,2,3) = k\,(1,-2,3)$, les coefficients de x imposent $k = 1$.

Coefficients de y. Or $1 \times (-2) = -2$ diffère de 2 : les triplets $(1,-2,3)$ et $(1,2,3)$ ne sont pas proportionnels.

Conclusion. Par la propriété de position relative de deux plans, P_1 et P_4 ne sont pas parallèles : ils sont sécants suivant une droite.