BURHAN

# Géométrie analytique de l'espace

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/geometrie-analytique-de-l-espace/cours

| Chapitre | Semestre |
| --- | --- |
| Géométrie analytique de l'espace | Semestre 2 |

## Trois nombres pour un point

Une lampe pend au plafond d'une salle de classe. Pour dire où elle est, choisis un coin du sol comme point de départ.

Avance de $3$ m le long du mur du tableau, puis de $2$ m le long du mur des fenêtres. Monte enfin de $2{,}5$ m : tu touches la lampe.

Trois nombres suffisent pour la situer : $3$, $2$ et $2{,}5$.

**Devine : Une araignée au plafond**

Une araignée est collée au plafond, à $3$ m de haut. Elle est juste au-dessus du point du sol situé à $4$ m le long du mur du tableau et à $1$ m le long du mur des fenêtres.

Quel triplet repère l'araignée, dans l'ordre choisi pour la lampe ?

**A.** $(4, 1, 0)$

**Faux.**

Ce triplet repère le point du sol, sous l'araignée. Or elle est en haut.

**B.** $(4, 1, 3)$

**Juste.**

Juste : les deux nombres du sol, puis la hauteur.

**C.** $(1, 4, 3)$

**Faux.**

L'ordre compte : d'abord le mur du tableau, puis le mur des fenêtres.

**D.** $(3, 4, 1)$

**Faux.**

La hauteur vient en dernier, comme pour la lampe.

**Correction**

On garde l'ordre choisi pour la lampe : le mur du tableau, le mur des fenêtres, puis la hauteur.

L'araignée est au-dessus du point $(4, 1)$ du sol, à $3$ m de haut. Son triplet est donc $(4, 1, 3)$.

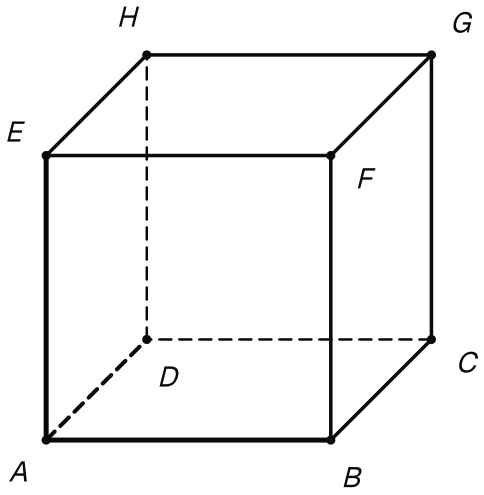
Un point de la salle se repère par trois nombres, et leur ordre compte.

Ces trois nombres sont les **coordonnées** d'un point de l'espace. Dans ce chapitre, tu calcules avec elles : vecteurs, milieux, alignement.

Tu décris ensuite des droites et des plans par des équations. Enfin, tu cherches où se rencontrent des droites et des plans : en un point, le long d'une droite, ou nulle part.

Prends ton cahier. Trace un cube $ABCDEFGH$ en perspective. La face du bas est $ABCD$, la face du haut est $EFGH$.

Les arêtes verticales sont $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$. Repasse en couleur les trois arêtes issues de $A$ : $[AB]$, $[AD]$ et $[AE]$. Elles serviront de repère.



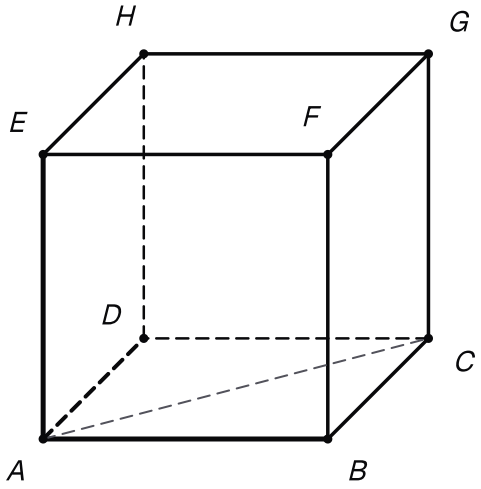

**Le cube à tracer sur ton cahier, avec en couleur les trois arêtes [AB], [AD] et [AE] qui partent de A.**

## Base, repère et coordonnées

### Trois arêtes pour tout écrire

**Rappel du chapitre Vecteurs de l'espace.** Dans le cube, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires. Tout vecteur s'écrit alors avec eux, et les coefficients se trouvent par identification.

Par exemple, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ : les coefficients sont $1$, $1$ et $0$.




**Les vecteurs AB, AD, AE portés par trois arêtes du cube, et la diagonale [AC] de la face du bas.**

**Devine : La grande diagonale**

Dans le cube, on écrit $\overrightarrow{AG} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AD} + z\,\overrightarrow{AE}$. Quel est le triplet $(x, y, z)$ ?

**A.** $(1, 1, 0)$

**Faux.**

Ce triplet donne $\overrightarrow{AC}$, sur la face du bas. Or $G$ est en haut.

**B.** $(0, 1, 1)$

**Faux.**

Ce triplet donne $\overrightarrow{AH}$ : il manque l'arête $[AB]$.

**C.** $(1, 1, 1)$

**Juste.**

Juste : les trois arêtes issues de $A$, une fois chacune.

**D.** $(1, 0, 1)$

**Faux.**

Ce triplet donne $\overrightarrow{AF}$ : il manque l'arête $[AD]$.

**Correction**

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}.$$

Or $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$. Donc :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.$$

Le triplet cherché est $(1, 1, 1)$.

**Propriété : Base de l'espace et décomposition d'un vecteur**

Soit $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ trois vecteurs **non coplanaires** de l'espace. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un **unique** triplet $(x, y, z)$ de réels tel que

$$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}.$$

On dit que le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une **base** de l'espace.

**Remarque : Résultat admis**

Ce résultat est admis. L'unicité du triplet, tu la connais déjà : c'est l'identification des coefficients du chapitre Vecteurs de l'espace.

**Exemple : décomposer dans la base du cube**

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires. D'après la décomposition dans une base, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.

**Le vecteur $\overrightarrow{EC}$.** D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EC} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Son triplet est $(1, 1, -1)$.

**Le vecteur $\overrightarrow{DF}$.** De même :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} \\ &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Son triplet est $(1, -1, 1)$.

## Une origine en plus : un repère

**En clair.** On choisit un point de départ $O$. Les coordonnées d'un point $M$ sont alors celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base.

**Définition : Repère et coordonnées**

Un **repère** de l'espace est un quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ formé d'un point $O$, l'**origine**, et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

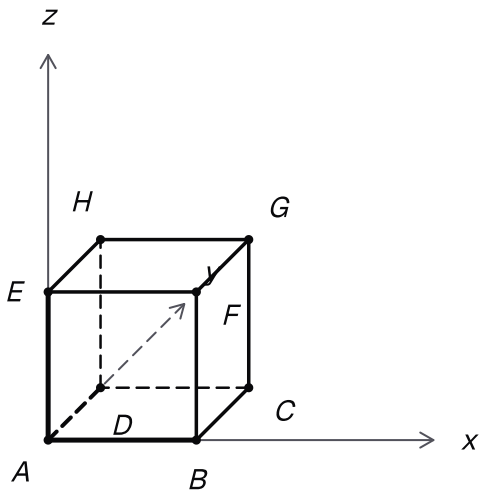
- Les **coordonnées** d'un vecteur $\vec{u}$ dans ce repère sont les réels $x$, $y$, $z$ tels que $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ ; on note $\vec{u}(x, y, z)$.

- Les **coordonnées** d'un point $M$ sont celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$ ; on note $M(x, y, z)$. Le réel $x$ est l'**abscisse** de $M$, $y$ son **ordonnée** et $z$ sa **cote**.

**Exemple : les sommets du cube**

On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Par définition, les coordonnées d'un point $M$ sont celles du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

- $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$ et $E(0,0,1)$.
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, donc $C(1,1,0)$. De même, $F(1,0,1)$ et $H(0,1,1)$.
- $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, donc $G(1,1,1)$.




**Le cube posé sur les trois axes du repère (A, AB, AD, AE) : chaque sommet se repère par trois nombres égaux à 0 ou à 1.**

## Changer de repère, puis à toi

**Vérifie : Une autre origine**

On munit maintenant l'espace du repère $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF})$. Quelles sont les coordonnées du point $D$ dans ce repère ?

**A.** $(0, 1, 0)$

**Faux.**

Ce sont ses coordonnées dans le repère d'origine $A$. Ici, l'origine est $B$.

**B.** $(-1, 1, 0)$

**Faux.**

C'est $\overrightarrow{BD}$ écrit avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, et non avec la nouvelle base.

**C.** $(1, 0, 1)$

**Faux.**

Ce triplet donne $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF}$, qui mène en $E$.

**D.** $(1, 1, 0)$

**Juste.**

Juste : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

**Correction**

Par définition des coordonnées, on décompose $\overrightarrow{BD}$ dans la base $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF})$.

La face $ABCD$ est un carré. D'après la règle du parallélogramme :

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}.$$

Dans ce repère, on a donc $D(1, 1, 0)$. Les coordonnées d'un point dépendent du repère choisi.

**À toi : Deux repères du cube**

Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, donne les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BH}$.

Donne ensuite les coordonnées du point $G$ dans le repère $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF})$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**

Écris chaque vecteur avec les vecteurs de la base, grâce à la relation de Chasles.

**Indice 2**

Pour $\overrightarrow{BH}$, passe par $A$ : $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}$.

**Indice 3**

Point délicat : dans le second repère, l'origine est $B$. On décompose donc $\overrightarrow{BG}$, et non $\overrightarrow{AG}$.

**Réponse**

**Le vecteur $\overrightarrow{BH}$.** D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{BH}\\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}\\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Par définition des coordonnées, $\overrightarrow{BH}(-1, 1, 1)$.

**Le point $G$.** Dans le second repère, on décompose $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$, avec $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BG} = 0\,\overrightarrow{BA} + 1\,\overrightarrow{BC}\\ + 1\,\overrightarrow{BF}.\end{aligned}$$

**Conclusion.** On a $\overrightarrow{BH}(-1,1,1)$ dans le premier repère, et $G(0,1,1)$ dans ce repère d'origine $B$.

## Calculer avec les coordonnées

### Les calculs du plan, en trois coordonnées

**En clair.** Dans le plan, tu calcules déjà avec deux coordonnées : extrémité moins origine pour un vecteur, moyenne pour un milieu.

Dans l'espace, rien ne change. On ajoute une troisième coordonnée, la cote, et on fait le même calcul sur elle.

**Devine : Un premier vecteur**

On donne $K(2,-1,4)$ et $L(5,1,3)$. Quelles sont, à ton avis, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{KL}$ ?

**A.** $(-3,-2,1)$

**Faux.**

C'est le vecteur $\overrightarrow{LK}$ : tu as retranché dans le mauvais ordre.

**B.** $(3,2,-1)$

**Juste.**

Juste : les coordonnées de $L$ moins celles de $K$.

**C.** $(7,0,7)$

**Faux.**

Tu as additionné les coordonnées. Un vecteur se calcule par différence.

**D.** $(3,2,1)$

**Faux.**

Pour la cote : $3-4=-1$.

**Correction**

On fait comme dans le plan, coordonnée par coordonnée : les coordonnées de $L$ moins celles de $K$.

$$\begin{aligned} x_L - x_K &= 5-2=3,\\ y_L - y_K &= 1-(-1)=2,\\ z_L - z_K &= 3-4=-1. \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{KL}(3,2,-1)$.

**Propriété : Calculs en coordonnées**

L'espace est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ deux vecteurs, $\lambda$ un réel, $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ deux points.

- $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.
- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y', z + z')$ et $\lambda\,\vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
- $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.
- Le milieu $I$ du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}, \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

**Remarque : Résultat admis**

Ce résultat est admis. Ce sont les calculs du plan, avec une coordonnée de plus.

## Vecteur, milieu, point défini par une égalité

**Exemple : un vecteur, un milieu, une combinaison**

On donne $R(1, 4, -2)$ et $S(-3, 0, 6)$. On applique les calculs en coordonnées.

**Vecteur.** D'après les calculs en coordonnées, $\overrightarrow{RS}$ a pour coordonnées $(-3 - 1, 0 - 4, 6 - (-2))$, soit $(-4, -4, 8)$.

**Milieu.** Le milieu $I$ de $[RS]$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{1 - 3}{2}, \frac{4 + 0}{2}, \frac{-2 + 6}{2}\right),$$

soit $I(-1, 2, 2)$.

**Contrôle.** Le vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{RS}$ a pour coordonnées $(-2, -2, 4)$. C'est aussi $\overrightarrow{RI}$, ce qui confirme le milieu.

**Méthode : calculer avec les coordonnées**

1. **Écris** les coordonnées des points dans l'ordre : abscisse, ordonnée, cote.
2. **Retranche**, pour $\overrightarrow{AB}$ : extrémité moins origine, coordonnée par coordonnée.
3. **Fais la moyenne** de chaque coordonnée pour un milieu.
4. **Traduis** une égalité vectorielle en trois équations, puis résous-les : tu obtiens le point cherché.

**Exemple : un point défini par une égalité vectorielle**

On donne $J(1, 2, 0)$ et $Q(2, 0, 1)$. On cherche le point $N(x, y, z)$ tel que :

$$\overrightarrow{JN} = 3\,\overrightarrow{JQ}.$$

**Les deux membres.** D'après les calculs en coordonnées, $\overrightarrow{JQ}(1,-2,1)$, donc $3\,\overrightarrow{JQ}(3,-6,3)$. De plus, $\overrightarrow{JN}(x-1,y-2,z)$.

**Identification.** Deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées : $x-1=3$, $y-2=-6$ et $z=3$.

Donc $N(4,-4,3)$.

## Un piège, puis à toi

**Attention : l'ordre de la soustraction**

✗ « $\overrightarrow{RS}$ a pour coordonnées $(1-(-3),4-0,-2-6)$, soit $(4,4,-8)$. »

✓ On retranche les coordonnées de l'origine $R$ à celles de l'extrémité $S$ : $\overrightarrow{RS}(-4,-4,8)$. Le calcul barré donne $\overrightarrow{SR}$, le vecteur opposé.

Pour contrôler, ajoute les coordonnées de $\overrightarrow{RS}$ à celles de $R$ : tu dois retrouver $S$.

**À toi : Vecteur, milieu et point**

On donne $T(-2,3,1)$ et $V(4,-1,5)$. Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{TV}$ et du milieu $U$ de $[TV]$.

Calcule ensuite celles du point $W$ tel que $\overrightarrow{TW}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{TV}$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**
Le vecteur se calcule par différence, le milieu par moyenne.
**Indice 2**
Pour $W$, calcule d'abord $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{TV}$, puis écris $\overrightarrow{TW}$ coordonnée par coordonnée.
**Indice 3**
Point délicat : le coefficient est négatif. Le point $W$ est donc du côté opposé à $V$ par rapport à $T$.

**Réponse**
**Vecteur.** D'après les calculs en coordonnées, $\overrightarrow{TV}(4-(-2),-1-3,5-1)$, soit $\overrightarrow{TV}(6,-4,4)$.

**Milieu.** Le milieu de $[TV]$ est le point :

$$U\left(\frac{-2+4}{2},\frac{3-1}{2},\frac{1+5}{2}\right),$$

soit $U(1,1,3)$.

**Point $W$.** Le vecteur $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{TV}$ a pour coordonnées $(-3,2,-2)$. Avec $W(x,y,z)$, on a $\overrightarrow{TW}(x+2,y-3,z-1)$. L'égalité donne $x+2=-3$, $y-3=2$ et $z-1=-2$.

**Conclusion.** $\overrightarrow{TV}(6,-4,4)$, $U(1,1,3)$ et $W(-5,5,-1)$.

## Colinéarité et alignement

### Des coordonnées proportionnelles

**Rappel du tronc commun.** Dans le plan, $\vec{u}(a,b)$ et $\vec{v}(a',b')$ sont colinéaires exactement quand :

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b = 0.$$

Dans l'espace aussi, deux vecteurs colinéaires ont des coordonnées proportionnelles.

**Devine : Deux vecteurs de l'espace**

Les vecteurs $\vec{u}(2,-1,3)$ et $\vec{v}(-4,2,-6)$ sont-ils colinéaires ?

**A.** Oui : $\vec{v} = -2\,\vec{u}$.

**Juste.**

Juste : chaque coordonnée de $\vec{v}$ vaut $-2$ fois celle de $\vec{u}$.

**B.** Non : leurs coordonnées n'ont pas les mêmes signes.

**Faux.**

Des signes contraires donnent un coefficient négatif, pas une absence de colinéarité.

**C.** On ne peut pas savoir sans les dessiner.

**Faux.**

Les coordonnées suffisent : on cherche un même coefficient pour les trois.

**D.** Non : dans l'espace, cela n'arrive jamais.

**Faux.**

Deux vecteurs de l'espace peuvent être colinéaires : $\vec{u}$ et $2\,\vec{u}$, par exemple.

**Correction**

On compare les coordonnées une à une :

$$\begin{aligned} -4 &= -2 \times 2, \\ 2 &= -2 \times (-1), \\ -6 &= -2 \times 3. \end{aligned}$$

Donc $\vec{v} = -2\,\vec{u}$ : les vecteurs sont colinéaires.

**En clair.** Dans l'espace, on teste la proportionnalité deux coordonnées à la fois : les abscisses et les ordonnées, puis les abscisses et les cotes, puis les ordonnées et les cotes.

Chaque couple donne un déterminant de deux nombres sur deux, comme dans le plan.

### Trois déterminants extraits

**Propriété : Colinéarité de deux vecteurs en coordonnées**

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$ deux vecteurs. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si les **trois** déterminants

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$$

sont nuls. Ces déterminants sont appelés les **déterminants extraits** du couple $(\vec{u}, \vec{v})$.

**Remarque : Résultat admis**

Ce résultat est admis. Sa preuve demande de distinguer plusieurs cas, selon les coordonnées nulles.

**Exemple : trois points alignés, puis non alignés**

On donne $R(1, 2, -1)$, $S(3, 1, 2)$ et $T(7, -1, 8)$. D'après les calculs en coordonnées, $\overrightarrow{RS}(2, -1, 3)$ et $\overrightarrow{RT}(6, -3, 9)$.

**Les trois déterminants extraits.**

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0,$$
$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0,$$
$$\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0.$$

D'après la colinéarité en coordonnées, $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ sont colinéaires : $R$, $S$, $T$ sont alignés.

**Un autre point.** Avec $Q(7, -1, 9)$, on a $\overrightarrow{RQ}(6, -3, 10)$ et :

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 18 = 2.$$

Ce déterminant extrait n'est pas nul : $R$, $S$, $Q$ ne sont pas alignés.

## Méthode, piège, puis à toi

**Méthode : colinéarité et alignement**

1. **Calcule** les coordonnées des deux vecteurs. Pour l'alignement de trois points, prends deux vecteurs de même origine.
2. **Calcule** les trois déterminants extraits.
3. **Conclus** à la colinéarité, donc à l'alignement, s'ils sont tous nuls.

4. **Arrête-toi** dès qu'un déterminant est non nul : les vecteurs ne sont pas colinéaires.

**Attention : les trois déterminants**

✗ « Pour $\vec{u}(1,2,3)$ et $\vec{v}(2,4,5)$, le premier déterminant extrait vaut $1\times 4-2\times 2=0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. »

✓ Un seul déterminant extrait nul ne suffit pas. Ici, le deuxième vaut :

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=5-6=-1.$$

Ce déterminant n'est pas nul : les vecteurs ne sont pas colinéaires. Pour conclure à la colinéarité, vérifie les trois.

**À toi : Alignés ou non**

On donne $K(0,1,-2)$, $L(2,2,0)$, $N(-4,-1,-6)$ et $V(4,3,3)$.

Les points $K$, $L$, $N$ sont-ils alignés ? Et les points $K$, $L$, $V$ ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**
Calcule $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{KN}$ et $\overrightarrow{KV}$, puis les déterminants extraits de chaque couple.
**Indice 2**
Pour $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KV}$, calcule aussi le déterminant des abscisses et des cotes.
**Indice 3**
Point délicat : pour chaque couple, calcule les trois déterminants extraits avant de conclure.

**Réponse**
D'après les calculs en coordonnées, $\overrightarrow{KL}(2,1,2)$, $\overrightarrow{KN}(-4,-2,-4)$ et $\overrightarrow{KV}(4,2,5)$.

**Points $K$, $L$, $N$.** Les trois déterminants extraits de $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KN}$ sont nuls :

$$\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-4+4=0,$$
$$\begin{vmatrix}2 & -4\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-8+8=0,$$
$$\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-4+4=0.$$

D'après la colinéarité en coordonnées, $K$, $L$, $N$ sont alignés.

**Points $K$, $L$, $V$.** Le premier déterminant extrait de $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KV}$ est nul, mais pas le deuxième :

$$\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4-4=0,$$
$$\begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & 5\end{vmatrix}=10-8=2.$$

Donc $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KV}$ ne sont pas colinéaires, et $K$, $L$, $V$ ne sont pas alignés.

## Représentation paramétrique d'une droite

### Un point qui avance

**Rappel du chapitre Vecteurs de l'espace.** La droite $D(A, \vec{u})$ passe par $A$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}$, non nul.

Un point $M$ lui appartient si et seulement s'il existe un réel $t$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$.

**Devine : Deux secondes plus tard**

Un point part de $K(1, 2, 0)$. À chaque seconde, il se déplace du vecteur $\vec{u}(2, -1, 3)$. Où est-il au bout de $2$ secondes ?

**A.** $(3, 1, 3)$
**Faux.**
C'est sa position au bout d'une seule seconde.

**B.** $(4, -2, 6)$
**Faux.**
C'est le vecteur $2\,\vec{u}$ ; il faut partir de $K$.

**C.** $(5, 4, 6)$
**Faux.**
Pour l'ordonnée : $2 + 2 \times (-1) = 0$.

**D.** $(5, 0, 6)$
**Juste.**
Juste : $K$ plus deux fois $\vec{u}$.

**Correction**
Au bout de $2$ secondes, le point $M$ vérifie $\overrightarrow{KM} = 2\,\vec{u}$, avec $2\,\vec{u}(4, -2, 6)$.

Donc $M(1 + 4, 2 - 2, 0 + 6)$, soit $M(5, 0, 6)$.

Plus généralement, au temps $t$, le point est en $(1 + 2t, 2 - t, 3t)$.

### Un paramètre pour une droite

**En clair.** Au temps $t$, le point mobile a pour coordonnées $x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$ et $z = 3t$. Quand $t$ décrit tous les réels, il parcourt toute la droite.

**Pourquoi est-ce vrai ?** On traduit l'égalité $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$ coordonnée par coordonnée.

**Propriété : Représentation paramétrique d'une droite**

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point et $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur **non nul**. Un point $M(x, y, z)$ appartient à la droite $D(A, \vec{u})$ si et seulement s'il existe un réel $t$ tel que

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$$

Ce système, où $t$ décrit $\mathbb{R}$, est une **représentation paramétrique** de la droite $D(A, \vec{u})$ ; $t$ est le **paramètre**.

---

**Démonstration**

**Étape 1.** D'après la définition vectorielle d'une droite (chapitre précédent), $M$ appartient à $D(A, \vec{u})$ si et seulement s'il existe un réel $t$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$.

**Étape 2.** D'après les calculs en coordonnées, $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x - x_A, y - y_A, z - z_A)$ et $t\,\vec{u}$ a pour coordonnées $(\alpha t, \beta t, \gamma t)$.

**Étape 3.** Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées. Donc $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$ équivaut à $x - x_A = \alpha t$, $y - y_A = \beta t$ et $z - z_A = \gamma t$, c'est-à-dire au système annoncé.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

La preuve traduit une égalité vectorielle, $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$, en trois égalités de nombres.

L'outil est l'égalité de deux vecteurs : ils sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées. Ce geste reviendra pour les plans.

**Vérifie : L'égalité de départ**

Dans la preuve, quelle égalité vectorielle est traduite coordonnée par coordonnée ?

**A.** $\overrightarrow{OM} = t\,\vec{u}$

**Faux.**

Cette égalité décrit la droite passant par $O$, et non par $A$.

**B.** $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$

**Juste.**

Juste : c'est la définition vectorielle de la droite $D(A, \vec{u})$.

**C.** $\vec{u} = t\,\overrightarrow{AM}$

**Faux.**

Pour $M = A$, aucun réel $t$ ne convient, alors que $A$ est sur la droite.

**D.** $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + t$

**Faux.**

On n'additionne pas un vecteur et un réel.

**Correction**
La preuve part de la définition vectorielle d'une droite : $M \in D(A, \vec{u})$ si et seulement s'il existe un réel $t$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$.

D'après les calculs en coordonnées, cette égalité équivaut aux trois égalités $x - x_A = \alpha t$, $y - y_A = \beta t$ et $z - z_A = \gamma t$.

## Écrire une droite, tester un point

**Exemple : la droite passant par deux points**

On donne $R(2, -1, 1)$ et $S(4, 0, -2)$. Le vecteur $\overrightarrow{RS}(2, 1, -3)$ est non nul : c'est un vecteur directeur de $(RS)$.

D'après la représentation paramétrique d'une droite :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Contrôle : $t = 0$ donne $R$, et $t = 1$ donne $S(4, 0, -2)$.

**Méthode : représentation paramétrique et appartenance**

1. **Repère** sur la droite un point et l'un de ses vecteurs directeurs. Pour la droite $(AB)$, prends $\overrightarrow{AB}$.
2. **Écris** le système, avec un seul paramètre $t$.
3. **Remplace**, pour tester un point, $x$, $y$, $z$ par ses coordonnées. Tire $t$ de chaque équation.
4. **Compare** : le point est sur la droite si et seulement si les trois valeurs de $t$ sont égales.

**Exemple : un point est-il sur la droite ?**

On reprend la droite $(RS)$.

**Point $T(6, 1, -5)$.** On remplace $x$, $y$, $z$ par ses coordonnées :

- $6 = 2 + 2t$ donne $t = 2$ ;
- $1 = -1 + t$ donne $t = 2$ ;
- $-5 = 1 - 3t$ donne $t = 2$.

Les trois équations donnent la même valeur. D'après la représentation paramétrique d'une droite, $T$ appartient à $(RS)$ : c'est le point de paramètre $2$.

**Point $V(0,-2,3)$.** Les deux premières équations donnent $t=-1$, la troisième $t=-\dfrac{2}{3}$. Aucun réel ne vérifie les trois à la fois : $V$ n'appartient pas à $(RS)$.

## Un piège, puis à toi

**Attention : une droite, plusieurs systèmes**

✗ « Le système $x=4+2t, y=t, z=-2-3t$ n'est pas celui de l'exemple : il décrit une autre droite que $(RS)$. »

✓ Ce système part de $S$ au lieu de $R$, avec le même vecteur directeur : c'est la même droite. Une droite a une infinité de représentations paramétriques.

Pour comparer deux systèmes, teste un point : ici, $t=-1$ redonne $R$.

**À toi : Une droite et deux points**

Soit $D$ la droite passant par $J(0,3,-1)$, de vecteur directeur $\vec{w}(1,-2,2)$.

Écris une représentation paramétrique de $D$. Les points $N(2,-1,3)$ et $Q(-1,5,-2)$ appartiennent-ils à $D$ ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**
Applique la représentation paramétrique d'une droite, avec $J$ et $\vec{w}$.
**Indice 2**
Pour chaque point, tire $t$ de la première équation, puis teste les deux autres.
**Indice 3**
Point délicat : teste les trois équations avec la valeur de $t$ trouvée, sans en oublier une.

**Réponse**
**Représentation.** D'après la représentation paramétrique d'une droite :

$$\begin{cases} x=t \\ y=3-2t \\ z=-1+2t \end{cases} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

**Point $N(2,-1,3)$.** La première équation donne $t=2$. Alors $y=3-4=-1$ et $z=-1+4=3$ : on retrouve les coordonnées de $N$. Donc $N\in D$.

**Point $Q(-1,5,-2)$.** La première équation donne $t=-1$, et $y=3+2=5$ convient. Mais $z=-1-2=-3$, et non $-2$. Donc $Q\notin D$.

**Conclusion.** Le point $N$ appartient à $D$ ; le point $Q$ n'y appartient pas.

## Déterminant de trois vecteurs

### Un nombre pour trancher

**En clair.** Au chapitre précédent, pour savoir si trois vecteurs sont coplanaires, tu cherchais une combinaison. C'est parfois long.

Le déterminant de trois vecteurs est un seul nombre, calculé avec leurs neuf coordonnées. Il va trancher la question.

**Devine : Trois vecteurs dans un même plan ?**

Les vecteurs $\vec{u}(1,0,2)$, $\vec{v}(0,1,-1)$ et $\vec{w}(2,3,1)$ sont-ils coplanaires ?

**A.** Non : aucun n'est colinéaire à un autre.
**Faux.**
Trois vecteurs coplanaires n'ont pas besoin d'être colinéaires deux à deux.

**B.** Non : trois vecteurs ne sont jamais coplanaires.
**Faux.**
Dans le cube, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

**C.** Oui : $\vec{w} = 2\,\vec{u} + 3\,\vec{v}$.
**Juste.**
Juste : $\vec{w}$ est une combinaison de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

**D.** On ne peut pas décider sans figure.
**Faux.**
Une combinaison se cherche avec les coordonnées seules.

**Correction**
On cherche deux réels $x$ et $y$ tels que $\vec{w} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$. Les abscisses donnent $x = 2$, les ordonnées $y = 3$.

Contrôle sur les cotes : $2 \times 2 + 3 \times (-1) = 1$, qui est bien la cote de $\vec{w}$.

Donc $\vec{w} = 2\,\vec{u} + 3\,\vec{v}$ : les trois vecteurs sont coplanaires.

## Calculer un déterminant

**Définition : Déterminant de trois vecteurs**

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\vec{u}(a,b,c)$, $\vec{v}(a',b',c')$ et $\vec{w}(a'',b'',c'')$ trois vecteurs. Le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, dans cet ordre, est le réel

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}.$$

Ce calcul s'appelle le **développement suivant la première colonne**. On rappelle que $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = ps - qr$.

**Exemple : un déterminant pas à pas**

Soit $\vec{p}(1, 2, -1)$, $\vec{q}(0, 1, 3)$ et $\vec{r}(2, 0, 1)$. On place les coordonnées en colonnes, puis on développe suivant la première colonne :

$$\begin{aligned} &\det(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On calcule les trois déterminants de deux nombres sur deux :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} &= 1, \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} &= -6, \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} &= -2. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \det(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) &= 1 \times 1 - 2 \times (-6) \\ &\quad + (-1) \times (-2) \\ &= 1 + 12 + 2 = 15. \end{aligned}$$

**Vérifie : À ton tour de développer**

Calcule $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ pour les vecteurs de la prédiction : $\vec{u}(1, 0, 2)$, $\vec{v}(0, 1, -1)$ et $\vec{w}(2, 3, 1)$.

**A.** $0$

**Juste.**

Juste : $1 \times 4 - 0 + 2 \times (-2) = 0$.

**B.** $8$

**Faux.**

Le dernier déterminant vaut $0 \times 3 - 2 \times 1 = -2$, et non $2$.

**C.** $4$

**Faux.**

Tu as oublié le troisième terme, $2 \times (-2)$.

**D.** $-6$

**Faux.**

Le premier déterminant vaut $1 \times 1 - 3 \times (-1) = 4$.

**Correction**

On range les coordonnées de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ en colonnes, puis on développe suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad + 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times 4 - 0 + 2 \times (-2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Le déterminant est nul, et ces vecteurs sont coplanaires. Ce n'est pas un hasard : c'est l'énoncé qui suit.

## Déterminant et coplanarité

**Propriété : Déterminant et coplanarité**

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.

Autrement dit, le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$.

**Remarque : Résultat admis**

Ce résultat est admis. Sa preuve demande une discussion de cas sur les coordonnées.

**Exemple : quatre sommets du cube**

On travaille dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

**Points $B$, $D$, $H$, $F$.** On a $\overrightarrow{BD}(-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{BF}(0, 0, 1)$ et $\overrightarrow{BH}(-1, 1, 1)$. Le développement suivant la première colonne donne :

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BH}) \\
&= (-1) \times (-1) - 1 \times 1 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

D'après le lien entre déterminant et coplanarité, ces quatre points sont coplanaires.

**Points $A$, $C$, $F$, $H$.** On a $\overrightarrow{AC}(1,1,0)$, $\overrightarrow{AF}(1,0,1)$ et $\overrightarrow{AH}(0,1,1)$, puis :

$$\begin{aligned}&\det(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AH})\\&=1\times(-1)-1\times1+0=-2.\end{aligned}$$

Ce déterminant n'est pas nul : ces points ne sont pas coplanaires, et $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AH})$ est une base.

## Méthode, puis à toi

**Méthode : coplanarité par le déterminant**

1. **Calcule**, pour quatre points $K$, $L$, $N$, $T$, les coordonnées de $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{KN}$ et $\overrightarrow{KT}$.
2. **Range** ces coordonnées en colonnes, puis développe suivant la première colonne.
3. **Conclus** : un déterminant nul signifie des points coplanaires.
4. **Retiens** : un déterminant non nul signifie des points non coplanaires ; les trois vecteurs forment alors une base.

**À toi : Quatre points coplanaires ?**

On donne $K(1,0,1)$, $L(2,1,0)$, $N(0,2,3)$ et $T(1,3,2)$. Ces quatre points sont-ils coplanaires ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**
Calcule $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{KN}$ et $\overrightarrow{KT}$, puis leur déterminant.
**Indice 2**
Développe suivant la première colonne : trois déterminants de deux nombres, multipliés par $1$, $1$ et $-1$.
**Indice 3**
Point délicat : le deuxième terme est précédé d'un signe moins, et la cote de $\overrightarrow{KL}$ vaut $-1$.

**Réponse**
D'après les calculs en coordonnées, $\overrightarrow{KL}(1,1,-1)$, $\overrightarrow{KN}(-1,2,2)$ et $\overrightarrow{KT}(0,3,1)$.

On développe suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}&\det(\overrightarrow{KL},\overrightarrow{KN},\overrightarrow{KT})\\&=1\begin{vmatrix}2&3\\2&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-1&0\\2&1\end{vmatrix}\\&\quad+(-1)\begin{vmatrix}-1&0\\2&3\end{vmatrix}\\&=-4+1+3=0.\end{aligned}$$

**Conclusion.** D'après le lien entre déterminant et coplanarité, les points $K$, $L$, $N$, $T$ sont coplanaires.

## Représentation paramétrique d'un plan

### Deux directions, deux paramètres

**Rappel du chapitre Vecteurs de l'espace.** Le plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$, avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, est l'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{AM} = s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$, où $s$ et $t$ sont deux réels.

**Devine : Une face du cube**

Dans le cube, on regarde les points $M$ tels que $\overrightarrow{AM} = s\,\overrightarrow{AB} + t\,\overrightarrow{AD}$, où $s$ et $t$ sont deux réels quelconques. Où sont ces points ?

**A.** Sur la droite $(AC)$ seulement.

**Faux.**

Sur $(AC)$, il faudrait $s = t$ ; ici, $s$ et $t$ sont libres.

**B.** Dans le plan de la face $ABFE$.

**Faux.**

Ce plan est dirigé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.

**C.** Partout dans l'espace.

**Faux.**

Ces points ne montent jamais : leur cote est nulle.

**D.** Dans le plan de la face $ABCD$.

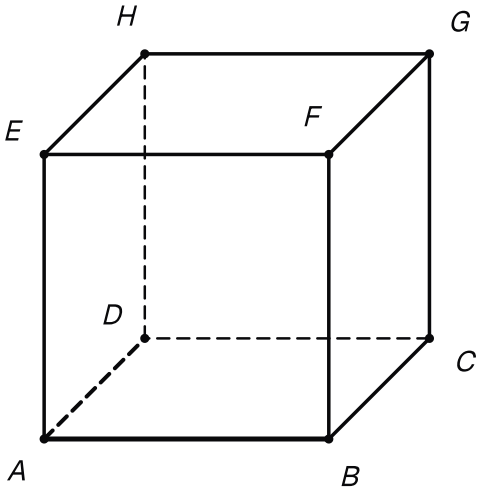
**Juste.**

Juste : le plan passant par $A$, dirigé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

**Correction**

D'après la définition vectorielle d'un plan, ces points forment le plan $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ : c'est le plan de la face $ABCD$.

Dans le repère du cube, leurs coordonnées sont $(s, t, 0)$ : deux nombres libres et une cote nulle.




**Les deux directions de la question : AB et AD, tracés depuis le sommet A du cube.**

**En clair.** Sur une droite, un seul paramètre suffit : on avance dans une seule direction. Un plan a deux directions : il faut deux paramètres, $s$ et $t$.

**Pourquoi est-ce vrai ?** On traduit l'égalité $\overrightarrow{AM} = s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$ coordonnée par coordonnée, comme pour une droite.

## La représentation paramétrique d'un plan

**Propriété : Représentation paramétrique d'un plan**

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point, $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$ deux vecteurs **non colinéaires**. Un point $M(x, y, z)$ appartient au plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ si et seulement s'il existe deux réels $s$ et $t$ tels que

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha s + \alpha' t \\ y = y_A + \beta s + \beta' t \\ z = z_A + \gamma s + \gamma' t \end{cases}$$

Ce système, où $s$ et $t$ décrivent $\mathbb{R}$, est une **représentation paramétrique** du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$.

---

**Démonstration**

**Étape 1.** D'après la définition vectorielle d'un plan (chapitre précédent), $M$ appartient à $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ si et seulement s'il existe deux réels $s$ et $t$ tels que $\overrightarrow{AM} = s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$.

**Étape 2.** D'après les calculs en coordonnées, $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x - x_A, y - y_A, z - z_A)$ et $s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$ a pour coordonnées $(\alpha s + \alpha' t, \beta s + \beta' t, \gamma s + \gamma' t)$.

**Étape 3.** Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées : l'égalité de l'étape 1 équivaut donc au système annoncé.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

C'est le geste de la droite, avec deux paramètres.

La définition vectorielle d'un plan donne $\overrightarrow{AM} = s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$. L'égalité de deux vecteurs, coordonnée par coordonnée, donne les trois équations.

**Vérifie : L'outil de la preuve**

Dans la preuve, quel outil fait passer de l'égalité vectorielle au système de trois équations ?

**A.** Le lien entre déterminant et coplanarité.
**Faux.**
La preuve ne calcule aucun déterminant.

**B.** La colinéarité en coordonnées.
**Faux.**
Aucun couple de vecteurs colinéaires n'intervient dans la preuve.

**C.** L'égalité de deux vecteurs par leurs coordonnées.
**Juste.**
Juste : deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées.

**D.** Le calcul du milieu d'un segment.
**Faux.**
Aucun milieu n'intervient dans cette preuve.

**Correction**
La preuve écrit $\overrightarrow{AM}$ et $s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$ en coordonnées, d'après les calculs en coordonnées.

L'égalité de deux vecteurs se lit coordonnée par coordonnée : l'égalité vectorielle équivaut donc aux trois équations du système.

## Un exemple, puis à toi

**Exemple : le plan passant par trois points**

On donne $R(1,0,2)$, $S(2,1,0)$ et $T(0,3,1)$. D'après les calculs en coordonnées, $\overrightarrow{RS}(1,1,-2)$ et $\overrightarrow{RT}(-1,3,-1)$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, car leur premier déterminant extrait n'est pas nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4.$$

D'après la représentation paramétrique d'un plan :

$$\begin{cases} x = 1 + s - t \\ y = s + 3t \\ z = 2 - 2s - t \end{cases} \qquad (s \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R})$$

Contrôle : $(s, t) = (1, 0)$ donne $S$, et $(s, t) = (0, 1)$ donne $T$.

**À toi : Un plan du cube**

Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, écris une représentation paramétrique du plan $(BDE)$.

Le point $H$ appartient-il à ce plan ? Et le milieu $I$ de $[DE]$ ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**
Prends le point $B$ et les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$, après avoir vérifié qu'ils ne sont pas colinéaires.
**Indice 2**
Pour tester un point, la deuxième et la troisième équation donnent directement $s$ et $t$.
**Indice 3**
Point délicat : après avoir trouvé $s$ et $t$, vérifie encore la première équation.

**Réponse**
**Représentation.** On a $B(1, 0, 0)$, $\overrightarrow{BD}(-1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{BE}(-1, 0, 1)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires :

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1.$$

D'après la représentation paramétrique d'un plan :

$$\begin{cases} x = 1 - s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \qquad (s \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R})$$

**Point $H(0, 1, 1)$.** Les deux dernières équations donnent $s = 1$ et $t = 1$, d'où $x = 1 - 1 - 1 = -1$, et non $0$. Donc $H$ n'est pas dans le plan $(BDE)$.

**Point $I$.** Le milieu de $[DE]$ est $I\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Les deux dernières équations donnent $s = t = \frac{1}{2}$, d'où $x = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Donc $I$ est dans le plan $(BDE)$.

## Équation cartésienne d'un plan

### Une seule condition sur x, y, z

**Devine : Une relation commune**

Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, les points $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$ et $E(0,0,1)$ vérifient tous une même relation. Laquelle ?

**A.** $x + y = 1$

**Faux.**
Le point $E$ donne $0 + 0 = 0$.

**B.** $z = 0$

**Faux.**
Le point $E$ a pour cote $1$.

**C.** $x = y = z$

**Faux.**
Aucun des trois points n'a trois coordonnées égales.

**D.** $x + y + z = 1$

**Juste.**
Juste : chaque point a une coordonnée égale à $1$ et deux nulles.

**Correction**
Pour $B$ : $1 + 0 + 0 = 1$ ; pour $D$ : $0 + 1 + 0 = 1$ ; pour $E$ : $0 + 0 + 1 = 1$.

Les trois points vérifient donc $x + y + z = 1$. Cette seule relation décrit en fait tout le plan $(BDE)$ : c'est l'objet de cette section.

**En clair.** Une représentation paramétrique décrit un plan avec deux paramètres. Une **équation cartésienne** le décrit sans paramètre : une seule condition sur $x$, $y$, $z$.

**Pourquoi est-ce vrai ?** Le point $M$ est dans le plan si et seulement si $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont coplanaires, c'est-à-dire si leur déterminant est nul.

## L'équation cartésienne d'un plan

**Propriété : Équation cartésienne d'un plan**

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $P$ le plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il existe des réels $a$, $b$, $c$, **non tous nuls**, et un réel $d$ tels que, pour tout point $M(x, y, z)$ :

$$M \in P \quad \text{si et seulement si} \quad ax + by + cz + d = 0.$$

On dit que $ax + by + cz + d = 0$ est une **équation cartésienne** du plan $P$.

---

**Démonstration**

**Étape 1.** D'après la définition vectorielle d'un plan, puis la coplanarité et la combinaison de deux vecteurs (chapitre précédent, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires), $M \in P$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont coplanaires. D'après le lien entre déterminant et coplanarité, cela équivaut à $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$.

**Étape 2.** Notons $\vec{u}(a', b', c')$ et $\vec{v}(a'', b'', c'')$. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x - x_A, y - y_A, z - z_A)$. On développe suivant la première colonne :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A),$$

avec $a = \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix}$, $b = -\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix}$, $c = \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$.

**Étape 3.** On pose $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$ : $M \in P$ si et seulement si $ax + by + cz + d = 0$. Enfin, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires : d'après la colinéarité en coordonnées, leurs trois déterminants extraits ne sont pas tous nuls, donc $a$, $b$, $c$ ne sont pas tous nuls.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Le geste clé : écrire $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$, puis développer suivant la première colonne. On obtient une expression du premier degré en $x$, $y$, $z$.

Ses coefficients $a$, $b$, $c$ sont, au signe près, les déterminants extraits de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ : ils ne sont pas tous nuls.

**Vérifie : La condition d'appartenance**

Dans la preuve, quelle condition traduit « $M$ appartient au plan $P$ » ?

**A.** $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$

**Juste.**

Juste : les trois vecteurs sont coplanaires.

**B.** $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$

**Faux.**

Cette égalité ne donne qu'un seul point du plan.

**C.** $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) \neq 0$

**Faux.**

Un déterminant non nul signifie des vecteurs non coplanaires.

**D.** $\overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\vec{u}$

**Faux.**

Cette condition décrit la droite $D(A, \vec{u})$, et non le plan.

**Correction**

D'après la coplanarité et la combinaison de deux vecteurs, $M \in P$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}$ sont coplanaires.

D'après le lien entre déterminant et coplanarité, cela équivaut à $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$. Le développement de ce déterminant donne l'équation.

**Exemple : un plan donné par un point et deux vecteurs**

Soit $P$ le plan passant par $K(1, -1, 2)$, dirigé par $\vec{u}(1, 0, 2)$ et $\vec{v}(0, 1, 1)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires : leur premier déterminant extrait vaut $1$.

Pour $M(x, y, z)$, on a $\overrightarrow{KM}(x - 1, y + 1, z - 2)$. On développe suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{KM}, \vec{u}, \vec{v}) \\
&= (x - 1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (y + 1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad + (z - 2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -2(x - 1) - (y + 1) + (z - 2) \\
&= -2x - y + z - 1.
\end{aligned}$$

D'après l'équation cartésienne d'un plan, $P$ a pour équation $-2x - y + z - 1 = 0$, ou encore $2x + y - z + 1 = 0$.

## Toute équation décrit un plan

**Propriété : Plan défini par une équation cartésienne**

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $a$, $b$, $c$, $d$ quatre réels, avec $a$, $b$, $c$ **non tous nuls**. L'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que

$$ax + by + cz + d = 0$$

est un **plan**.

**Remarque : Résultat admis**

Ce résultat est admis. C'est la réciproque de l'énoncé précédent.

**Exemple : des équations à une seule inconnue**

D'après le plan défini par une équation cartésienne, chacune des équations suivantes décrit un plan.

- L'équation $z = 0$ correspond à $a = b = 0$ et $c = 1$. Ce plan contient $O(0,0,0)$, le point $(1,0,0)$ et le point $(0,1,0)$ : c'est le plan passant par $O$, dirigé par $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- L'équation $x = 2$ décrit le plan passant par le point $(2,0,0)$, dirigé par $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

Dans le repère du cube, la face $ABCD$ est dans le plan d'équation $z = 0$, et la face $BCGF$ dans le plan d'équation $x = 1$.

## Le plan passant par trois points

**Méthode : équation cartésienne du plan passant par trois points**

1. **Vérifie** que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
2. **Écris** que $M(x,y,z)$ est dans le plan $(ABC)$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.
3. **Développe** suivant la première colonne et réduis : tu obtiens $ax + by + cz + d = 0$.
4. **Contrôle** que les coordonnées de $A$, $B$ et $C$ vérifient l'équation.

**Exemple : le plan passant par trois points**

On donne $J(1,2,0)$, $Q(2,0,1)$ et $V(0,1,3)$.

**Directions.** On a $\overrightarrow{JQ}(1,-2,1)$ et $\overrightarrow{JV}(-1,-1,3)$. Ils ne sont pas colinéaires, car :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3.$$

**Déterminant.** Pour $M(x,y,z)$, on a $\overrightarrow{JM}(x-1, y-2, z)$, et :

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{JQ}, \overrightarrow{JV}) \\ &= (x-1)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &\quad - (y-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &\quad + z\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -5(x-1) - 4(y-2) - 3z. \end{aligned}$$

**Équation.** Ce déterminant vaut $-5x - 4y - 3z + 13$. D'après l'équation cartésienne d'un plan, $(JQV)$ a pour équation $5x + 4y + 3z - 13 = 0$.

**Contrôle.** Pour $J$, $Q$ et $V$ : $5 + 8 - 13 = 0$, $10 + 3 - 13 = 0$ et $4 + 9 - 13 = 0$.

## Un piège, puis à toi

**Attention : une équation, un plan**

✗ « Dans l'espace, l'équation $y = 3$ décrit une droite, comme dans le plan. »

✓ Dans l'espace, $y = 3$ est une équation cartésienne avec $a = 0$, $b = 1$ et $c = 0$. Elle décrit un **plan**, passant par le point $(0, 3, 0)$ et dirigé par $\vec{i}$ et $\vec{k}$.

Une droite de l'espace demande une représentation paramétrique, ou deux équations.

**À toi : L'équation d'un plan**

On donne $R(2, 0, 1)$, $S(0, 1, 1)$ et $T(1, 1, 0)$. Détermine une équation cartésienne du plan $(RST)$.

Le point $W(1, 0, 2)$ appartient-il à ce plan ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**
Suis la méthode : $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{RT}$, puis $\det(\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT}) = 0$.
**Indice 2**
Place $\overrightarrow{RM}$ dans la première colonne, puis développe suivant cette colonne.
**Indice 3**
Point délicat : le terme en $y$ est précédé d'un signe moins. Contrôle ensuite l'équation avec $R$, $S$ et $T$.

**Réponse**
**Directions.** D'après les calculs en coordonnées, $\overrightarrow{RS}(-2, 1, 0)$ et $\overrightarrow{RT}(-1, 1, -1)$. Ils ne sont pas colinéaires, car :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} &= -2 + 1 \\ &= -1.\end{aligned}$$

**Déterminant.** Pour $M(x, y, z)$, on a $\overrightarrow{RM}(x - 2, y, z - 1)$. Le développement suivant la première colonne donne :

$$\begin{aligned}&\det(\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT}) \\ &= (x - 2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad - y\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad + (z - 1)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(x - 2) - 2y - (z - 1) \\ &= -x - 2y - z + 3.\end{aligned}$$

**Équation.** D'après l'équation cartésienne d'un plan, $(RST)$ a pour équation $x + 2y + z - 3 = 0$. Contrôle pour $R$, $S$ et $T$ : $2 + 0 + 1 - 3 = 0$, $0 + 2 + 1 - 3 = 0$ et $1 + 2 + 0 - 3 = 0$.

**Conclusion.** $1 + 0 + 2 - 3 = 0$ : le point $W$ appartient au plan $(RST)$.

## Position relative de deux droites

### Trois positions possibles

**Rappel du tronc commun.** Deux droites coplanaires sont parallèles ou sécantes. Dans le cube, $(AB)$ et $(DC)$ sont parallèles, et $(AB)$ et $(BF)$ sont sécantes en $B$.

Dans l'espace, une troisième position existe : deux droites peuvent n'être dans aucun plan commun.

**Devine : Deux arêtes du cube**

Dans le cube, quelle est la position relative des droites $(EF)$ et $(CG)$ ?

**A.** Elles sont parallèles.

**Faux.**
$\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CG}$ ne sont pas colinéaires.

**B.** Elles sont sécantes.

**Faux.**
Un point de $(EF)$ a une ordonnée nulle, un point de $(CG)$ une ordonnée égale à $1$.

**C.** Elles sont non coplanaires.

**Juste.**
Juste : ni parallèles, ni sécantes.

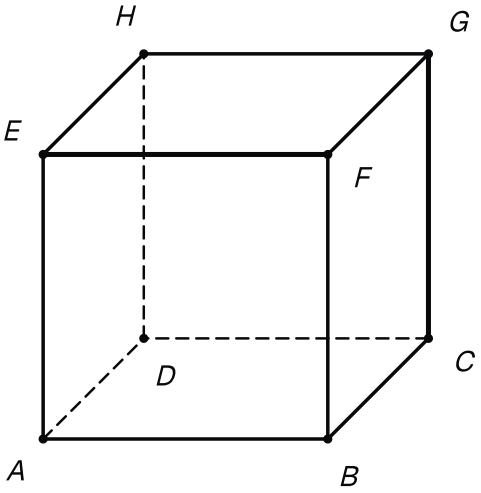
**D.** Elles sont confondues.

**Faux.**
Le point $E$ n'est pas sur la droite $(CG)$.

**Correction**
Dans le repère du cube, $\overrightarrow{EF}(1,0,0)$ et $\overrightarrow{CG}(0,0,1)$ n'ont pas des coordonnées proportionnelles : $(EF)$ et $(CG)$ ne sont pas parallèles.

Les points de $(EF)$ s'écrivent $(t,0,1)$, ceux de $(CG)$ s'écrivent $(1,1,s)$. Leurs ordonnées, $0$ et $1$, ne sont jamais égales : les droites n'ont aucun point commun.

Ni parallèles, ni sécantes : les droites $(EF)$ et $(CG)$ sont non coplanaires.




**Les deux arêtes de la question, [EF] en haut devant et [CG] au fond à droite, mises en valeur.**

## Décider avec les coordonnées

**Propriété : Position relative de deux droites**

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $D$ la droite passant par $A$ de vecteur directeur $\vec{u}$, et $D'$ la droite passant par $B$ de vecteur directeur $\vec{v}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**, les droites $D$ et $D'$ sont parallèles : confondues si $A \in D'$, strictement parallèles sinon.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont **pas colinéaires**, les droites $D$ et $D'$ sont soit sécantes en un point, soit non coplanaires. Elles sont sécantes si et seulement si le système formé par leurs deux représentations paramétriques, écrites avec **deux paramètres distincts**, admet une solution.

**Remarque : Résultat admis**

Ce résultat est admis. Il traduit en coordonnées les positions relatives vues au tronc commun.

**Vérifie : Deux droites données**

Soit les droites $D$ et $D'$ :

$$D : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

$$D' : \begin{cases} x = 2 - 2s \\ y = 1 - 4s \\ z = 2s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Quelle est leur position relative ?

**A.** Sécantes.

**Faux.**

Leurs vecteurs directeurs sont colinéaires : elles sont parallèles.

**B.** Non coplanaires.

**Faux.**

Deux droites de vecteurs directeurs colinéaires sont toujours coplanaires.

**C.** Confondues.

**Faux.**

Le point de $D$ de paramètre $t = 0$ n'est pas sur $D'$.

**D.** Strictement parallèles.

**Juste.**

Juste : directions colinéaires, et aucun point commun.

**Correction**

Les vecteurs directeurs sont $\vec{u}(1, 2, -1)$ et $\vec{v}(-2, -4, 2)$, avec $\vec{v} = -2\,\vec{u}$ : ils sont colinéaires, donc les droites sont parallèles.

Le point $K(1, 0, 3)$ de $D$ est-il sur $D'$ ? L'abscisse donne $2 - 2s = 1$, soit $s = \dfrac{1}{2}$. Alors $y = 1 - 2 = -1$, et non $0$ : $K$ n'est pas sur $D'$.

D'après la position relative de deux droites, $D$ et $D'$ sont strictement parallèles.

## Deux droites sécantes

**Méthode : position relative de deux droites**

1. **Compare** les vecteurs directeurs. Colinéaires : droites parallèles, et même confondues si elles partagent un point.
2. **Écris**, sinon, les deux représentations avec deux paramètres différents, $t$ et $s$.
3. **Résous** le système de deux des équations par substitution, puis vérifie la troisième.
4. **Conclus** : une solution, droites sécantes en un point ; aucune, droites non coplanaires.

**Exemple : deux droites sécantes**

Soit les droites :

$$D : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$D' : \begin{cases} x = s \\ y = 3 - s \\ z = -1 + s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

**Directions.** Les vecteurs directeurs $(1, 2, -1)$ et $(1, -1, 1)$ ne sont pas colinéaires :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3.$$

**Système.** Les abscisses donnent $s = 1 + t$. On reporte dans les ordonnées :

$$\begin{aligned} -1 + 2t &= 3 - (1 + t) \\ 3t &= 3, \end{aligned}$$

donc $t = 1$ et $s = 2$.

**Troisième équation.** Cotes : $2 - 1 = 1$ et $-1 + 2 = 1$. Elle est vérifiée.

**Conclusion.** D'après la position relative de deux droites, $D$ et $D'$ sont sécantes au point $(2, 1, 1)$.

## Un piège, puis à toi

**Attention : non parallèles ne veut pas dire sécantes**

✗ « Les droites $(AB)$ et $(CG)$ du cube ont des vecteurs directeurs non colinéaires, donc elles sont sécantes. »

✓ Dans le plan, ce raisonnement est juste ; dans l'espace, il ne l'est pas. Les points de $(AB)$ s'écrivent $(t, 0, 0)$, ceux de $(CG)$ s'écrivent $(1, 1, s)$ : les ordonnées ne sont jamais égales.

Ces droites sont non coplanaires. Résous toujours le système avant de conclure.

**À toi : Sécantes ou non coplanaires**

Étudie la position relative des droites $D$ et $D'$ :

$$D : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$D' : \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 2s \\ z = 1 + s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**

Compare d'abord les vecteurs directeurs $(1,-1,3)$ et $(2,2,1)$.

**Indice 2**

Résous le système des abscisses et des ordonnées : additionne les deux équations.

**Indice 3**

Point délicat : après avoir résolu deux équations, vérifie la troisième avant de conclure.

**Réponse**

**Directions.** Les vecteurs directeurs $(1,-1,3)$ et $(2,2,1)$ ne sont pas colinéaires :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2+2 = 4.$$

**Système.** On égale les abscisses, puis les ordonnées :

$$\begin{cases} 2+t = 1+2s \\ 1-t = 2s \end{cases}$$

En additionnant les deux équations, $3 = 1+4s$, donc $s = \dfrac{1}{2}$, puis $t = 1-2s = 0$.

**Troisième équation.** Pour les cotes, $3t = 0$, mais $1+s = \dfrac{3}{2}$. Le système n'a donc pas de solution.

**Conclusion.** D'après la position relative de deux droites, $D$ et $D'$ sont non coplanaires.

## Position relative d'une droite et d'un plan

## Remplacer dans l'équation

**Devine : Une diagonale et un plan**

Dans le cube, le plan $(BDE)$ a pour équation $x+y+z-1=0$. La droite $(AG)$ a pour représentation $x=t, y=t, z=t$ $(t \in \mathbb{R})$.

Coupe-t-elle ce plan ?

**A.** Non : elle lui est parallèle.

**Faux.**

En remplaçant, on trouve $3t-1=0$, qui a une solution.

**B.** Oui, en un seul point.

**Juste.**

Juste : celui de paramètre $t = \dfrac{1}{3}$.

**C.** Elle est contenue dans le plan.

**Faux.**

Le point $A(0,0,0)$ ne vérifie pas l'équation.

**D.** On ne peut pas le savoir sans figure.

**Faux.**

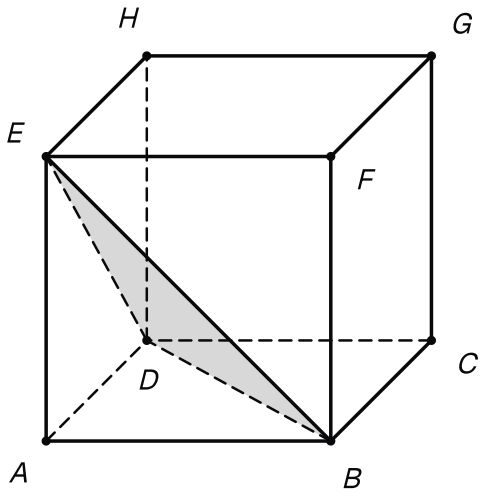
L'équation et la représentation suffisent.

**Correction**

On remplace $x$, $y$, $z$ par $t$ dans l'équation du plan : $t + t + t - 1 = 0$, soit $3t - 1 = 0$, donc $t = \dfrac{1}{3}$.

La droite $(AG)$ coupe donc le plan $(BDE)$ en un seul point :

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$




**Le plan (BDE) coupe le cube suivant le triangle BDE, teinté ; A et G sont les extrémités de la grande diagonale.**

**En clair.** Pour savoir où une droite rencontre un plan, on remplace $x$, $y$, $z$ par leurs expressions en $t$ dans l'équation du plan. On obtient alors une équation d'inconnue $t$, du premier degré.

**Pourquoi est-ce vrai ?** Tout dépend du coefficient de $t$ : il décide du nombre de solutions.

## Sécants ou parallèles

**Propriété : Position relative d'une droite et d'un plan**

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $P$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, où $a, b, c$ ne sont pas tous nuls, et $D$ la droite passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$.

- Si $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$, la droite $D$ et le plan $P$ sont **sécants** en un seul point.
- Si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, la droite $D$ est **parallèle** au plan $P$ : elle est contenue dans $P$ si $A \in P$, et elle n'a aucun point commun avec $P$ sinon.

**Démonstration**

**Étape 1.** D'après la représentation paramétrique d'une droite, les points de $D$ sont les points $M(x_A+\alpha t, y_A+\beta t, z_A+\gamma t)$, où $t$ est un réel. Un tel point appartient à $P$ si et seulement si $a(x_A+\alpha t)+b(y_A+\beta t)+c(z_A+\gamma t)+d=0$, c'est-à-dire

$$(a\alpha+b\beta+c\gamma)\,t+(ax_A+by_A+cz_A+d)=0.$$

**Étape 2.** Si $a\alpha+b\beta+c\gamma\neq 0$, cette équation d'inconnue $t$ a une seule solution : $D$ et $P$ ont un seul point commun.

**Étape 3.** Si $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$, l'équation devient $ax_A+by_A+cz_A+d=0$, qui ne dépend pas de $t$. Si $A\in P$, elle est vraie pour tout réel $t$ : $D$ est contenue dans $P$, donc parallèle à $P$ (tronc commun). Sinon, elle n'a aucune solution : $D$ et $P$ n'ont aucun point commun, donc ils sont parallèles (tronc commun).

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Le geste clé : remplacer la représentation paramétrique dans l'équation du plan. On obtient :

$$\begin{aligned}&(a\alpha+b\beta+c\gamma)\,t\\&\quad+(ax_A+by_A+cz_A+d)=0.\end{aligned}$$

Si le coefficient de $t$ n'est pas nul, il y a une seule solution. S'il est nul, tout réel est solution si $A\in P$, et aucun sinon.

**Vérifie : Ce qui décide**

Dans la preuve, qu'est-ce qui décide du nombre de points communs à $D$ et $P$ ?

**A.** Le réel $d$ seul.

**Faux.**

Le réel $d$ ne sert qu'une fois le coefficient de $t$ connu.

**B.** Le paramètre $t$ choisi.

**Faux.**

Le paramètre est l'inconnue de l'équation ; il ne décide de rien.

**C.** Le coefficient $a\alpha+b\beta+c\gamma$.

**Juste.**

Juste : non nul, une solution ; nul, aucune ou une infinité.

**D.** Le point $A$ seul.

**Faux.**

Le point $A$ ne compte que si le coefficient de $t$ est nul.

**Correction**

Après substitution, la preuve obtient :

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)\,t + (ax_A + by_A + cz_A + d) = 0.$$

C'est une équation d'inconnue $t$. Si $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$, elle a une seule solution. Sinon, elle n'a aucune solution, ou tout réel est solution.

**Exemple : un point d'intersection**

Soit $P$ le plan d'équation $2x + y - z - 1 = 0$ et $D$ la droite passant par $K(1, 2, 0)$, de vecteur directeur $\vec{u}(1, -1, 2)$.

**Position.** Le coefficient de $t$ vaut :

$$2 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 2 = -1.$$

Comme $-1 \neq 0$, d'après la position relative d'une droite et d'un plan, $D$ et $P$ sont sécants en un seul point.

**Point d'intersection.** Les points de $D$ s'écrivent $(1 + t, 2 - t, 2t)$. On remplace dans l'équation de $P$ : $2(1 + t) + (2 - t) - 2t - 1 = 0$, soit $3 - t = 0$, donc $t = 3$.

**Conclusion.** Le point d'intersection est $(4, -1, 6)$. Contrôle : $8 - 1 - 6 - 1 = 0$.

## La méthode et deux droites parallèles

**Méthode : position d'une droite et d'un plan**

1. **Écris** une représentation paramétrique de la droite.
2. **Remplace** $x$, $y$, $z$ dans l'équation du plan : tu obtiens une équation d'inconnue $t$.
3. **Calcule**, si elle a une seule solution, $t$ puis le point d'intersection.
4. **Conclus**, sinon : aucune solution, droite strictement parallèle au plan ; tout réel solution, droite contenue dans le plan.

**Exemple : Contre-exemple : deux droites parallèles au plan**

On garde le plan $P$ d'équation $2x + y - z - 1 = 0$, et on prend $\vec{v}(1, 1, 3)$. On a $2 + 1 - 3 = 0$ : d'après la position relative d'une droite et d'un plan, toute droite dirigée par $\vec{v}$ est parallèle à $P$.

**Droite passant par $K(1, 2, 0)$.** Ses points s'écrivent $(1 + t, 2 + t, 3t)$. Pour tout réel $t$ :

$$2(1 + t) + (2 + t) - 3t - 1 = 3.$$

L'équation à résoudre devient $3 = 0$ : elle n'a aucune solution. Cette droite est strictement parallèle à $P$.

**Droite passant par $Q(0, 1, 0)$.** Ce point vérifie $0 + 1 - 0 - 1 = 0$. Les points de la droite s'écrivent $(t, 1 + t, 3t)$, et pour tout réel $t$ :

$$2t + (1 + t) - 3t - 1 = 0.$$

Tout réel $t$ est solution : cette droite est contenue dans $P$.

## À toi, puis le coin devoir

**À toi : Une droite qui perce un plan**

On donne $R(1, 1, 0)$, $S(2, 0, 3)$ et le plan $P'$ d'équation $x + y - z + 4 = 0$.

Justifie que la droite $(RS)$ coupe $P'$ en un seul point, puis calcule ses coordonnées.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**
Écris une représentation paramétrique de $(RS)$, avec $R$ et $\overrightarrow{RS}$.
**Indice 2**
Calcule le coefficient $a\alpha + b\beta + c\gamma$, puis remplace dans l'équation de $P'$.
**Indice 3**
Point délicat : la cote vaut $3t$, et elle est précédée d'un signe moins dans l'équation.

**Réponse**
**Représentation.** On a $\overrightarrow{RS}(1, -1, 3)$. D'après la représentation paramétrique d'une droite, $(RS)$ : $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 3t$ $(t \in \mathbb{R})$.

**Position.** Le coefficient de $t$ vaut :

$$\begin{aligned} &1 \times 1 + 1 \times (-1) \\ &\quad + (-1) \times 3 \\ &= -3. \end{aligned}$$

Comme $-3 \neq 0$, d'après la position relative d'une droite et d'un plan, $(RS)$ coupe $P'$ en un seul point.

**Intersection.** On remplace : $(1 + t) + (1 - t) - 3t + 4 = 0$, soit $6 - 3t = 0$, donc $t = 2$.

**Conclusion.** Le point d'intersection est $(3, -1, 6)$. Contrôle : $3 - 1 - 6 + 4 = 0$.

**Remarque : Coin devoir : rédiger une intersection**

En devoir, écris les trois temps : la représentation, la substitution, la conclusion.

Par exemple : « On remplace $x$, $y$, $z$ dans l'équation de $P$ : $3 - t = 0$, donc $t = 3$. D'après la position relative d'une droite et d'un plan, $D$ coupe $P$ au point $(4, -1, 6)$. »

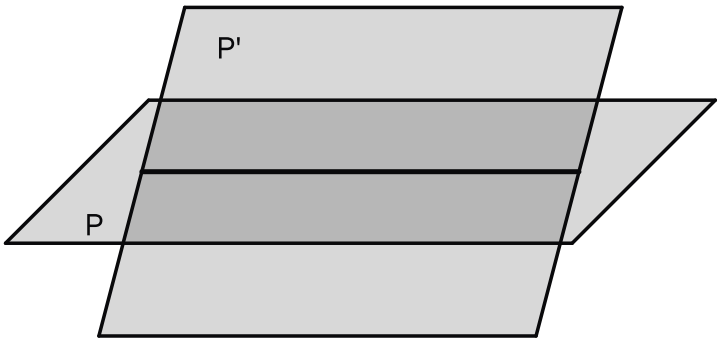
Termine par un contrôle : le point trouvé vérifie l'équation du plan.

## Position relative de deux plans

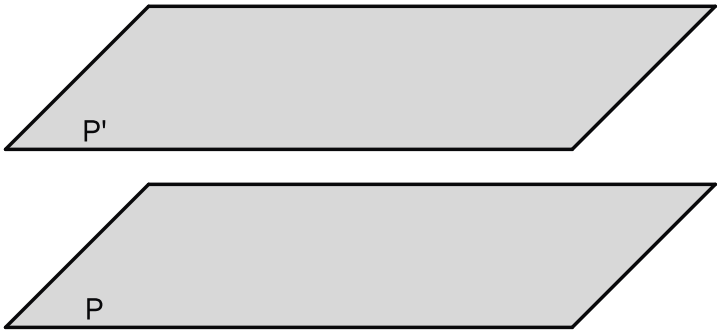
### Comparer les coefficients

**En clair.** Deux pages d'un livre ouvert se coupent le long de la reliure : une droite. Deux étagères d'une bibliothèque, elles, ne se rencontrent pas : elles sont parallèles.

Deux plans sont donc sécants suivant une droite, strictement parallèles, ou confondus. Pour décider, regarde les coefficients de $x$, $y$, $z$ : sont-ils proportionnels ?




**Comme les deux pages d'un livre ouvert, P et P' se coupent suivant une droite, la reliure.**




**Comme deux étagères superposées, P et P' sont strictement parallèles : jamais ils ne se touchent.**




**Troisième possibilité : P et P' sont un seul et même plan.**

### Devine : Deux équations voisines

Les plans $P$ : $x + 2y - z + 1 = 0$ et $P'$ : $2x + 4y - 2z + 5 = 0$ sont-ils sécants ?

**A.** Oui, suivant une droite.

**Faux.**

Les coefficients de $x$, $y$, $z$ dans $P'$ sont le double de ceux de $P$.

**B.** Non : ils sont confondus.

**Faux.**

Il faudrait aussi $5 = 2 \times 1$.

**C.** Non : ils sont strictement parallèles.

**Juste.**

Juste : mêmes directions, et aucun point commun.

**D.** On ne peut pas savoir sans un point commun.

**Faux.**
La comparaison des coefficients suffit.

**Correction**
Les triplets $(1, 2, -1)$ et $(2, 4, -2)$ sont proportionnels, de coefficient $2$ : les plans sont parallèles.

Mais $2 \times 1 = 2$ n'est pas égal à $5$ : les quadruplets ne sont pas proportionnels. Les plans sont strictement parallèles.

## La droite d'intersection

**Propriété : Position relative de deux plans**

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $P$ et $P'$ les plans d'équations $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, où $a, b, c$ ne sont pas tous nuls, ni $a', b', c'$.

- $P$ et $P'$ sont **parallèles** si et seulement si les triplets $(a, b, c)$ et $(a', b', c')$ sont proportionnels. Ils sont alors confondus si les quadruplets $(a, b, c, d)$ et $(a', b', c', d')$ sont proportionnels, et strictement parallèles sinon.
- Sinon, $P$ et $P'$ sont **sécants** suivant une droite $\Delta$, et le système

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

est un **système d'équations cartésiennes** de la droite $\Delta$.

**Remarque : Résultat admis**

Ce résultat est admis. Il traduit en coordonnées les positions relatives de deux plans vues au tronc commun.

**Exemple : la droite d'intersection de deux plans**

Soit $P$ : $x + y + z - 3 = 0$ et $P'$ : $x - y + 2z - 1 = 0$.

**Position.** D'après la position relative de deux plans, $P$ et $P'$ sont sécants suivant une droite $\Delta$ : en effet, les triplets $(1, 1, 1)$ et $(1, -1, 2)$ ne sont pas proportionnels.

**Système.** On pose $y = t$ dans les deux équations :

$$\begin{cases} x + z = 3 - t \\ x + 2z = 1 + t \end{cases}$$

Par soustraction, $z = -2 + 2t$, puis $x = 3 - t - z = 5 - 3t$.

**Conclusion.** Une représentation paramétrique de $\Delta$ est :

$$\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = t \qquad\qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2 + 2t \end{cases}$$

## Méthode et piège

**Méthode : position relative de deux plans**

1. **Compare** les triplets $(a, b, c)$ et $(a', b', c')$ des deux équations.
2. **Distingue**, s'ils sont proportionnels, les plans confondus des plans strictement parallèles, à l'aide de $d$ et $d'$.
3. **Pose**, sinon, une inconnue égale à $t$ dans le système des deux équations.
4. **Exprime** les deux autres inconnues en fonction de $t$ : c'est une représentation paramétrique de $\Delta$.

**Attention : le réel d vient en dernier**

✗ « Les plans d'équations $x - y + 3z - 2 = 0$ et $x - y + 3z + 5 = 0$ n'ont pas le même $d$ : ils sont sécants. »

✓ On compare d'abord les triplets, sans $d$. Ici, $(1, -1, 3)$ et $(1, -1, 3)$ sont égaux, donc proportionnels : les plans sont parallèles.

Les réels $-2$ et $5$ diffèrent : ils sont strictement parallèles, sans aucun point commun.

## À toi, puis le coin devoir

**À toi : Deux plans sécants**

Justifie que les plans $P : 2x - y + z - 1 = 0$ et $P' : x + y - 2z - 2 = 0$ sont sécants.

Donne une représentation paramétrique de leur droite d'intersection $\Delta$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**
Compare les triplets : un déterminant extrait non nul suffit à montrer qu'ils ne sont pas proportionnels.
**Indice 2**
Pose $x = t$, puis additionne les deux équations pour éliminer $y$.
**Indice 3**
Point délicat : poser $z = t$ donnerait des fractions ; poser $x = t$ garde des coefficients entiers.

**Réponse**

**Position.** Les triplets $(2,-1,1)$ et $(1,1,-2)$ ne sont pas proportionnels, car :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2+1 = 3.$$

D'après la position relative de deux plans, $P$ et $P'$ sont sécants suivant une droite $\Delta$.

**Système.** On pose $x = t$ :

$$\begin{cases} -y+z = 1-2t \\ y-2z = 2-t \end{cases}$$

En additionnant, $-z = 3-3t$, donc $z = -3+3t$. Puis $y = z-1+2t = -4+5t$.

**Conclusion.** Une représentation paramétrique de $\Delta$ est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -4+5t \\ z = -3+3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Contrôle avec $t=0$ : le point $(0,-4,-3)$ vérifie $4-3-1=0$ et $-4+6-2=0$.

**Remarque : Coin devoir : rédiger la position de deux plans**

En devoir, justifie chaque étape par l'énoncé employé.

Par exemple : « Les triplets $(1,1,1)$ et $(1,-1,2)$ ne sont pas proportionnels. Donc, d'après la position relative de deux plans, $P$ et $P'$ sont sécants suivant une droite $\Delta$. »

Après la représentation de $\Delta$, contrôle un de ses points dans les deux équations.

## Ce qu'il faut savoir faire

**À retenir : quel outil pour quelle question**

- **Coordonnées** : extrémité moins origine pour un vecteur, moyenne pour un milieu.
- **Colinéarité, alignement** : les trois déterminants extraits sont nuls.
- **Droite** : un point, un vecteur directeur, un paramètre $t$. Pour tester un point, le même $t$ dans les trois équations.
- **Coplanarité, base** : le déterminant de trois vecteurs, nul ou non.
- **Équation d'un plan** : $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$, développé suivant la première colonne.
- **Droite et plan** : la représentation paramétrique remplacée dans l'équation.
- **Deux droites** : les vecteurs directeurs, puis un système à deux paramètres.

- **Deux plans** : les triplets $(a, b, c)$, puis une inconnue posée égale à $t$.

**Le mot du prof.** Dans l'espace, un dessin peut tromper ; les coordonnées, elles, tranchent.

Avant chaque calcul, demande-toi quelle question tu poses : colinéarité, coplanarité ou intersection. Choisis l'outil, puis contrôle ton résultat dans les équations. Ces outils resservent en 2BAC SE.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Géométrie analytique de l'espace » (1bac · sciences-experimentales · mathematiques)