BURHAN

Résumé : Généralités sur les fonctions numériques

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/resume

Chapitre	Semestre
Généralités sur les fonctions numériques	Semestre 1

Fonctions bornées et fonctions périodiques

Définition : Fonction majorée, minorée, bornée

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f, et I un intervalle inclus dans D_f.

- f est **majorée** sur I s'il existe un réel M tel que $(\forall x \in I) : f(x) \leq M$. Le réel M est un **majorant** de f sur I.
- f est **minorée** sur I s'il existe un réel m tel que $(\forall x \in I) : f(x) \geq m$. Le réel m est un **minorant** de f sur I.
- f est **bornée** sur I si elle est à la fois majorée et minorée sur I.

Propriété : Fonction bornée et valeur absolue

Soit f une fonction numérique et I un intervalle inclus dans D_f. La fonction f est bornée sur I si et seulement s'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$(\forall x \in I) : |f(x)| \leq M.$$

Méthode : prouver une majoration ou une minoration

1. **Devine** une borne : une courbe, un tableau de valeurs ou une écriture simplifiée la suggère.
2. **Forme** la différence entre $f(x)$ et cette borne.
3. **Donne**-lui un signe connu : carré, quotient de nombres positifs, produit de facteurs de signes connus.
4. **Conclus** en écrivant l'inégalité pour **tout** x de l'intervalle, avec une borne qui ne dépend pas de x.

Exemple

Énoncé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - \dfrac{2}{x^2+4}$. Encadre $f(x)$.

Minorant. Pour tout réel x :

$$f(x) - \frac{5}{2} = \frac{x^2}{2(x^2+4)} \geq 0.$$

Donc $f(x) \geq \frac{5}{2}$ pour tout réel x, et $f(0) = \frac{5}{2}$.

Majorant. Pour tout réel x :

$$f(x) - 3 = -\frac{2}{x^2+4} < 0.$$

Donc $f(x) < 3$ pour tout réel x.

Conclusion. Pour tout réel x, $\frac{5}{2} \leq f(x) < 3$: f est bornée sur $\mathbb{R}$, et $|f(x)| \leq 3$.

Attention : Une borne fixée avant x

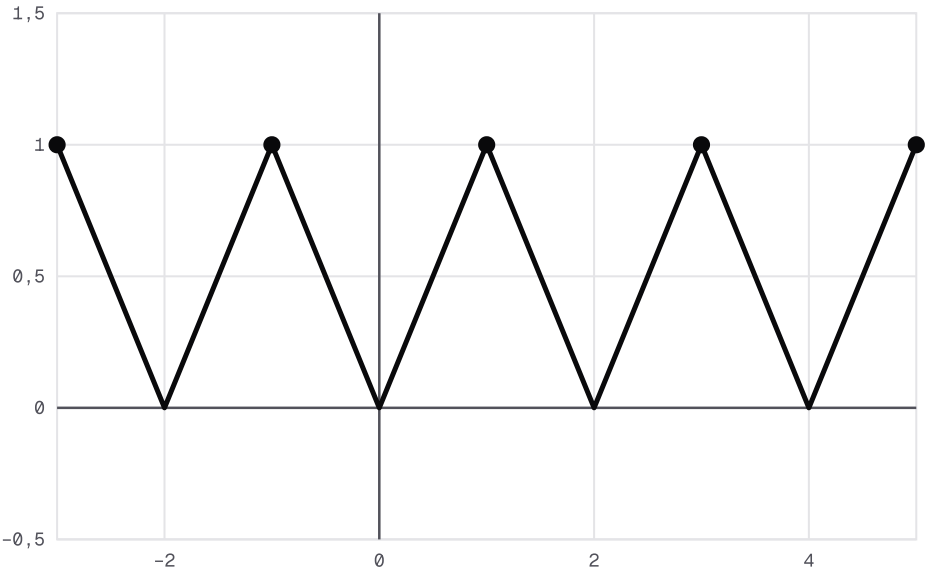
Pour tout réel x, on a $x^2 < x^2 + 1$. Cela ne prouve pas que $x \mapsto x^2$ est majorée : le nombre $x^2 + 1$ change avec x. Un majorant est un réel fixé, choisi **avant** x. Ici aucun réel ne convient, car x^2 dépasse tout nombre donné.

Définition : Fonction périodique

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f, et T un réel strictement positif. On dit que f est **périodique de période** T si, pour tout x de D_f :

- $x + T \in D_f$;
- $x - T \in D_f$;
- $f(x + T) = f(x)$.

Graphiquement, la courbe $\mathcal{C}_f$ est alors inchangée par la translation de vecteur $T\vec{i}$: il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur T, puis de reproduire ce motif par translations.



Une fonction de période T = 2 : le motif en V tracé sur [−1, 1] se reproduit à l'identique par glissements de 2 unités, vers la droite comme vers la gauche.

Méthode : se servir d'une période

1. **Contrôle** que $x + T$ et $x - T$ restent dans D_f, et que $f(x + T) = f(x)$.
2. **Trace** la courbe sur un seul intervalle de longueur T.
3. **Recopie** ce motif en le décalant de T vers la droite et vers la gauche, autant de fois que nécessaire.
4. **Pour une image lointaine**, ajoute ou retranche un multiple de T jusqu'à revenir sur le motif.

Exemple

Énoncé. La fonction f est périodique de période 5, et $f(x) = 2x - 1$ pour $0 \leq x < 5$. Calcule $f(23)$ et $f(-7)$.

Image de 23. On a $23 = 3 + 4 \times 5$, donc $f(23) = f(3) = 5$.

Image de -7. On a $-7 + 2 \times 5 = 3$, donc $f(-7) = f(3) = 5$.

Second degré : équation et signe

Propriété : Équation du second degré

Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$:

- n'a aucune solution si $\Delta < 0$;

- a une seule solution, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, si $\Delta = 0$;
- a deux solutions distinctes, $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, si $\Delta > 0$; dans ce cas, pour tout réel x, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Propriété : Signe du trinôme

Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout réel x.
- Si $\Delta = 0$, il est du signe de a pour tout réel $x \neq -\dfrac{b}{2a}$, et il s'annule en $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, on note $\alpha < \beta$ ses deux racines : il est du signe de a pour $x < \alpha$ et pour $x > \beta$, du signe de $-a$ pour $\alpha < x < \beta$, et il s'annule en α et en β.

Méthode : résoudre une inéquation du second degré

1. **Passe** tout dans un même membre pour comparer un trinôme à 0.
2. **Calcule** Δ, puis les racines quand il y en a.
3. **Écris** le signe : celui de a hors des racines, l'opposé entre elles.
4. **Lis** les solutions ; une inégalité large garde les racines, une inégalité stricte les exclut.

Exemple

Énoncé. Résous $x^2 - x - 6 > 0$.

Discriminant. On a $\Delta = 1 + 24 = 25$. Les racines sont :

$$x_1 = \frac{1 - 5}{2} = -2,$$
$$x_2 = \frac{1 + 5}{2} = 3.$$

Signe. Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est strictement positif hors de $[-2, 3]$ (tableau ci-dessous).

Conclusion. L'ensemble des solutions est :

$$S =]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[.$$

Signe de x² - x - 6 : positif hors des racines -2 et 3, négatif entre elles.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x^2 - x - 6$		+	0	−	0	+	

Attention : Discriminant négatif : regarde a

Pour $-2x^2+3x-2$, le discriminant vaut $9-16=-7$. Conclure « toujours positif » serait faux : ce trinôme a le signe de $a=-2$, il est donc strictement négatif pour tout réel x.

Un discriminant négatif dit seulement que le signe ne change pas.

Comparer deux fonctions

Définition : Comparaison de deux fonctions

Soit f et g deux fonctions numériques, et I un intervalle inclus dans D_f et dans D_g.

- On dit que f est **inférieure** à g sur I, et on note $f \leq g$ sur I, si $(\forall x \in I) : f(x) \leq g(x)$.
- Les fonctions f et g sont **égales** si elles ont le même ensemble de définition D et si $(\forall x \in D) : f(x) = g(x)$.

Interprétation graphique. Dans un repère, $f \leq g$ sur I signifie que, sur I, la courbe $\mathcal{C}_f$ est **au-dessous** de la courbe $\mathcal{C}_g$: pour chaque abscisse x de I, le point de $\mathcal{C}_f$ a une ordonnée inférieure ou égale à celle du point de $\mathcal{C}_g$.

Méthode : position relative de deux courbes

1. **Calcule** $f(x)-g(x)$ sur l'intervalle commun.
2. **Cherche** son signe : factorisation, trinôme, quotient.
3. **Traduis** : différence positive, la courbe de f passe au-dessus ; négative, au-dessous.
4. **Repère** les annulations de la différence : ce sont les abscisses des points d'intersection.

Exemple

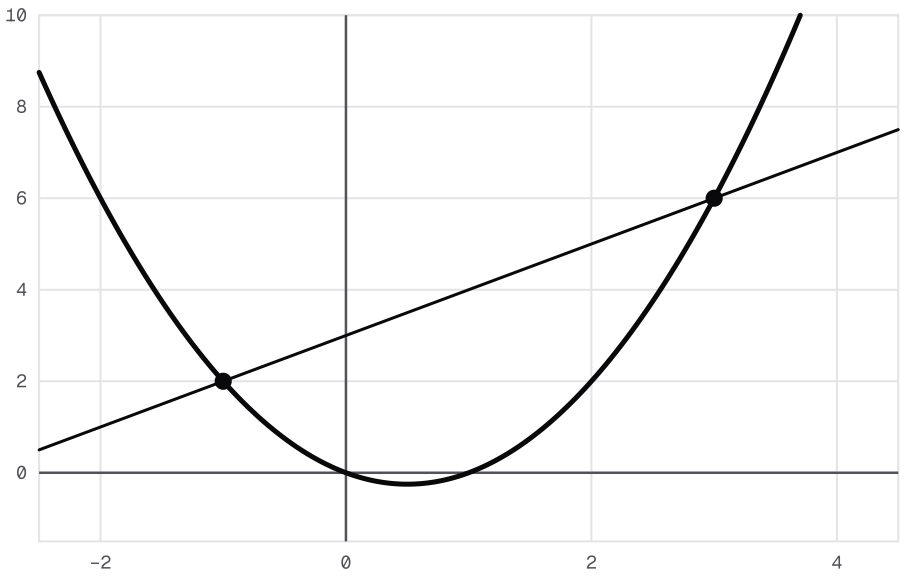
Énoncé. Compare $f : x \mapsto x^2-x$ et $g : x \mapsto x+3$ sur $\mathbb{R}$.

Différence. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= x^2-2x-3 \\ &= (x+1)(x-3). \end{aligned}$$

Signe. Ce trinôme est négatif entre -1 et 3, positif ailleurs.

Lecture. Sur $[-1,3]$, la courbe de f est au-dessous de celle de g ; ailleurs, elle est au-dessus. Les courbes se coupent aux points $(-1,2)$ et $(3,6)$.



La parabole de f : x ↦ x² – x et la droite de g : x ↦ x + 3 se coupent en (–1, 2) et (3, 6). Entre ces deux points, la parabole passe sous la droite ; ailleurs, elle est au-dessus.

Monotonie : taux de variation et parité

Définition : Fonction croissante, décroissante, monotone

Soit f une fonction numérique et I un intervalle inclus dans D_f.

- f est **croissante** sur I si, pour tous réels x et y de I : $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- f est **strictement croissante** sur I si, pour tous réels x et y de I : $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- f est **décroissante** sur I si, pour tous réels x et y de I : $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- f est **strictement décroissante** sur I si, pour tous réels x et y de I : $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- f est **monotone** sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

Propriété : Taux de variation et monotonie

Soit f une fonction numérique et I un intervalle inclus dans D_f. Pour deux réels distincts x et y de I, on appelle **taux de variation** de f entre x et y le nombre

$$\tau(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

- f est croissante sur I si et seulement si $\tau(x, y) \geq 0$ pour tous réels distincts x et y de I.
- f est décroissante sur I si et seulement si $\tau(x, y) \leq 0$ pour tous réels distincts x et y de I.
- f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I si et seulement si $\tau(x, y) > 0$ (respectivement $\tau(x, y) < 0$) pour tous réels distincts x et y de I.

Méthode : le signe du taux de variation

1. **Prends** $x \neq y$ dans l'intervalle I.
2. **Simplifie** $f(x) - f(y)$ jusqu'à faire apparaître $x - y$ en facteur, puis divise : tu obtiens $\tau(x, y)$.
3. **Signe** : sers-toi de ce que tu sais sur x et y, qui appartiennent à I.
4. **Conclus** en nommant l'intervalle : taux positif, fonction croissante ; taux négatif, fonction décroissante.

Exemple

Énoncé. Étudie $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$ sur $]-2, +\infty[$.

Taux. Pour $x \neq y$ dans $]-2, +\infty[$:

$$f(x) - f(y) = \frac{y - x}{(x+2)(y+2)}.$$

En divisant par $x - y$:

$$\tau(x, y) = \frac{-1}{(x+2)(y+2)}.$$

Signe. Pour $x > -2$ et $y > -2$, le dénominateur est strictement positif : $\tau(x, y) < 0$.

Conclusion. La fonction f est strictement décroissante sur $]-2, +\infty[$; de même sur $]-\infty, -2[$.

Attention : Un sens de variation par intervalle

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$ décroît sur $]-\infty, -2[$ et sur $]-2, +\infty[$. Pourtant $-3 < 0$ et l'image de -3, qui vaut -1, est plus petite que celle de 0, qui vaut $\dfrac{1}{2}$.

Elle n'est donc pas décroissante sur la réunion : nomme toujours **un** intervalle.

Propriété : Monotonie et parité

Soit f une fonction **paire** ou **impaire**, et I un intervalle inclus dans $D_f \cap [0, +\infty[$, sur lequel f est monotone. On note I' l'intervalle formé des opposés des éléments de I.

- Si f est paire, f a sur I' le sens de variation **contraire** de celui qu'elle a sur I.
- Si f est impaire, f a sur I' le **même** sens de variation que sur I.

Exemple

Énoncé. Étudie $f : x \mapsto x^2 - 3$ sur $\mathbb{R}$.

Sur $[0, +\infty[$**.** Pour $x \neq y$ positifs ou nuls :

$$\tau(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y.$$

Ce taux est strictement positif, car x et y ne sont pas tous deux nuls : f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Par la parité. La fonction f est paire : elle est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

Extremums

Définition : Maximum, minimum, extremum

Soit f une fonction numérique, I un intervalle inclus dans D_f et a un élément de I.

- $f(a)$ est le **maximum** de f sur I si $(\forall x \in I) : f(x) \leq f(a)$.
- $f(a)$ est le **minimum** de f sur I si $(\forall x \in I) : f(x) \geq f(a)$.
- Un maximum ou un minimum s'appelle un **extremum**.
- $f(a)$ est un **maximum local** (respectivement un **minimum local**) de f s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que $(\forall x \in J \cap D_f) : f(x) \leq f(a)$ (respectivement $f(x) \geq f(a)$).

Méthode : trouver et justifier un extremum

1. **Repère** dans le tableau de variations la valeur a où le sens change.
2. **Croissante puis décroissante** autour de a : $f(a)$ est un maximum. **Décroissante puis croissante** : un minimum.
3. **Compare** aussi avec les valeurs aux bornes de l'intervalle.
4. **Confirme** par le calcul : montre que $f(x) - f(a)$ garde un signe constant.

Exemple

Énoncé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$. Trouve son maximum.

Forme canonique. Pour tout réel x, $f(x) = -2(x - 2)^2 + 5$, donc :

$$f(x) - 5 = -2(x - 2)^2 \leq 0.$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) \leq 5 = f(2)$: le maximum de f est 5, atteint en 2. Le tableau ci-dessous le résume.

Variations de -2x² + 8x - 3 : croissante jusqu'à 2, puis décroissante ; maximum 5 en 2.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	5	↘	

Attention : Un maximum est atteint

Sur $[0, 2[$, la fonction $x \mapsto x^2$ reste sous 4 : le nombre 4 est un majorant. Ce n'est pas un maximum, car aucun réel de $[0, 2[$ n'a pour carré 4.

Avant d'écrire « maximum », trouve le réel a dont l'image est cette valeur.

Composée de deux fonctions

Définition : Composée de deux fonctions

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et g une fonction d'ensemble de définition D_g. La **composée** de f suivie de g est la fonction notée $g \circ f$ (on lit « g rond f ») définie par

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Son ensemble de définition est l'ensemble des réels x tels que $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$.

Exemple

Énoncé. Avec $u : x \mapsto x - 1$ et la fonction inverse i, calcule $i \circ u$ et $u \circ i$.

Première composée. La fonction $i \circ u$ est définie si $x - 1 \neq 0$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et $(i \circ u)(x) = \dfrac{1}{x - 1}$.

Seconde composée. La fonction $u \circ i$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, et $(u \circ i)(x) = \dfrac{1}{x} - 1$.

Attention : Qui agit en premier ?

Avec $a : x \mapsto 3x$ et $b : x \mapsto x + 2$, on obtient $(b \circ a)(x) = 3x + 2$, mais $(a \circ b)(x) = 3x + 6$. Dans $b \circ a$, la fonction écrite à droite agit **en premier**. Inverser l'ordre change le résultat.

Propriété : Monotonie d'une composée

Soit f une fonction monotone sur un intervalle I et g une fonction monotone sur un intervalle J, telles que $f(x) \in J$ pour tout x de I.

- Si f et g ont le **même** sens de variation (sur I et sur J), alors $g \circ f$ est **croissante** sur I.
- Si f et g ont des sens de variation **contraires**, alors $g \circ f$ est **décroissante** sur I.

Méthode : variations d'une composée

1. **Identifie** les deux étapes : $h = g \circ f$.
2. **Coupe** le domaine en intervalles où f garde un sens de variation.
3. **Vérifie** que les valeurs $f(x)$ tombent dans un intervalle où g garde un sens.
4. **Applique** la règle : sens identiques, h croît ; sens opposés, h décroît.

Exemple

Énoncé. Étudie $h : x \mapsto \sqrt{3 - x}$.

Décomposition. h est la composée de $x \mapsto 3 - x$, puis de la racine carrée. Elle est définie si $3 - x \geq 0$, soit sur $]-\infty, 3]$.

Sens. La première fonction décroît sur $]-\infty, 3]$ et prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$, où la racine carrée croît.

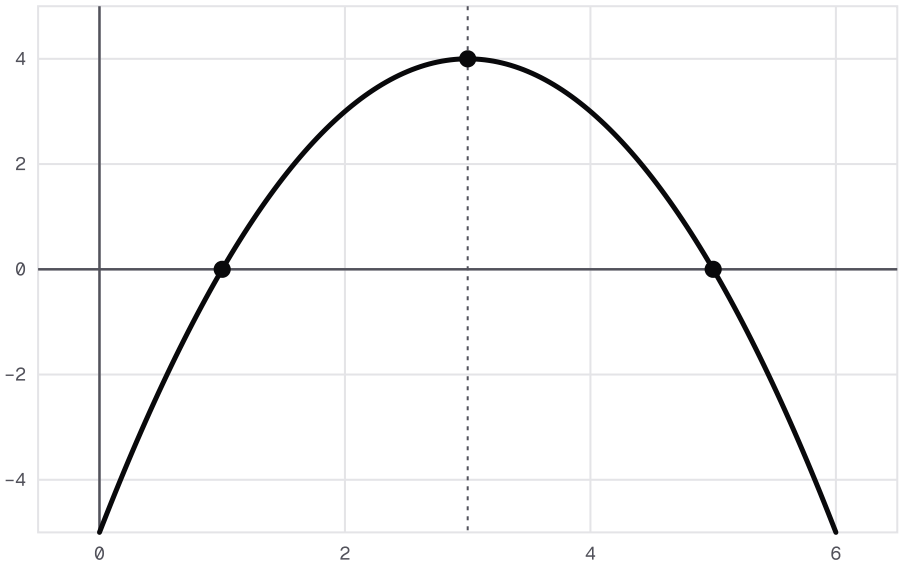
Conclusion. Les sens sont opposés : h est décroissante sur $]-\infty, 3]$.

Axe et centre de symétrie

Propriété : Axe de symétrie d'une courbe

Le plan est rapporté à un repère orthogonal. Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et a un réel. La droite d'équation $x = a$ est un **axe de symétrie** de la courbe $\mathcal{C}_f$ si et seulement si, pour tout x de D_f :

- $2a - x \in D_f$;
- $f(2a - x) = f(x)$.

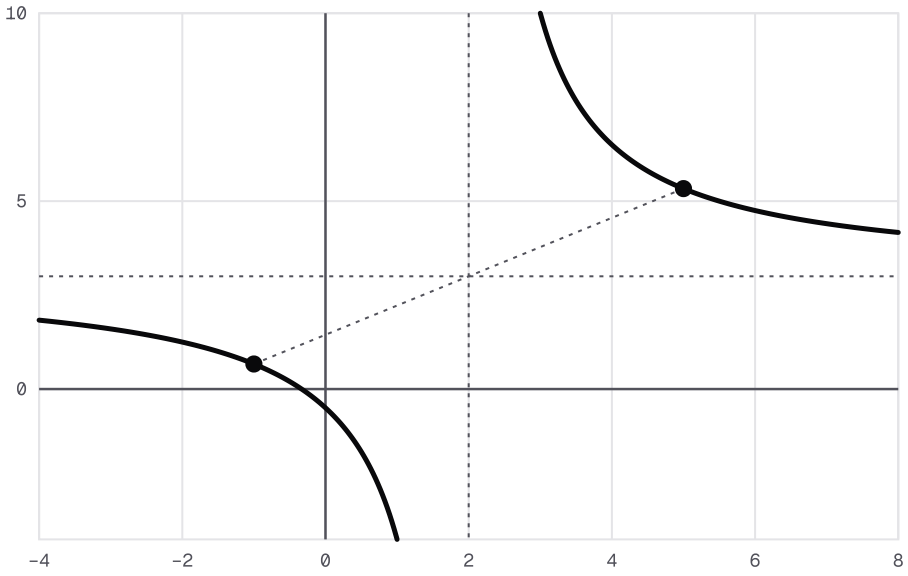


Un exemple d'axe de symétrie : avec a = 3, la droite d'équation x = 3 partage la parabole de x ↦ −x² + 6x − 5, et deux abscisses x et 6 − x ont la même image.

Propriété : Centre de symétrie d'une courbe

Le plan est rapporté à un repère. Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et $\Omega(a, b)$ un point du plan. Le point Ω est un **centre de symétrie** de la courbe $\mathcal{C}_f$ si et seulement si, pour tout x de D_f :

- $2a - x \in D_f$;
- $f(2a - x) + f(x) = 2b$.



Un exemple de centre de symétrie : avec a = 2 et b = 3, le point Ω(2, 3) coupe en son milieu tout segment reliant les points de la courbe de x ↦ (3x + 1)/(x − 2) d'abscisses x et 4 − x.

Méthode : vérifier un axe ou un centre

1. **Contrôle** que D_f est symétrique autour de a : avec x, il contient aussi $2a - x$.
2. **Remplace** x par $2a - x$ dans $f(x)$, puis réduis l'expression.
3. **Axe** $x = a$: tu dois retrouver exactement $f(x)$.
4. **Centre** $\Omega(a, b)$: ajoute $f(x)$; la somme doit valoir $2b$ quel que soit x.

Exemple

Énoncé. Vérifie que la droite d'équation $x = -2$ est un axe de symétrie de la courbe de $f : x \mapsto x^2 + 4x + 1$.

Domaine. Dans un repère orthogonal : $D_f = \mathbb{R}$, donc pour tout réel x, $-4 - x$ est réel. Ici $a = -2$ et $2a - x = -4 - x$.

Calcul. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & f(-4 - x) \\ & = (x + 4)^2 - 4(x + 4) + 1 \\ & = x^2 + 4x + 1 = f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. On retrouve $f(x)$: cette droite est bien un axe de symétrie de la courbe.

Exemple

Énoncé. Vérifie que $\Omega(3,1)$ est un centre de symétrie de la courbe de $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-3}$.

Domaine. Ici $a = 3$ et $b = 1$. Si $x \neq 3$, alors $6 - x \neq 3$.

Calcul. Pour tout $x \neq 3$:

$$\begin{aligned} &f(6-x) + f(x) \\ &= \frac{6-x}{3-x} - \frac{x}{3-x} \\ &= \frac{6-2x}{3-x} = 2. \end{aligned}$$

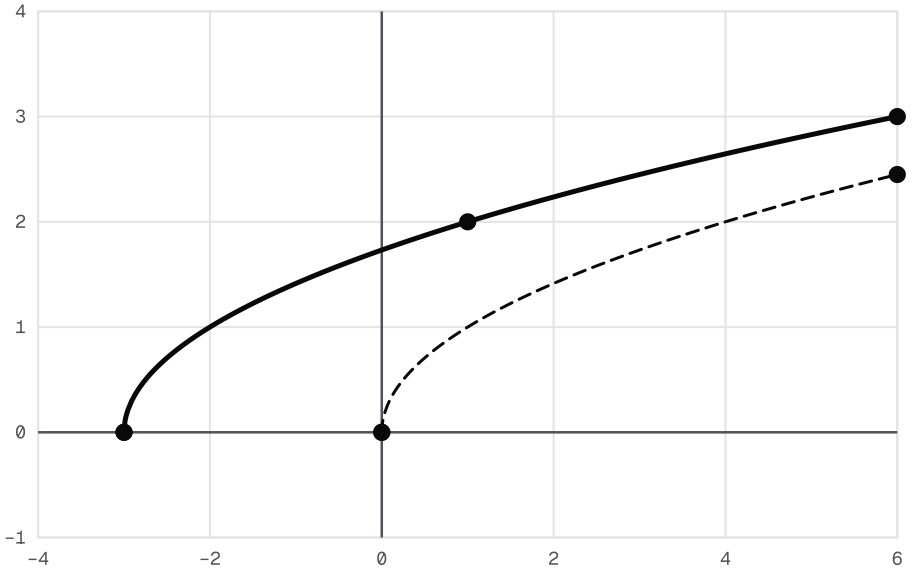
Conclusion. La somme vaut 2×1 : $\Omega(3,1)$ est un centre de symétrie.

Les fonctions racine de x + a et cube

Propriété : La fonction racine carrée de x + a

Soit a un réel et f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+a}$.

- $D_f = [-a, +\infty[$, et f est strictement croissante sur D_f.
- Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe de f est l'image de la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ par la translation de vecteur $-a\,\vec{i}$.



$y = \sqrt{x}$ $y = \sqrt{x+3}$ Point du graphe

Exemple avec a = 3 : la courbe de x ↦ √(x + 3) est celle de x ↦ √x, en pointillés, glissée de 3 unités vers la gauche ; elle commence en (–3, 0).

Exemple

Énoncé. Décris la fonction $x \mapsto \sqrt{x-1}$.

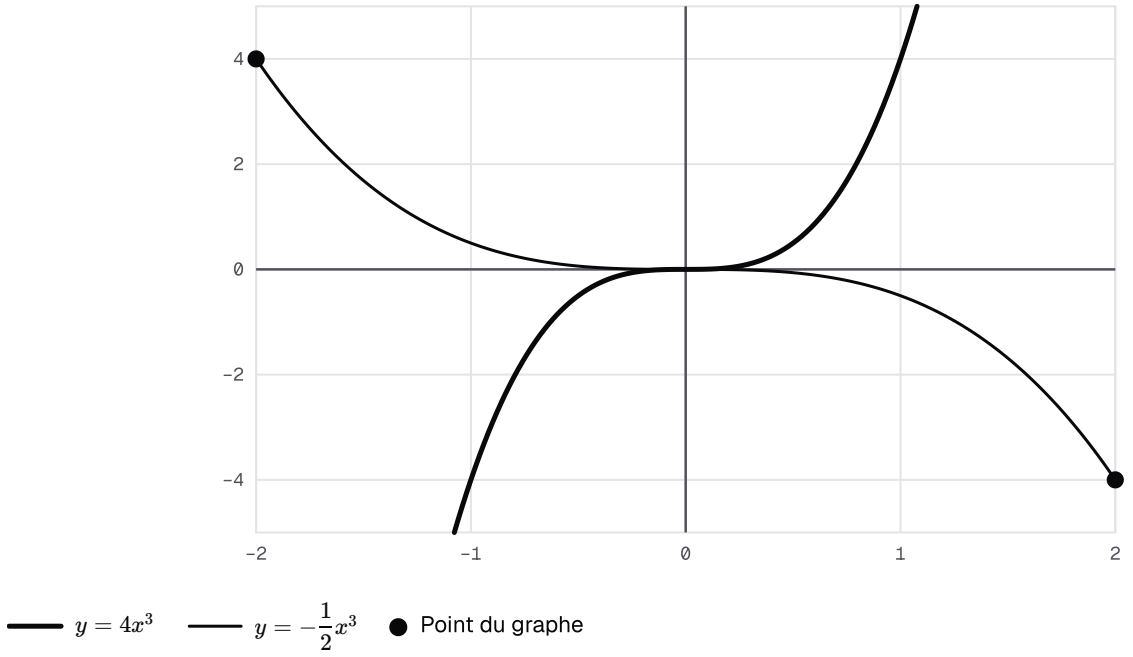
Lecture. Ici $a = -1$: la fonction est définie sur $[1, +\infty[$ et strictement croissante. Sa courbe s'obtient en décalant celle de $x \mapsto \sqrt{x}$ d'une unité vers la droite, par la translation de vecteur $\vec{i}$.

Valeurs. Elle vaut 0 en 1, 1 en 2 et 2 en 5.

Propriété : La fonction cube multipliée par a

Soit a un réel non nul et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3$.

- f est impaire : sa courbe admet l'origine O du repère comme centre de symétrie.
- Si $a > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; si $a < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.



Exemples avec a = 4 et a = −1/2 : x ↦ 4x³ est strictement croissante, x ↦ −x³/2 strictement décroissante, et les deux courbes sont symétriques par rapport à l'origine.

Exemple

Énoncé. Décris la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4}x^3$.

Lecture. Ici $a = \dfrac{1}{4} > 0$: la fonction est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

Valeurs. Elle vaut -2 en -2, 0 en 0 et 2 en 2.

Quelle méthode pour quelle question ?

Méthode : Quelle méthode pour quelle question ?

- **Borner** une fonction : le signe de $f(x) - M$, ou de $f(x) - m$.
- **Calculer** une image éloignée : la période.
- **Résoudre** une inéquation du second degré : le discriminant et le signe du trinôme.
- **Situer** deux courbes : le signe de $f(x) - g(x)$.
- **Trouver** un sens de variation : le signe du taux de variation, puis la parité.
- **Justifier** un extremum : le signe de $f(x) - f(a)$.
- **Étudier** une composée : la décomposition, puis la règle des sens.
- **Vérifier** un axe ou un centre : le calcul de $f(2a - x)$.

Fonction bornée sur I

$$(\exists M > 0)(\forall x \in I) :$$
$$|f(x)| \leq M$$

Période T

$$T > 0 \text{ et } (\forall x \in D_f) :$$
$$x \pm T \in D_f \text{ et}$$
$$f(x + T) = f(x)$$

Discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Racine x1, si le discriminant est strictement positif

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Racine x2, si le discriminant est strictement positif

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Taux de variation

$$\tau(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

Composée

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

Axe de symétrie d'équation x = a (repère orthogonal)

$$(\forall x \in D_f) :$$
$$2a - x \in D_f \text{ et}$$
$$f(2a - x) = f(x)$$

Centre de symétrie de coordonnées (a, b)

$$(\forall x \in D_f) :$$
$$2a - x \in D_f \text{ et}$$
$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

À retenir : Rédiger en devoir

Écris l'intervalle dans chaque conclusion : « f est croissante sur $[0, 2]$ ». Cite l'outil employé : « d'après le signe du trinôme », « d'après la monotonie d'une composée ».

Pour réfuter, annonce le contre-exemple. Un extremum se justifie par une inégalité et par une valeur atteinte.