BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Un trinôme et sa racine carrée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 8x + 12$, et sa courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé.

1. 1 pts

Résoudre l'équation $f(x) = 0$, puis donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x (tableau de signes).

INDICE

Début : calcule le discriminant. **Ensuite :** le trinôme a le signe de a à l'extérieur des racines.

2. 0,75 pts

Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = (x-4)^2 - 4$. En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Début : développe $(x-4)^2$. **Ensuite :** étudie le signe de $f(x) - f(4)$.

3. 1 pts

Soit x et y deux réels distincts. Calculer $\tau(x, y)$. En déduire, pour x et y pris dans le même intervalle, le sens de variation de f sur $]-\infty, 4]$ et sur $[4, +\infty[$.

INDICE

Début : $f(x) - f(y) = (x^2 - y^2) - 8(x - y)$. **Ensuite :** compare $x + y$ à 8 sur chaque intervalle.

4. 1 pts

Vérifier que la droite d'équation $x = 4$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. En déduire $f(8)$, sachant que $f(0) = 12$.

INDICE

Outil : la propriété de l'axe de symétrie avec $a = 4$: calcule $f(8 - x)$. **Ensuite :** choisis x pour que $8 - x$ vaille 8.

5. 1,25 pts

On considère la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 8x + 12}$. À l'aide de la question 1, déterminer son ensemble de définition D_g, puis son sens de variation sur $]-\infty, 2]$ et sur $[6, +\infty[$.

INDICE

Début : g est la composée de f suivie de la racine carrée ; utilise la question 1. **Ensuite :** applique la monotonie d'une composée sur chaque intervalle.

Exercice 2 — 5 pts

Une fonction homographique de bout en bout

On considère la fonction f définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$, et sa courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère.

1. — 0,5 pts

Vérifier que, pour tout x de D :

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}.$$

Calculer $f(0)$ et $f(-3)$.

INDICE

Outil : réduis $2 + \dfrac{1}{x+1}$ au même dénominateur ; la forme obtenue simplifie les calculs d'images.

2. — 1,25 pts

Soit x et y deux réels distincts de D. Calculer $\tau(x, y)$. En déduire, en choisissant x et y tous deux dans l'un des intervalles, comment varie f sur $]-1, +\infty[$ et sur $]-\infty, -1[$.

INDICE

Début : avec la question 1, $f(x) - f(y) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{y+1}$. **Ensuite :** étudie le signe de $(x+1)(y+1)$ sur chaque intervalle.

3. — 1 pts

Vérifier que le point $\Omega(-1, 2)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. En déduire $f(-5)$, sachant que $f(3) = \dfrac{9}{4}$.

INDICE

Outil : la propriété du centre de symétrie avec $a = -1$ et $b = 2$: calcule $f(-2-x) + f(x)$ avec la question 1. **Ensuite :** quelle valeur de x donne $-2 - x = -5$?

4. — 1,25 pts

Justifier que $2 < f(x) \leq 3$ pour tout x de $[0, +\infty[$. La fonction f est-elle bornée sur $[0, +\infty[$? Quel est son maximum sur cet intervalle ?

INDICE

Début : étudie le signe de $f(x) - 2$, puis celui de $3 - f(x)$. **Ensuite :** calcule $f(0)$.

5. 1 pts

On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = 3 - x$. Vérifier que, pour $x \neq -1$:

$$f(x) - (3 - x) = \frac{x^2}{x + 1}.$$

En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}$ sur $]-1, +\infty[$.

INDICE

Début : pars de $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+1}$ et réduis au même dénominateur. **Ensuite :** signe d'un carré, signe de $x + 1$.

Exercice 3 5 pts

Une composée : cube, puis racine carrée

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3$ sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = \sqrt{x+4}$. On note $h = g \circ f$.

1. 0,5 pts

Donner la parité et le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. Calculer $f(-2)$, $f(0)$ et $f(2)$.

INDICE

Outil : les propriétés de la fonction $x \mapsto ax^3$, avec $a = \dfrac{1}{2}$.

2. 0,75 pts

Donner l'ensemble de définition de g, son sens de variation, et la translation qui transforme la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ en celle de g. Calculer $g(-4)$ et $g(0)$.

INDICE

Outil : les propriétés de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$, avec $a = 4$.

3. 1 pts

Déterminer l'ensemble de définition D_h de h, puis l'expression de $h(x)$.

INDICE

Début : il faut $f(x) \geq -4$, c'est-à-dire $f(x) \geq f(-2)$. **Ensuite :** utilise la stricte croissance de f.

4. 1 pts

Étudier le sens de variation de h sur D_h, puis donner son minimum.

INDICE

Outil : la monotonie d'une composée ; vérifie d'abord que $f(x)$ est dans D_g.

5. 0,75 pts

En déduire que h est bornée sur $[-2, 2]$, avec $0 \leq h(x) \leq 2\sqrt{2}$.

INDICE

Outil : une fonction croissante sur $[-2, 2]$ est comprise entre ses valeurs aux bornes ; calcule $h(2)$.

6. 1 pts

Résoudre l'inéquation $h(x) \leq 2$ sur D_h.

INDICE

Début : calcule $h(0)$. **Ensuite :** utilise la stricte croissance de h sur D_h (question 4).

Exercice 4 5 pts

Une fonction impaire de degré 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 12x$, et sa courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,5 pts

Justifier que f est impaire. Quelle conséquence pour $\mathcal{C}_f$? Calculer $f(2)$ et $f(4)$, puis donner $f(-2)$ et $f(-4)$ sans nouveau calcul.

INDICE

Outil : calcule $f(-x)$ pour tout réel x. **Ensuite :** une fonction impaire vérifie $f(-a) = -f(a)$.

2. 1,25 pts

Soit x et y deux réels distincts. On rappelle que :

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Vérifier que $\tau(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 12$. En déduire le sens de variation de f sur $[0, 2]$, puis sur $[2, +\infty[$.

INDICE

Début : utilise l'égalité rappelée. **Ensuite :** sur $[0, 2]$, compare chacun des termes x^2, xy et y^2 à 4 ; sur $[2, +\infty[$, fais de même.

3. 1 pts

En déduire, à l'aide de la question 1, le sens de variation de f sur $[-2, 0]$ et sur $]-\infty, -2]$. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : le lien entre monotonie et parité, appliqué à f impaire : ses variations sur $[-b, -a]$ reproduisent celles observées sur $[a, b]$. **Ensuite :** reporte dans le tableau les valeurs trouvées à la question 1.

4. 0,75 pts

Justifier que $f(-2) = 16$ est un maximum local de f. Ce réel est-il le maximum de f sur $\mathbb{R}$? On pourra calculer $f(5)$.

INDICE

Outil : la définition d'un maximum local : trouve un intervalle ouvert J contenant -2 sur lequel $f(x) \leq f(-2)$. **Ensuite :** compare $f(5)$ à 16.

5. 1 pts

Vérifier que, pour tout réel x :

$$f(x) - 16 = (x+2)^2(x-4).$$

En déduire que f est majorée par 16 sur $]-\infty, 4]$, puis le maximum de f sur cet intervalle.

INDICE

Début : développe $(x+2)^2(x-4)$. **Ensuite :** étudie le signe de chaque facteur pour $x \leq 4$.

6. 0,5 pts

En déduire, à l'aide de l'imparité de f, que $f(x) \geq -16$ pour tout x de $[-4, +\infty[$. Justifier alors que $|f(x)| \leq 16$ pour tout x de $[-4, 4]$.

INDICE

Début : si $x \geq -4$, alors $-x \leq 4$; applique la question 5 au réel $-x$. **Ensuite :** réunis les deux inégalités sur $[-4, 4]$.

Exercice 5 5 pts

Un coût moyen à minimiser

Une entreprise fabrique par jour x centaines d'objets, avec x dans $I =]0, 10]$. Le coût total de fabrication, en milliers de dirhams, est :

$$C(x) = x^2 + 2x + 16.$$

Le coût moyen d'une centaine d'objets est $M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

1. 0,75 pts

Calculer $C(2)$, $C(4)$ et $C(8)$. Vérifier que $M(x) = x + 2 + \dfrac{16}{x}$ pour tout x de I, puis calculer $M(2)$, $M(4)$ et $M(8)$.

INDICE

Outil : divise chaque terme de $C(x)$ par x, ce qui est permis car $x > 0$.

2. 1 pts

Vérifier que $M(x) - 10 = \dfrac{(x-4)^2}{x}$ pour tout x de I. En déduire le minimum de M sur I et la production correspondante.

INDICE

Début : réduis $x - 8 + \dfrac{16}{x}$ au même dénominateur. **Ensuite :** étudie le signe du quotient obtenu, puis compare à $M(4)$.

3. 1,25 pts

Soit x et y deux réels distincts de I. Vérifier que $\tau(x, y) = 1 - \dfrac{16}{xy}$. En déduire le sens de variation de M sur $]0, 4]$, puis sur $[4, 10]$.

INDICE

Début : $M(x) - M(y) = (x - y) + 16\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)$. **Ensuite :** compare le produit xy à 16 sur chaque intervalle.

4. 1,25 pts

Une centaine d'objets est vendue 12 milliers de dirhams : la recette est $R(x) = 12x$. Étudier le signe de $R(x) - C(x)$ sur I. En déduire la position de la courbe de C par rapport à la droite d'équation $y = 12x$.

INDICE

Début : écris $R(x) - C(x)$ comme un trinôme et calcule son discriminant. **Ensuite :** un trinôme a le signe de a à l'extérieur de ses racines.

5. 0,75 pts

En déduire l'ensemble des productions x de I pour lesquelles $M(x) \leq 12$. Justifier que $10 \leq M(x) \leq 12$ pour tout x de cet ensemble. La fonction M est-elle bornée sur $[2, 8]$?

INDICE

Début : pour $x > 0$, $M(x) \leq 12$ équivaut à $C(x) \leq 12x$. **Ensuite :** utilise la question 4, puis la question 2.