BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Un trinôme et sa racine carrée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 8x + 12$, et sa courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé.

1. 1 pts

Résoudre l'équation $f(x) = 0$, puis donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x (tableau de signes).

INDICE

Début : calcule le discriminant. **Ensuite :** le trinôme a le signe de a à l'extérieur des racines.

CORRIGÉ

Discriminant. Ici $a = 1$, $b = -8$ et $c = 12$:

$$\begin{aligned}\Delta &= (-8)^2 - 4 \times 1 \times 12 \\ &= 64 - 48 = 16.\end{aligned}$$

Ainsi $\Delta > 0$ et $\sqrt{16} = 4$.

Racines. $x_1 = \dfrac{8 - 4}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{8 + 4}{2} = 6$. Pour tout réel x, $f(x) = (x - 2)(x - 6)$.

Signe. Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

Conclusion. Les solutions de $f(x) = 0$ sont 2 et 6, et le tableau de signes se lit ainsi :

- $f(x) > 0$ pour $x < 2$ ou $x > 6$;
- $f(x) < 0$ pour $2 < x < 6$;
- $f(2) = f(6) = 0$.

2. 0,75 pts

Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = (x - 4)^2 - 4$. En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Début : développe $(x - 4)^2$. **Ensuite :** étudie le signe de $f(x) - f(4)$.

CORRIGÉ

Forme canonique. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x - 4)^2 - 4 \\ &= x^2 - 8x + 16 - 4 \\ &= x^2 - 8x + 12 \\ &= f(x).\end{aligned}$$

Comparaison à $f(4)$. $f(4) = 0 - 4 = -4$ et, pour tout réel x, $f(x) - f(4) = (x - 4)^2 \geq 0$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) \geq f(4)$: le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est -4, atteint en 4.

3. 1 pts

Soit x et y deux réels distincts. Calculer $\tau(x, y)$. En déduire, pour x et y pris dans le même intervalle, le sens de variation de f sur $]-\infty, 4]$ et sur $[4, +\infty[$.

INDICE

Début : $f(x) - f(y) = (x^2 - y^2) - 8(x - y)$. **Ensuite :** compare $x + y$ à 8 sur chaque intervalle.

CORRIGÉ

Taux. Pour $x \neq y$:

$$\begin{aligned} &f(x) - f(y) \\ &= (x^2 - y^2) - 8(x - y) \\ &= (x - y)(x + y - 8), \end{aligned}$$

donc $\tau(x, y) = x + y - 8$.

Sur $]-\infty, 4]$. Pour x et y distincts dans cet intervalle, l'un est strictement inférieur à 4 : $x + y < 8$, donc $\tau(x, y) < 0$.

Sur $[4, +\infty[$. De même, $x + y > 8$, donc $\tau(x, y) > 0$.

Conclusion. Par le signe du taux, f est strictement décroissante sur $]-\infty, 4]$ et strictement croissante sur $[4, +\infty[$.

4. 1 pts

Vérifier que la droite d'équation $x = 4$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. En déduire $f(8)$, sachant que $f(0) = 12$.

INDICE

Outil : la propriété de l'axe de symétrie avec $a = 4$: calcule $f(8 - x)$. **Ensuite :** choisis x pour que $8 - x$ vaille 8.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Pour tout réel x, $8 - x$ est réel.

Calcul. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &f(8 - x) \\ &= (8 - x)^2 - 8(8 - x) + 12 \\ &= 64 - 16x + x^2 \\ &\quad - 64 + 8x + 12 \\ &= x^2 - 8x + 12 = f(x). \end{aligned}$$

D'après la propriété de l'axe de symétrie, avec $8 = 2 \times 4$, la droite d'équation $x = 4$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Conclusion. La droite d'équation $x = 4$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. Pour $x = 0$, $f(8 - 0) = f(0)$, donc $f(8) = 12$; contrôle : $64 - 64 + 12 = 12$.

5. 1,25 pts

On considère la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 8x + 12}$. À l'aide de la question 1, déterminer son ensemble de définition D_g, puis son sens de variation sur $]-\infty, 2]$ et sur $[6, +\infty[$.

INDICE

Début : g est la composée de f suivie de la racine carrée ; utilise la question 1. **Ensuite :** applique la monotonie d'une composée sur chaque intervalle.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Le réel $g(x)$ existe si et seulement si $f(x) \geq 0$. D'après la question 1 :

$$D_g =]-\infty, 2] \cup [6, +\infty[\,.$$

Sur $]-\infty, 2]$**.** Cet intervalle est inclus dans $]-\infty, 4]$, où f est décroissante (question 3), et $f(x) \geq 0$. La racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$. Les sens sont contraires : par la monotonie d'une composée, g est décroissante sur $]-\infty, 2]$.

Sur $[6, +\infty[$**.** Cet intervalle est inclus dans $[4, +\infty[$, où f est croissante, et $f(x) \geq 0$. La racine carrée étant croissante sur $[0, +\infty[$, les sens sont les mêmes : g est croissante sur $[6, +\infty[$.

Conclusion. g est décroissante sur $]-\infty, 2]$ et croissante sur $[6, +\infty[$. Pour tout x de D_g, $g(x) \geq 0 = g(2) = g(6)$: la plus petite valeur prise par g est 0, atteinte en 2 et en 6.

Exercice 2 5 pts

Une fonction homographique de bout en bout

On considère la fonction f définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$, et sa courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère.

1. 0,5 pts

Vérifier que, pour tout x de D :

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}.$$

Calculer $f(0)$ et $f(-3)$.

INDICE

Outil : réduis $2 + \dfrac{1}{x+1}$ au même dénominateur ; la forme obtenue simplifie les calculs d'images.

CORRIGÉ

Forme réduite. Pour tout x de D, $x+1 \neq 0$ et :

$$\begin{aligned} 2 + \frac{1}{x+1} &= \frac{2(x+1)+1}{x+1} \\ &= \frac{2x+3}{x+1} = f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout x de D, $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+1}$. Ainsi $f(0) = 2+1 = 3$ et $f(-3) = 2 + \dfrac{1}{-2} = \dfrac{3}{2}$.

2. 1,25 pts

Soit x et y deux réels distincts de D. Calculer $\tau(x, y)$. En déduire, en choisissant x et y tous deux dans l'un des intervalles, comment varie f sur $]-1, +\infty[$ et sur $]-\infty, -1[$.

INDICE

Début : avec la question 1, $f(x) - f(y) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{y+1}$. **Ensuite :** étudie le signe de $(x+1)(y+1)$ sur chaque intervalle.

CORRIGÉ

Taux. Soit x et y distincts dans D. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned} & f(x) - f(y) \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} \\ &= \frac{(y+1) - (x+1)}{(x+1)(y+1)} \\ &= \frac{-(x-y)}{(x+1)(y+1)}, \end{aligned}$$

donc $\tau(x, y) = \dfrac{-1}{(x+1)(y+1)}$.

Signe. Sur $]-1, +\infty[$, les facteurs $x+1$ et $y+1$ sont strictement positifs ; sur $]-\infty, -1[$, ils sont strictement négatifs. Dans les deux cas, leur produit est strictement positif et $\tau(x, y) < 0$.

Conclusion. Un taux de variation strictement négatif sur un intervalle traduit une fonction strictement décroissante : f est strictement décroissante sur $]-1, +\infty[$ et sur $]-\infty, -1[$.

3. 1 pts

Vérifier que le point $\Omega(-1,2)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. En déduire $f(-5)$, sachant que $f(3)=\dfrac{9}{4}$.

INDICE

Outil : la propriété du centre de symétrie avec $a=-1$ et $b=2$: calcule $f(-2-x)+f(x)$ avec la question 1. **Ensuite :** quelle valeur de x donne $-2-x=-5$?

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Si $x\neq -1$, alors $-2-x\neq -1$: le réel $-2-x$ est dans D.

Somme. Pour tout x de D, avec la question 1 :

$$\begin{aligned} f(-2-x) &= 2+\frac{1}{-2-x+1} \\ &= 2-\frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

Donc $f(-2-x)+f(x)=4=2\times 2$. D'après la propriété du centre de symétrie, avec $a=-1$ et $b=2$, le point $\Omega(-1,2)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Conséquence. Pour $x=3$, $-2-x=-5$, donc $f(-5)+f(3)=4$ et $f(-5)=4-\dfrac{9}{4}=\dfrac{7}{4}$.

Conclusion. $\Omega(-1,2)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, et $f(-5)=\dfrac{7}{4}$; contrôle : $2+\dfrac{1}{-4}=\dfrac{7}{4}$.

4. 1,25 pts

Justifier que $2<f(x)\leq 3$ pour tout x de $[0,+\infty[$. La fonction f est-elle bornée sur $[0,+\infty[$? Quel est son maximum sur cet intervalle ?

INDICE

Début : étudie le signe de $f(x)-2$, puis celui de $3-f(x)$. **Ensuite :** calcule $f(0)$.

CORRIGÉ

Minorant. Pour $x\geq 0$, $x+1>0$, donc $f(x)-2=\dfrac{1}{x+1}>0$.

Majorant. Pour $x\geq 0$:

$$\begin{aligned} 3-f(x) &= 1-\frac{1}{x+1} \\ &= \frac{x}{x+1}\geq 0. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout x de $[0,+\infty[$, $2<f(x)\leq 3$: f est bornée sur cet intervalle. Comme $f(0)=3$, le maximum de f sur $[0,+\infty[$ est 3, atteint en 0.

5. 1 pts

On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = 3 - x$. Vérifier que, pour $x \neq -1$:

$$f(x) - (3 - x) = \frac{x^2}{x+1}.$$

En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}$ sur $]-1, +\infty[$.

INDICE

Début : pars de $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+1}$ et réduis au même dénominateur. **Ensuite :** signe d'un carré, signe de $x + 1$.

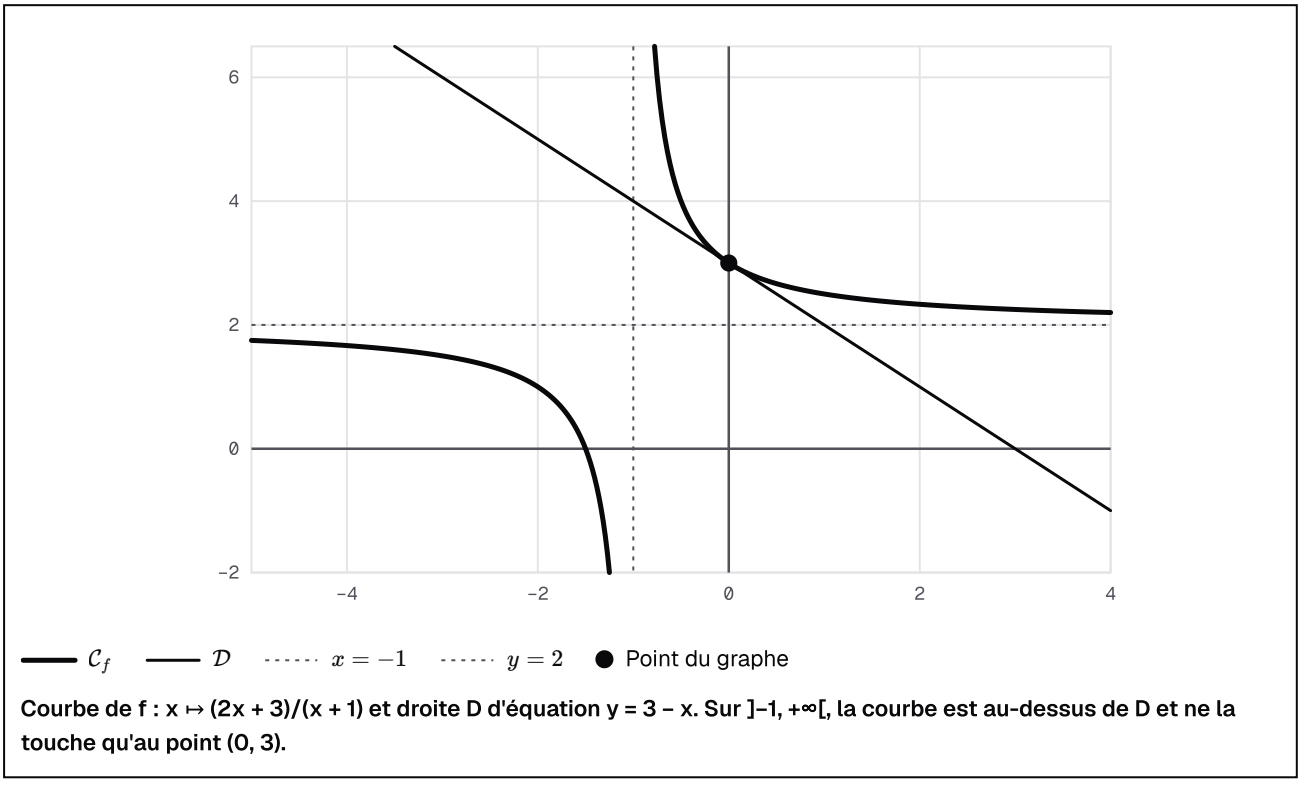
CORRIGÉ

Calcul. Pour tout x de D, avec la question 1 :

$$\begin{aligned} & f(x) - (3 - x) \\ &= x - 1 + \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{(x-1)(x+1) + 1}{x+1} \\ &= \frac{x^2}{x+1}. \end{aligned}$$

Signe. Sur $]-1, +\infty[$, $x^2 \geq 0$ et $x + 1 > 0$: la différence est positive ou nulle, et nulle seulement pour $x = 0$.

Conclusion. Sur $]-1, +\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}$; elles ont un seul point commun, d'abscisse 0 : le point $(0, 3)$.



Courbe de f : x ↦ (2x + 3)/(x + 1) et droite D d'équation y = 3 − x. Sur]−1, +∞[, la courbe est au-dessus de D et ne la touche qu'au point (0, 3).

Exercice 3 — 5 pts

Une composée : cube, puis racine carrée

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3$ sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = \sqrt{x+4}$. On note $h = g \circ f$.

1. — 0,5 pts

Donner la parité et le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. Calculer $f(-2)$, $f(0)$ et $f(2)$.

INDICE

Outil : les propriétés de la fonction $x \mapsto ax^3$, avec $a = \dfrac{1}{2}$.

CORRIGÉ

Propriétés. Ici $a = \dfrac{1}{2} > 0$: les propriétés de $x \mapsto ax^3$ donnent f impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. f est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; de plus $f(-2) = \dfrac{1}{2} \times (-8) = -4$, $f(0) = 0$ et $f(2) = \dfrac{1}{2} \times 8 = 4$.

2. — 0,75 pts

Donner l'ensemble de définition de g, son sens de variation, et la translation qui transforme la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ en celle de g. Calculer $g(-4)$ et $g(0)$.

INDICE

Outil : les propriétés de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$, avec $a = 4$.

CORRIGÉ

Propriétés. Les propriétés de $x \mapsto \sqrt{x+a}$, avec $a = 4$, donnent $D_g = [-4, +\infty[$ et g strictement croissante sur D_g. Sa courbe est l'image de celle de $x \mapsto \sqrt{x}$ par la translation de vecteur $-4\,\vec{i}$.

Conclusion. $g(-4) = \sqrt{0} = 0$ et $g(0) = \sqrt{4} = 2$.

3. — 1 pts

Déterminer l'ensemble de définition D_h de h, puis l'expression de $h(x)$.

INDICE

Début : il faut $f(x) \geq -4$, c'est-à-dire $f(x) \geq f(-2)$. **Ensuite :** utilise la stricte croissance de f.

CORRIGÉ

Condition. Le réel x est dans D_h si et seulement si $f(x)$ est dans D_g, c'est-à-dire $f(x) \geq -4$. Or $-4 = f(-2)$: la condition s'écrit $f(x) \geq f(-2)$.

Résolution. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $f(x) \geq f(-2)$ équivaut à $x \geq -2$.

Conclusion. $D_h = [-2, +\infty[$ et, pour tout $x \geq -2$:

$$h(x) = g\big(f(x)\big) = \sqrt{\frac{1}{2}x^3 + 4}.$$

4. 1 pts

Étudier le sens de variation de h sur D_h, puis donner son minimum.

INDICE

Outil : la monotonie d'une composée ; vérifie d'abord que $f(x)$ est dans D_g.

CORRIGÉ

Composée. Sur $[-2, +\infty[$, f est strictement croissante et, d'après la question 3, $f(x)$ est dans $[-4, +\infty[$, où g est strictement croissante. Les deux sens sont les mêmes : par la monotonie d'une composée, dans sa version stricte, h est strictement croissante sur $[-2, +\infty[$.

Minimum. Pour tout $x \geq -2$, $h(x) \geq h(-2) = \sqrt{-4+4} = 0$.

Conclusion. h est strictement croissante sur D_h, et son minimum est 0, atteint en -2.

5. 0,75 pts

En déduire que h est bornée sur $[-2, 2]$, avec $0 \leq h(x) \leq 2\sqrt{2}$.

INDICE

Outil : une fonction croissante sur $[-2, 2]$ est comprise entre ses valeurs aux bornes ; calcule $h(2)$.

CORRIGÉ

Encadrement. h est croissante sur $[-2, 2]$, inclus dans D_h : pour tout x de $[-2, 2]$, $h(-2) \leq h(x) \leq h(2)$.

Valeurs. $h(-2) = 0$ et, comme $f(2) = 4$, $h(2) = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Conclusion. Pour tout x de $[-2, 2]$, $0 \leq h(x) \leq 2\sqrt{2}$: h est minorée et majorée, donc bornée sur $[-2, 2]$.

6. 1 pts

Résoudre l'inéquation $h(x) \leq 2$ sur D_h.

INDICE

Début : calcule $h(0)$. **Ensuite :** utilise la stricte croissance de h sur D_h (question 4).

CORRIGÉ

Valeur. $h(0) = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2$: l'inéquation $h(x) \leq 2$ s'écrit $h(x) \leq h(0)$.

Résolution. h est strictement croissante sur $D_h = [-2, +\infty[$ (question 4) : pour x dans D_h, $h(x) \leq h(0)$ équivaut à $x \leq 0$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S = [-2, 0]$.

Exercice 4 5 pts

Une fonction impaire de degré 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 12x$, et sa courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,5 pts

Justifier que f est impaire. Quelle conséquence pour $\mathcal{C}_f$? Calculer $f(2)$ et $f(4)$, puis donner $f(-2)$ et $f(-4)$ sans nouveau calcul.

INDICE

Outil : calcule $f(-x)$ pour tout réel x. **Ensuite :** une fonction impaire vérifie $f(-a) = -f(a)$.

CORRIGÉ

Parité. Pour tout réel x, $-x$ est réel et :

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - 12(-x) \\ &= -x^3 + 12x = -f(x). \end{aligned}$$

Donc f est impaire, et $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine O.

Valeurs. $f(2) = 8 - 24 = -16$ et $f(4) = 64 - 48 = 16$.

Conclusion. Comme f est impaire, $f(-2) = -f(2) = 16$ et $f(-4) = -f(4) = -16$.

2. 1,25 pts

Soit x et y deux réels distincts. On rappelle que :

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2).$$

Vérifier que $\tau(x,y) = x^2+xy+y^2-12$. En déduire le sens de variation de f sur $[0,2]$, puis sur $[2,+\infty[$.

INDICE

Début : utilise l'égalité rappelée. **Ensuite :** sur $[0,2]$, compare chacun des termes x^2, xy et y^2 à 4 ; sur $[2,+\infty[$, fais de même.

CORRIGÉ

Taux. Avec l'égalité rappelée :

$$\begin{aligned} &f(x)-f(y)\\ &=(x^3-y^3)-12(x-y)\\ &=(x-y)(x^2+xy\\ &\quad +y^2-12), \end{aligned}$$

donc $\tau(x,y) = x^2+xy+y^2-12$. Ce taux ne change pas si l'on échange x et y : on peut supposer $x<y$.

Sur $[0,2]$. Soit $0 \le x < y \le 2$. Comme $0 \le x < 2$, $x^2 < 4$; comme $x \ge 0$ et $y \le 2$, $xy \le 2x < 4$; enfin $y^2 \le 4$. Donc $x^2+xy+y^2 < 12$ et $\tau(x,y) < 0$.

Sur $[2,+\infty[$. Soit $2 \le x < y$. Alors $x^2 \ge 4$, $y^2 > 4$ et, comme $y>0$, $xy \ge 2y > 4$. Donc $x^2+xy+y^2 > 12$ et $\tau(x,y) > 0$.

Conclusion. Par le signe du taux, f est strictement décroissante sur $[0,2]$ et strictement croissante sur $[2,+\infty[$.

3. 1 pts

En déduire, à l'aide de la question 1, le sens de variation de f sur $[-2,0]$ et sur $]-\infty,-2]$. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : le lien entre monotonie et parité, appliqué à f impaire : ses variations sur $[-b,-a]$ reproduisent celles observées sur $[a,b]$. **Ensuite :** reporte dans le tableau les valeurs trouvées à la question 1.

CORRIGÉ

Par l'imparité. Une fonction impaire garde son sens de variation d'un intervalle à son opposé. L'opposé de $[0,2]$ est $[-2,0]$ et celui de $[2,+\infty[$ est $]-\infty,-2]$: f est strictement décroissante sur $[-2,0]$ et strictement croissante sur $]-\infty,-2]$.

Recollement. f est strictement décroissante sur $[-2,0]$ et sur $[0,2]$. Si $-2 \leq x < 0 < y \leq 2$, alors $f(x) > f(0) > f(y)$: f est strictement décroissante sur $[-2,2]$.

Conclusion. Le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ se lit ainsi :

- sur $]-\infty,-2]$, f est strictement croissante, jusqu'à $f(-2)=16$;
- sur $[-2,2]$, f est strictement décroissante, de 16 à $f(2)=-16$, en passant par $f(0)=0$;
- sur $[2,+\infty[$, f est strictement croissante.

4. 0,75 pts

Justifier que $f(-2) = 16$ est un maximum local de f. Ce réel est-il le maximum de f sur $\mathbb{R}$? On pourra calculer $f(5)$.

INDICE

Outil : la définition d'un maximum local : trouve un intervalle ouvert J contenant -2 sur lequel $f(x) \leq f(-2)$. **Ensuite :** compare $f(5)$ à 16.

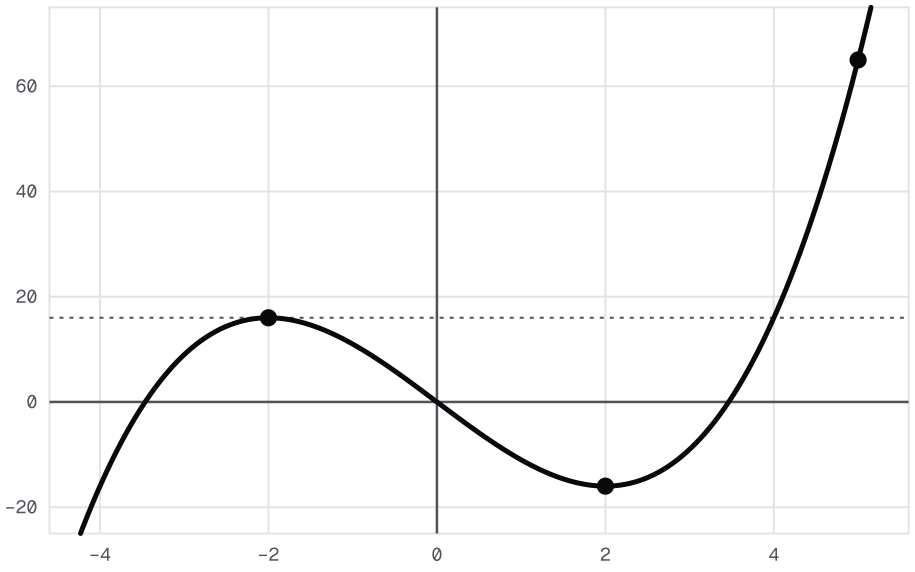
CORRIGÉ

Maximum local. Prenons $J =]-4, 0[$, intervalle ouvert contenant -2. Sur $]-4, -2]$, f est croissante, donc $f(x) \leq f(-2)$; sur $[-2, 0[$, f est décroissante, donc $f(x) \leq f(-2)$. Ainsi :

$$(\forall x \in J) : f(x) \leq 16.$$

Comparaison. $f(5) = 125 - 60 = 65$, et $65 > 16$.

Conclusion. $f(-2) = 16$ est un maximum local de f, mais ce n'est pas le maximum de f sur $\mathbb{R}$: un maximum local n'est pas forcément le maximum sur $\mathbb{R}$.



Courbe de f : x ↦ x³ − 12x : près de −2, aucun point n'est plus haut que (−2, 16), d'où le maximum local 16 ; mais plus à droite, la courbe dépasse la droite d'équation y = 16, par exemple en (5, 65).

5. 1 pts

Vérifier que, pour tout réel x :

$$f(x) - 16 = (x+2)^2(x-4).$$

En déduire que f est majorée par 16 sur $]-\infty, 4]$, puis le maximum de f sur cet intervalle.

INDICE

Début : développe $(x+2)^2(x-4)$. **Ensuite :** étudie le signe de chaque facteur pour $x \leq 4$.

CORRIGÉ

Factorisation. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
&(x+2)^2(x-4) \\
&= (x^2+4x+4)(x-4) \\
&= x^3 - 4x^2 + 4x^2 \\
&\quad - 16x + 4x - 16 \\
&= x^3 - 12x - 16 \\
&= f(x) - 16.
\end{aligned}$$

Majorant. Pour $x \leq 4$, $(x+2)^2 \geq 0$ et $x - 4 \leq 0$, donc $f(x) - 16 \leq 0$. Ainsi :

$$(\forall x \in]-\infty, 4]) : f(x) \leq 16.$$

Conclusion. f est majorée par 16 sur $]-\infty, 4]$. Comme $f(-2) = 16$ et $f(4) = 16$, le maximum de f sur cet intervalle est 16, atteint en -2 et en 4.

6. 0,5 pts

En déduire, à l'aide de l'imparité de f, que $f(x) \geq -16$ pour tout x de $[-4, +\infty[$. Justifier alors que $|f(x)| \leq 16$ pour tout x de $[-4, 4]$.

INDICE

Début : si $x \geq -4$, alors $-x \leq 4$; applique la question 5 au réel $-x$. **Ensuite :** réunis les deux inégalités sur $[-4, 4]$.

CORRIGÉ

Minorant. Soit $x \geq -4$. Alors $-x \leq 4$, donc $f(-x) \leq 16$ d'après la question 5. Or $f(-x) = -f(x)$: $-f(x) \leq 16$, soit $f(x) \geq -16$.

Encadrement. Pour x dans $[-4, 4]$, la question 5 et ce minorant donnent $-16 \leq f(x) \leq 16$.

Conclusion. Pour tout x de $[-4, 4]$, $|f(x)| \leq 16$: f est bornée sur $[-4, 4]$.

Exercice 5 5 pts

Un coût moyen à minimiser

Une entreprise fabrique par jour x centaines d'objets, avec x dans $I =]0, 10]$. Le coût total de fabrication, en milliers de dirhams, est :

$$C(x) = x^2 + 2x + 16.$$

Le coût moyen d'une centaine d'objets est $M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

1. 0,75 pts

Calculer $C(2)$, $C(4)$ et $C(8)$. Vérifier que $M(x) = x + 2 + \dfrac{16}{x}$ pour tout x de I, puis calculer $M(2)$, $M(4)$ et $M(8)$.

INDICE

Outil : divise chaque terme de $C(x)$ par x, ce qui est permis car $x > 0$.

CORRIGÉ

Coûts totaux. $C(2) = 4 + 4 + 16 = 24$, $C(4) = 16 + 8 + 16 = 40$ et $C(8) = 64 + 16 + 16 = 96$.

Coût moyen. Pour x dans I, $x \neq 0$, et l'on divise chaque terme par x :

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{x^2}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{16}{x} \\ &= x + 2 + \frac{16}{x}. \end{aligned}$$

Conclusion. $M(2) = \dfrac{24}{2} = 12$, $M(4) = \dfrac{40}{4} = 10$ et $M(8) = \dfrac{96}{8} = 12$.

2. 1 pts

Vérifier que $M(x) - 10 = \dfrac{(x-4)^2}{x}$ pour tout x de I. En déduire le minimum de M sur I et la production correspondante.

INDICE

Début : réduis $x - 8 + \dfrac{16}{x}$ au même dénominateur. **Ensuite :** étudie le signe du quotient obtenu, puis compare à $M(4)$.

CORRIGÉ

Calcul. Pour tout x de I :

$$\begin{aligned} M(x) - 10 &= x - 8 + \frac{16}{x} \\ &= \frac{x^2 - 8x + 16}{x} \\ &= \frac{(x-4)^2}{x}. \end{aligned}$$

Signe. Pour x dans I, $(x-4)^2 \geq 0$ et $x > 0$: $M(x) - 10 \geq 0$, soit $M(x) \geq 10 = M(4)$.

Conclusion. Le minimum de M sur I est 10, atteint en 4 : le coût moyen le plus bas, 10 milliers de dirhams par centaine, correspond à une production de 400 objets.

3. 1,25 pts

Soit x et y deux réels distincts de I. Vérifier que $\tau(x,y) = 1 - \dfrac{16}{xy}$. En déduire le sens de variation de M sur $]0,4]$, puis sur $[4,10]$.

INDICE

Début : $M(x) - M(y) = (x-y) + 16\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)$. **Ensuite :** compare le produit xy à 16 sur chaque intervalle.

CORRIGÉ

Taux. Pour x et y distincts dans I, $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{y-x}{xy}$. Donc :

$$\begin{aligned} M(x) - M(y) &= (x-y) - \frac{16(x-y)}{xy} \\ &= (x-y)\left(1 - \frac{16}{xy}\right), \end{aligned}$$

et $\tau(x,y) = 1 - \dfrac{16}{xy}$.

Sur $]0,4]$. Pour x et y distincts dans cet intervalle, tous deux strictement positifs, l'un est strictement inférieur à 4 et l'autre au plus égal à 4 : $0 < xy < 16$. Donc $\dfrac{16}{xy} > 1$ et $\tau(x,y) < 0$.

Sur $[4,10]$. Pour x et y distincts dans cet intervalle, l'un est strictement supérieur à 4 et l'autre au moins égal à 4 : $xy > 16$. Donc $0 < \dfrac{16}{xy} < 1$ et $\tau(x,y) > 0$.

Conclusion. Par le signe du taux, M est strictement décroissante sur $]0,4]$ et strictement croissante sur $[4,10]$.

4. 1,25 pts

Une centaine d'objets est vendue 12 milliers de dirhams : la recette est $R(x) = 12x$. Étudier le signe de $R(x) - C(x)$ sur I. En déduire la position de la courbe de C par rapport à la droite d'équation $y = 12x$.

INDICE

Début : écris $R(x) - C(x)$ comme un trinôme et calcule son discriminant. **Ensuite :** un trinôme a le signe de a à l'extérieur de ses racines.

CORRIGÉ

Trinôme. Pour x dans I :

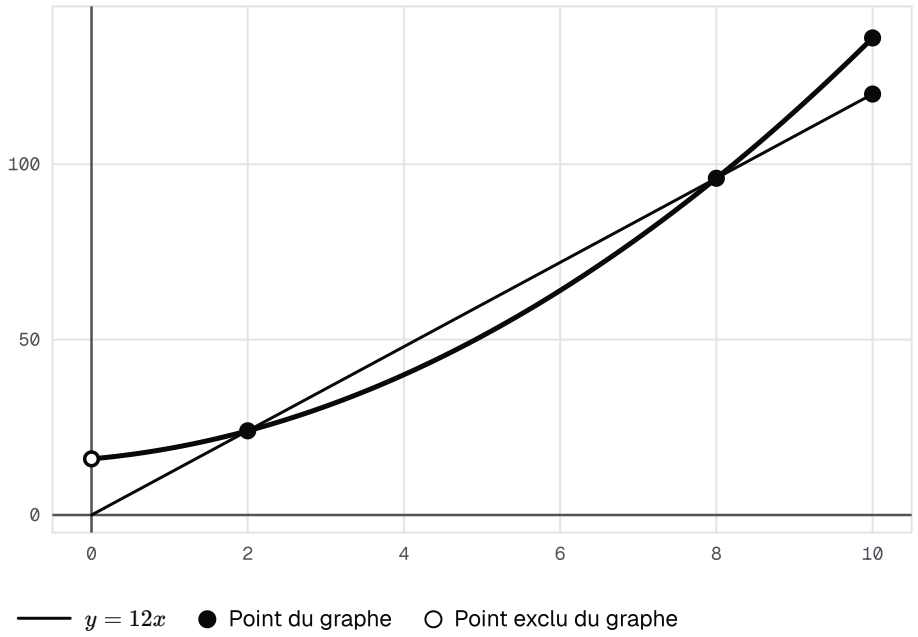
$$\begin{aligned} &R(x) - C(x) \\ &= 12x - x^2 - 2x - 16 \\ &= -x^2 + 10x - 16. \end{aligned}$$

Son discriminant vaut :

$$\begin{aligned} \Delta &= 10^2 - 4 \times (-1) \times (-16) \\ &= 100 - 64 = 36. \end{aligned}$$

Racines et signe. $\sqrt{36} = 6$, donc les racines sont $x_1 = \dfrac{-10 + 6}{-2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-10 - 6}{-2} = 8$. Comme $a = -1 < 0$, pour x dans I : $R(x) - C(x) > 0$ si $2 < x < 8$, $R(x) - C(x) < 0$ si $0 < x < 2$ ou $8 < x \leq 10$, et $R(x) - C(x) = 0$ si $x = 2$ ou $x = 8$.

Conclusion. La courbe de C est strictement au-dessous de la droite d'équation $y = 12x$ sur $]2, 8[$, strictement au-dessus sur $]0, 2[$ et sur $]8, 10]$. Leurs points communs sont $(2, 24)$ et $(8, 96)$.



Coût total C(x) = x² + 2x + 16 et recette R(x) = 12x, en milliers de dirhams, sur]0, 10] : la courbe du coût passe sous la droite de la recette entre les points (2, 24) et (8, 96), au-dessus avant et après.

Borne exclue en x = 0 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 16.

5. 0,75 pts

En déduire l'ensemble des productions x de I pour lesquelles $M(x) \leq 12$. Justifier que $10 \leq M(x) \leq 12$ pour tout x de cet ensemble. La fonction M est-elle bornée sur $[2, 8]$?

INDICE

Début : pour $x > 0$, $M(x) \leq 12$ équivaut à $C(x) \leq 12x$. **Ensuite :** utilise la question 4, puis la question 2.

CORRIGÉ

Inéquation. Pour x dans I, $x > 0$, donc :

$$\begin{aligned} & M(x) \leq 12 \\ \Leftrightarrow\ & C(x) \leq 12x \\ \Leftrightarrow\ & R(x) - C(x) \geq 0. \end{aligned}$$

D'après la question 4, l'ensemble des solutions dans I est $S = [2, 8]$.

Encadrement. Pour x dans $[2, 8]$, $M(x) \leq 12$, et $M(x) \geq 10$ d'après la question 2. Ainsi $10 \leq M(x) \leq 12$.

Conclusion. Les productions cherchées sont celles de $[2, 8]$; sur cet intervalle, $10 \leq M(x) \leq 12$, donc M est minorée et majorée, c'est-à-dire bornée sur $[2, 8]$: le coût moyen ne dépasse pas le prix de vente d'une centaine.