BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Entraînement	7

Exercice 1

Une borne atteinte, l'autre non

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

1.

Calculer $f(x) + 1$. En déduire que f est minorée par -1, puis que -1 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : réduis au même dénominateur ; pour le minimum, cherche un réel a tel que $f(a) = -1$.

2.

Calculer $f(x) - 1$. En déduire que f est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : même calcul qu'à la question 1 ; regarde le signe du numérateur obtenu.

3.

Le réel 1 est-il le maximum de f sur $\mathbb{R}$?

INDICE

Outil : raisonne par l'absurde : suppose qu'un réel a vérifie $f(a) = 1$, et utilise la question 2.

4.

Justifier que f est bornée sur $\mathbb{R}$, et donner un réel $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : rassemble les encadrements des questions 1 et 2.

Exercice 2

Une parabole et une droite

Dans un repère, on considère la parabole $\mathcal{P}$, courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 2$, et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 1$.

1.

On pose $d(x) = f(x) - (x - 1)$. Calculer $d(x)$, puis résoudre l'équation $d(x) = 0$.

INDICE

Outil : le discriminant du trinôme obtenu.

2.

Étudier le signe de $d(x)$, puis en déduire la position relative de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.

INDICE

Outil : ici $a = -1$; le trinôme a le signe de $-a$ entre ses racines.

3.

Donner les coordonnées des points communs à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.

INDICE

Outil : leurs abscisses sont les solutions de $d(x) = 0$; l'ordonnée se lit sur la droite.

4.

Pour x dans $[-1, 3]$, $d(x)$ mesure l'écart vertical entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$. Vérifier que $d(x) = 4 - (x - 1)^2$, puis déterminer l'écart maximal.

INDICE

Outil : développe $(x - 1)^2$; ensuite, compare $d(x)$ à $d(1)$.

Exercice 3

Une fonction paire avec une valeur absolue

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4|x|$.

1.

Justifier que f est paire.

INDICE

Outil : compare $f(-x)$ et $f(x)$, en utilisant $|-x| = |x|$.

2.

Soit x et y deux réels positifs distincts. Vérifier que $\tau(x, y) = x + y - 4$.

INDICE

Outil : pour $x \geq 0$, $|x| = x$; factorise $x^2 - y^2$.

3.

En déduire le sens de variation de f sur $[0, 2]$, puis sur $[2, +\infty[$.

INDICE

Outil : si x et y sont dans $[0, 2]$ et distincts, que peut-on dire de $x + y$?

4.

En déduire les variations de f sur $]-\infty, 0]$. Vérifier que $f(x) + 4 = (|x| - 2)^2$ et conclure sur le minimum de f.

INDICE

Outil : une fonction paire a, sur l'intervalle opposé, le sens de variation contraire ; pour le carré, $x^2 = |x|^2$.

Exercice 4

Le plus grand enclos rectangulaire

Un jardinier dispose de 20 m de grillage pour clore un enclos rectangulaire. On note x la longueur, en mètres, d'un côté de l'enclos, avec $0 < x < 10$, et $A(x)$ son aire en m².

1.

Exprimer la longueur de l'autre côté, puis $A(x)$, en fonction de x. Calculer $A(2)$, $A(5)$ et $A(7)$.

INDICE

Outil : le demi-périmètre vaut 10 m.

2.

Vérifier que $25 - A(x) = (x-5)^2$ pour tout x de $]0, 10[$. En déduire le maximum de A sur $]0, 10[$ et la forme de l'enclos correspondant.

INDICE

Outil : développe les deux membres ; un carré est positif ou nul.

3.

Pour x et y distincts dans $]0, 10[$, vérifier que $\tau(x, y) = 10 - (x + y)$. En déduire le sens de variation de A sur $]0, 5]$ et sur $[5, 10[$.

INDICE

Outil : $A(x) - A(y) = 10(x - y) - (x^2 - y^2)$; mets $x - y$ en facteur.

Exercice 5

Le carré d'un trinôme

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \left(x^2 - 4\right)^2$. On note v la fonction $x \mapsto x^2 - 4$ et c la fonction carré $t \mapsto t^2$.

1.

Écrire h comme une composée de v et c. Rappeler les variations de v sur $[0, +\infty[$ et celles de c sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Outil : pour calculer $h(x)$, on calcule d'abord $x^2 - 4$.

2.

Pour x dans $[0, 2]$, dans quel intervalle se trouve $v(x)$? En déduire le sens de variation de h sur $[0, 2]$.

INDICE

Outil : encadre x^2, puis applique la monotonie d'une composée.

3.

Étudier de même le sens de variation de h sur $[2, +\infty[$.

INDICE

Outil : pour $x \geq 2$, quel est le signe de $v(x)$?

4.

Justifier que h est paire, puis en déduire ses variations sur $]-\infty, 0]$. Calculer $h(0)$, $h(2)$ et $h(-2)$.

INDICE

Outil : une fonction paire a, sur l'intervalle opposé, le sens de variation contraire.

Exercice 6

La fonction cube multipliée par moins cinq

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^3$, et sa courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.

Justifier que f est impaire. Quelle conséquence pour $\mathcal{C}_f$?

INDICE

Outil : calcule $f(-x)$; $(-x)^3 = -x^3$.

2.

Donner le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$, puis calculer $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.

INDICE

Outil : les propriétés de la fonction $x \mapsto ax^3$; quel est le signe de a ?

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-5x^3 \geq -40$.

INDICE

Outil : $-40 = f(2)$; une fonction strictement décroissante renverse les inégalités.

Exercice 7

Un signal en créneau

Un générateur délivre une tension qui vaut alternativement 1 V et -1 V. On la modélise par une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2, telle que $f(x) = 1$ pour $0 \leq x < 1$ et $f(x) = -1$ pour $1 \leq x < 2$.

1.

Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x, $f(x + 2n) = f(x)$.

INDICE

Outil : pour l'hérédité, écris $x + 2(n+1) = (x + 2n) + 2$.

2.

En déduire que $f(x - 2n) = f(x)$ pour tout entier naturel n et tout réel x.

INDICE

Outil : applique la question 1 au réel $y = x - 2n$.

3.

Calculer $f\left(\dfrac{31}{2}\right)$, $f\left(-\dfrac{25}{4}\right)$ et $f\left(\dfrac{41}{2}\right)$.

INDICE

Outil : retranche ou ajoute un multiple de 2 pour revenir dans $[0, 2[$.

4.

Le réel 4 est-il une période de f ? Et le réel 1 ?

INDICE

Outil : pour 4, utilise les questions 1 et 2 avec $n = 2$; pour 1, cherche un contre-exemple.