BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Entraînement	7

Exercice 1

Une borne atteinte, l'autre non

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

1.

Calculer $f(x) + 1$. En déduire que f est minorée par -1, puis que -1 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : réduis au même dénominateur ; pour le minimum, cherche un réel a tel que $f(a) = -1$.

CORRIGÉ

Calcul. Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f(x) + 1 &= \frac{x^2 - 1 + x^2 + 1}{x^2 + 1} \\ &= \frac{2x^2}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Minorant. Le numérateur $2x^2$ est positif ou nul et le dénominateur strictement positif : $f(x) + 1 \geq 0$, soit $f(x) \geq -1$.

Valeur atteinte. De plus, $f(0) = \dfrac{-1}{1} = -1$. Ainsi $f(x) \geq f(0)$ pour tout réel x.

Conclusion. La fonction f est minorée par -1 sur $\mathbb{R}$, et -1 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$, atteint en 0.

2.

Calculer $f(x) - 1$. En déduire que f est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : même calcul qu'à la question 1 ; regarde le signe du numérateur obtenu.

CORRIGÉ

Calcul. Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f(x) - 1 &= \frac{x^2 - 1 - x^2 - 1}{x^2 + 1} \\ &= \frac{-2}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Signe. Le numérateur -2 est strictement négatif, le dénominateur strictement positif : $f(x) - 1 < 0$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) < 1$: la fonction f est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$.

3.

Le réel 1 est-il le maximum de f sur $\mathbb{R}$?

INDICE

Outil : raisonne par l'absurde : suppose qu'un réel a vérifie $f(a) = 1$, et utilise la question 2.

CORRIGÉ

Hypothèse. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe un réel a tel que $f(a) = 1$. Alors $f(a) - 1 = 0$.

Contradiction. D'après la question 2, $f(a) - 1 = \dfrac{-2}{a^2 + 1}$, qui n'est pas nul. Aucun réel n'a donc pour image 1.

Conclusion. Le réel 1 est un majorant de f, mais il n'est pas atteint : ce n'est pas le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

4.

Justifier que f est bornée sur $\mathbb{R}$, et donner un réel $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : rassemble les encadrements des questions 1 et 2.

CORRIGÉ

Bornée. D'après les questions 1 et 2, pour tout réel x :

$$-1 \leq f(x) < 1.$$

La fonction f est minorée et majorée, donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. Cet encadrement donne $-1 \leq f(x) \leq 1$, soit $|f(x)| \leq 1$ pour tout réel x : le réel $M = 1$ convient.

Exercice 2

Une parabole et une droite

Dans un repère, on considère la parabole $\mathcal{P}$, courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 2$, et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 1$.

1.

On pose $d(x) = f(x) - (x - 1)$. Calculer $d(x)$, puis résoudre l'équation $d(x) = 0$.

INDICE

Outil : le discriminant du trinôme obtenu.

CORRIGÉ

Calcul. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} d(x) &= -x^2 + 3x + 2 - x + 1 \\ &= -x^2 + 2x + 3. \end{aligned}$$

Discriminant. Ici $a = -1$, $b = 2$ et $c = 3$:

$$\begin{aligned} \Delta &= 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 \\ &= 4 + 12 = 16. \end{aligned}$$

Ainsi $\Delta > 0$ et $\sqrt{16} = 4$.

Conclusion. L'équation $d(x) = 0$ a deux solutions, $x_1 = \dfrac{-2 + 4}{-2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-2 - 4}{-2} = 3$.

2.

Étudier le signe de $d(x)$, puis en déduire la position relative de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.

INDICE

Outil : ici $a = -1$; le trinôme a le signe de $-a$ entre ses racines.

CORRIGÉ

Signe. Ici $a = -1 < 0$ et les racines sont -1 et 3. Le trinôme a le signe de a à l'extérieur des racines : $d(x) < 0$ pour $x < -1$ ou $x > 3$, et $d(x) > 0$ pour $-1 < x < 3$.

Lecture. Le nombre $d(x) = f(x) - (x - 1)$ compare l'ordonnée du point de $\mathcal{P}$ à celle du point de $\mathcal{D}$ de même abscisse x.

Conclusion. $\mathcal{P}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $[-1, 3]$, et au-dessous sur $]-\infty, -1]$ et sur $[3, +\infty[$.

3.

Donner les coordonnées des points communs à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.

INDICE

Outil : leurs abscisses sont les solutions de $d(x) = 0$; l'ordonnée se lit sur la droite.

CORRIGÉ

Abscisses. Ce sont les solutions de $d(x) = 0$: -1 et 3.

Ordonnées. Sur $\mathcal{D}$, $y = -1 - 1 = -2$, puis $y = 3 - 1 = 2$. Contrôle sur $\mathcal{P}$: $f(-1) = -1 - 3 + 2 = -2$ et $f(3) = -9 + 9 + 2 = 2$.

Conclusion. Les points communs à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont $(-1, -2)$ et $(3, 2)$.



La parabole P de f : x ↦ −x² + 3x + 2 et la droite D d'équation y = x − 1 ont deux points communs, (−1, −2) et (3, 2). Entre eux, P est au-dessus de D.

4.

Pour x dans $[-1, 3]$, $d(x)$ mesure l'écart vertical entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$. Vérifier que $d(x) = 4 - (x-1)^2$, puis déterminer l'écart maximal.

INDICE

Outil : développe $(x-1)^2$; ensuite, compare $d(x)$ à $d(1)$.

CORRIGÉ

Forme canonique. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &4 - (x-1)^2 \\ &= 4 - x^2 + 2x - 1 \\ &= -x^2 + 2x + 3 \\ &= d(x). \end{aligned}$$

Majorant atteint. Pour tout x de $[-1, 3]$, $(x-1)^2 \geq 0$, donc $d(x) \leq 4 = d(1)$, et 1 est dans $[-1, 3]$.

Conclusion. Le maximum de d sur $[-1, 3]$ est 4, atteint en 1 : l'écart vertical maximal vaut 4, pour $x = 1$.

Exercice 3

Une fonction paire avec une valeur absolue

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4|x|$.

1.

Justifier que f est paire.

INDICE

Outil : compare $f(-x)$ et $f(x)$, en utilisant $|-x| = |x|$.

CORRIGÉ

Ensemble. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 : pour tout réel x, $-x$ est réel.

Calcul. Pour tout réel x, comme $|-x| = |x|$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 - 4|-x| \\ &= x^2 - 4|x| = f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. La fonction f est paire.

2.

Soit x et y deux réels positifs distincts. Vérifier que $\tau(x, y) = x + y - 4$.

INDICE

Outil : pour $x \geq 0$, $|x| = x$; factorise $x^2 - y^2$.

CORRIGÉ

Différence. Pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$, $|x| = x$ et $|y| = y$, donc :

$$\begin{aligned} &f(x) - f(y) \\ &= x^2 - y^2 - 4(x - y) \\ &= (x - y)(x + y - 4). \end{aligned}$$

Conclusion. Comme $x \neq y$, on divise par $x - y$: $\tau(x, y) = x + y - 4$.

3.

En déduire le sens de variation de f sur $[0, 2]$, puis sur $[2, +\infty[$.

INDICE

Outil : si x et y sont dans $[0, 2]$ et distincts, que peut-on dire de $x + y$?

CORRIGÉ

Sur $[0, 2]$. Soit x et y distincts dans $[0, 2]$. Les deux sont au plus égaux à 2 et l'un est strictement inférieur à 2 : $x + y < 4$, donc $\tau(x, y) < 0$.

Sur $[2, +\infty[$. De même, pour x et y distincts dans cet intervalle, $x + y > 4$, donc $\tau(x, y) > 0$.

Conclusion. Le signe du taux de variation donne le sens de variation : f est strictement décroissante sur $[0, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

4.

En déduire les variations de f sur $]-\infty, 0]$. Vérifier que $f(x) + 4 = (|x| - 2)^2$ et conclure sur le minimum de f.

INDICE

Outil : une fonction paire a, sur l'intervalle opposé, le sens de variation contraire ; pour le carré, $x^2 = |x|^2$.

CORRIGÉ

Par la parité. L'intervalle opposé à $[0, 2]$ est $[-2, 0]$; celui de $[2, +\infty[$ est $]-\infty, -2]$. Une fonction paire change de sens de variation d'un intervalle à son opposé : f est strictement croissante sur $[-2, 0]$ et strictement décroissante sur $]-\infty, -2]$.

Carré. Pour tout réel x, $x^2 = |x|^2$, donc :

$$\begin{aligned}(|x| - 2)^2 &= |x|^2 - 4|x| + 4 \\ &= f(x) + 4.\end{aligned}$$

Minimum. Ce carré est positif ou nul, donc $f(x) \geq -4$ pour tout réel x. De plus, $f(2) = 4 - 8 = -4$ et, par parité, $f(-2) = -4$.

Conclusion. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est -4, atteint en -2 et en 2.

Exercice 4

Le plus grand enclos rectangulaire

Un jardinier dispose de 20 m de grillage pour clore un enclos rectangulaire. On note x la longueur, en mètres, d'un côté de l'enclos, avec $0 < x < 10$, et $A(x)$ son aire en m².

1.

Exprimer la longueur de l'autre côté, puis $A(x)$, en fonction de x. Calculer $A(2)$, $A(5)$ et $A(7)$.

INDICE

Outil : le demi-périmètre vaut 10 m.

CORRIGÉ

Expression. Deux côtés consécutifs mesurent ensemble la moitié du périmètre, soit 10 m. L'autre côté mesure donc $10 - x$ mètres et, pour tout x de $]0, 10[$, $A(x) = x(10 - x)$.

Conclusion. $A(2) = 2 \times 8 = 16$, $A(5) = 5 \times 5 = 25$ et $A(7) = 7 \times 3 = 21$, en m².

2.

Vérifier que $25 - A(x) = (x - 5)^2$ pour tout x de $]0, 10[$. En déduire le maximum de A sur $]0, 10[$ et la forme de l'enclos correspondant.

INDICE

Outil : développe les deux membres ; un carré est positif ou nul.

CORRIGÉ

Calcul. Pour tout x de $]0, 10[$:

$$\begin{aligned} 25 - A(x) &= 25 - 10x + x^2 \\ &= (x - 5)^2. \end{aligned}$$

Majorant atteint. Ce carré est positif ou nul, donc $A(x) \leq 25 = A(5)$ pour tout x de $]0, 10[$, et 5 est dans cet intervalle.

Conclusion. Le maximum de A sur $]0, 10[$ est 25 m², atteint pour $x = 5$: l'autre côté mesure alors $10 - 5 = 5$ m, et l'enclos est un carré de côté 5 m.

3.

Pour x et y distincts dans $]0,10[$, vérifier que $\tau(x,y) = 10 - (x+y)$. En déduire le sens de variation de A sur $]0,5]$ et sur $[5,10[$.

INDICE

Outil : $A(x) - A(y) = 10(x-y) - (x^2 - y^2)$; mets $x - y$ en facteur.

CORRIGÉ

Taux. Pour x et y distincts dans $]0,10[$:

$$\begin{aligned} &A(x) - A(y) \\ &= 10(x-y) - (x^2 - y^2) \\ &= (x-y)\big(10 - (x+y)\big). \end{aligned}$$

Comme $x \neq y$, $\tau(x,y) = 10 - (x+y)$.

Sur $]0,5]$. Pour x et y distincts dans cet intervalle, l'un est strictement inférieur à 5 : $x + y < 10$, donc $\tau(x,y) > 0$.

Sur $[5,10[$. Ici $x + y > 10$, donc $\tau(x,y) < 0$.

Conclusion. Par le signe du taux, A est strictement croissante sur $]0,5]$ et strictement décroissante sur $[5,10[$, ce qui confirme le maximum en 5.

Exercice 5

Le carré d'un trinôme

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \left(x^2 - 4\right)^2$. On note v la fonction $x \mapsto x^2 - 4$ et c la fonction carré $t \mapsto t^2$.

1.

Écrire h comme une composée de v et c. Rappeler les variations de v sur $[0, +\infty[$ et celles de c sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Outil : pour calculer $h(x)$, on calcule d'abord $x^2 - 4$.

CORRIGÉ

Composée. Pour tout réel x, $h(x) = \left(v(x)\right)^2 = c\big(v(x)\big)$: on applique d'abord v, puis c, donc $h = c \circ v$.

Conclusion. $h = c \circ v$. La fonction v est croissante sur $[0, +\infty[$, comme $x \mapsto x^2$ (retrancher 4 ne change pas le sens). La fonction carré c est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.

2.

Pour x dans $[0, 2]$, dans quel intervalle se trouve $v(x)$? En déduire le sens de variation de h sur $[0, 2]$.

INDICE

Outil : encadre x^2, puis applique la monotonie d'une composée.

CORRIGÉ

Intervalle. Si $0 \leq x \leq 2$, alors $0 \leq x^2 \leq 4$, donc $-4 \leq v(x) \leq 0$: $v(x)$ est dans $]-\infty, 0]$.

Monotonie d'une composée. Sur $[0, 2]$, v est croissante et prend ses valeurs dans $]-\infty, 0]$, où c est décroissante. Les deux sens sont contraires.

Conclusion. La fonction h est décroissante sur $[0, 2]$.

3.

Étudier de même le sens de variation de h sur $[2, +\infty[$.

INDICE

Outil : pour $x \geq 2$, quel est le signe de $v(x)$?

CORRIGÉ

Intervalle. Si $x \geq 2$, alors $x^2 \geq 4$, donc $v(x) \geq 0$: $v(x)$ est dans $[0, +\infty[$.

Monotonie d'une composée. Sur $[2, +\infty[$, v est croissante et prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$, où c est croissante. Les deux sens sont les mêmes.

Conclusion. La fonction h est croissante sur $[2, +\infty[$.

4.

Justifier que h est paire, puis en déduire ses variations sur $]-\infty, 0]$. Calculer $h(0)$, $h(2)$ et $h(-2)$.

INDICE

Outil : une fonction paire a, sur l'intervalle opposé, le sens de variation contraire.

CORRIGÉ

Parité. Pour tout réel x, $-x$ est réel et :

$$\begin{aligned} h(-x) &= \left((-x)^2 - 4\right)^2 \\ &= \left(x^2 - 4\right)^2 = h(x). \end{aligned}$$

La fonction h est paire.

Variations. Une fonction paire change de sens de variation d'un intervalle à son opposé. Comme h est décroissante sur $[0, 2]$ et croissante sur $[2, +\infty[$, elle est croissante sur $[-2, 0]$ et décroissante sur $]-\infty, -2]$.

Valeurs. $h(0) = (-4)^2 = 16$, $h(2) = 0^2 = 0$ et, par parité, $h(-2) = h(2) = 0$.

Conclusion. h est croissante sur $[-2, 0]$ et décroissante sur $]-\infty, -2]$. Comme $h(x) \geq 0$ pour tout réel x, le minimum de h est 0, atteint en -2 et en 2.

Exercice 6

La fonction cube multipliée par moins cinq

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^3$, et sa courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.

Justifier que f est impaire. Quelle conséquence pour $\mathcal{C}_f$?

INDICE

Outil : calcule $f(-x)$; $(-x)^3 = -x^3$.

CORRIGÉ

Parité. Pour tout réel x, $-x$ est réel et, comme $(-x)^3 = -x^3$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= -5(-x)^3 \\ &= 5x^3 = -f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. La fonction f est impaire : sa courbe $\mathcal{C}_f$ admet l'origine O comme centre de symétrie.

2.

Donner le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$, puis calculer $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.

INDICE

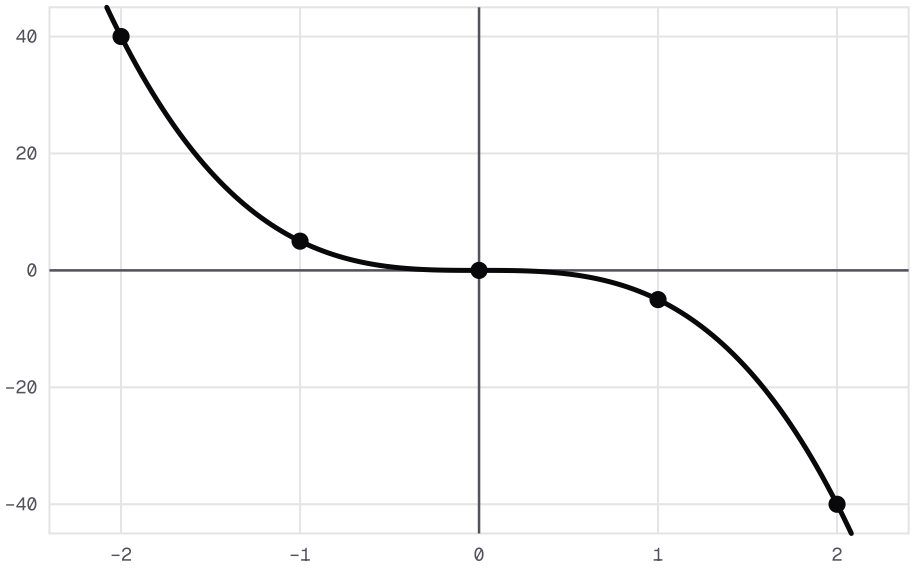
Outil : les propriétés de la fonction $x \mapsto ax^3$; quel est le signe de a ?

CORRIGÉ

Sens de variation. Ici $a = -5 < 0$: les propriétés de $x \mapsto ax^3$ donnent f strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Valeurs. $f(-2) = -5 \times (-8) = 40$, $f(-1) = -5 \times (-1) = 5$, $f(0) = 0$, $f(1) = -5$ et $f(2) = -40$.

Conclusion. f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$; les valeurs calculées décroissent bien, et l'on y lit $f(-x) = -f(x)$.



Courbe de f : x ↦ −5x³, strictement décroissante : elle passe par les points d'abscisses −2, −1, 0, 1 et 2 calculés, d'ordonnées 40, 5, 0, −5 et −40, symétriques deux à deux par rapport à l'origine.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-5x^3 \geq -40$.

INDICE

Outil : $-40 = f(2)$; une fonction strictement décroissante renverse les inégalités.

CORRIGÉ

Réécriture. Comme $f(2) = -40$, l'inéquation s'écrit $f(x) \geq f(2)$.

Décroissance. f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$: elle renverse l'ordre, et $f(x) \geq f(2)$ équivaut à $x \leq 2$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S =]-\infty, 2]$.

Exercice 7

Un signal en créneau

Un générateur délivre une tension qui vaut alternativement 1 V et -1 V. On la modélise par une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2, telle que $f(x) = 1$ pour $0 \leq x < 1$ et $f(x) = -1$ pour $1 \leq x < 2$.

1.

Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x, $f(x + 2n) = f(x)$.

INDICE

Outil : pour l'hérédité, écris $x + 2(n+1) = (x + 2n) + 2$.

CORRIGÉ

Initialisation. Pour $n = 0$, $f(x + 2 \times 0) = f(x)$ pour tout réel x.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $f(x + 2n) = f(x)$ pour tout réel x. Soit x un réel. Par la période 2, puis par l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} & f\big(x + 2(n+1)\big) \\ &= f\big((x + 2n) + 2\big) \\ &= f(x + 2n) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout entier naturel n et tout réel x, $f(x + 2n) = f(x)$.

2.

En déduire que $f(x - 2n) = f(x)$ pour tout entier naturel n et tout réel x.

INDICE

Outil : applique la question 1 au réel $y = x - 2n$.

CORRIGÉ

Changement de variable. Soit x un réel et n un entier naturel. Posons $y = x - 2n$: c'est un réel, et $y + 2n = x$.

Conclusion. D'après la question 1 appliquée à y, $f(y + 2n) = f(y)$, c'est-à-dire $f(x) = f(x - 2n)$, pour tout entier naturel n et tout réel x.

3.

Calculer $f\left(\frac{31}{2}\right)$, $f\left(-\frac{25}{4}\right)$ et $f\left(\frac{41}{2}\right)$.

INDICE

Outil : retranche ou ajoute un multiple de 2 pour revenir dans $[0, 2[$.

CORRIGÉ

Retour au motif. On ajoute ou on retranche un multiple de 2 (questions 1 et 2) :

- $\frac{31}{2} - 14 = \frac{3}{2}$, qui est dans $[1, 2[$;
- $-\frac{25}{4} + 8 = \frac{7}{4}$, qui est dans $[1, 2[$;
- $\frac{41}{2} - 20 = \frac{1}{2}$, qui est dans $[0, 1[$.

Conclusion. $f\left(\frac{31}{2}\right) = -1$, $f\left(-\frac{25}{4}\right) = -1$ et $f\left(\frac{41}{2}\right) = 1$.

4.

Le réel 4 est-il une période de f ? Et le réel 1 ?

INDICE

Outil : pour 4, utilise les questions 1 et 2 avec $n = 2$; pour 1, cherche un contre-exemple.

CORRIGÉ

Le réel 4. Pour tout réel x, $x + 4$ et $x - 4$ sont réels, et la question 1 avec $n = 2$ donne $f(x + 4) = f(x)$. Donc 4 est une période de f.

Le réel 1. Raisonnons par un contre-exemple : $f(0) = 1$, car 0 est dans $[0, 1[$, mais $f(0 + 1) = f(1) = -1$, car 1 est dans $[1, 2[$. L'égalité $f(x + 1) = f(x)$ est fausse pour $x = 0$.

Conclusion. Le réel 4 est une période de f ; le réel 1 n'en est pas une.