BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Application	9

Exercice 1

Encadrer une fraction rationnelle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 + 2}.$$

1.

Justifier que, pour tout réel x :

$$f(x) - 1 = \frac{5}{x^2 + 2}.$$

En déduire que f est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : réduis au même dénominateur, puis regarde le signe du numérateur et celui du dénominateur.

2.

Calculer $f(x) - \dfrac{7}{2}$ et étudier son signe. Que peut-on en conclure ?

INDICE

Outil : le dénominateur commun est $2(x^2 + 2)$; un carré est positif ou nul.

3.

La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}$? Donner un réel $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : rassemble les questions 1 et 2 ; quel est le signe de $f(x)$?

Exercice 2

Un motif de longueur 3

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 3, et, pour $0 \leq x < 3$:

$$f(x) = x(3 - x).$$

1.

Calculer $f(1)$, $f(2)$, $f(7)$, $f(-1)$ et $f\left(\dfrac{17}{2}\right)$.

INDICE

Outil : ajoute ou retranche un multiple de 3 pour te ramener à l'intervalle $[0, 3[$.

2.

On pose $g(x) = 2f(x) - 1$ pour tout réel x. Vérifier que g est périodique de période 3, puis calculer $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

INDICE

Outil : calcule $g(x + 3)$ en utilisant la période de f.

3.

Justifier que $0 \leq f(x) \leq \dfrac{9}{4}$ pour tout x de $[0, 3[$.

INDICE

Outil : sur le motif, écris $\dfrac{9}{4} - x(3 - x)$ comme un carré.

4.

En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$, en utilisant la période.

INDICE

Outil : tout réel se ramène à $[0, 3[$ en ajoutant ou en retranchant un multiple de 3.

Exercice 3

Trois inéquations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les trois inéquations suivantes.

1.

$2x^2 + x - 6 \leq 0.$

INDICE

Outil : calcule Δ, puis les racines ; le trinôme a le signe de a à l'extérieur des racines.

2.

$-x^2 + 2x - 3 < 0.$

INDICE

Outil : si $\Delta < 0$, le trinôme garde le signe de a pour tout réel x.

3.

$9x^2 - 12x + 4 > 0.$

INDICE

Outil : si $\Delta = 0$, le trinôme s'annule en un seul réel ; ailleurs, il a le signe de a.

Exercice 4

Une cubique et une parabole

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2$ et $g(x) = 3x^2 + 2$, de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un repère.

1.

Calculer $f(x) - g(x)$ et l'écrire comme un produit.

INDICE

Outil : les constantes s'éliminent ; mets x^2 en facteur.

2.

Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ selon les valeurs de x.

INDICE

Outil : x^2 est positif ou nul ; il reste le signe de $x - 3$.

3.

En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, ainsi que leurs points communs.

INDICE

Outil : là où $f \leq g$, la courbe de f est au-dessous de celle de g.

Exercice 5

Le taux de variation d'une fonction homographique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$.

1.

Soit x et y deux réels distincts, différents de -3. Vérifier que :

$$f(x) - f(y) = \frac{5(x-y)}{(x+3)(y+3)}.$$

INDICE

Outil : réduis au même dénominateur $(x+3)(y+3)$, puis développe le numérateur.

2.

En déduire le taux de variation $\tau(x, y)$ de f entre x et y.

INDICE

Outil : divise par $x - y$, qui n'est pas nul.

3.

Étudier le sens de variation de f sur $]-3, +\infty[$, puis sur $]-\infty, -3[$.

INDICE

Outil : sur chaque intervalle, $x+3$ et $y+3$ ont le même signe.

4.

La fonction f est-elle croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$? Calculer $f(-4)$ et $f(0)$ pour répondre.

INDICE

Outil : une seule paire de réels bien choisie suffit à réfuter une propriété « pour tous ».

Exercice 6

Lire les extremums à partir des variations

Une fonction f est définie sur $[-4, 5]$. On sait que :

- f est strictement croissante sur $[-4, -1]$, strictement décroissante sur $[-1, 2]$ et strictement croissante sur $[2, 5]$;
- $f(-4) = -2$, $f(-1) = 3$, $f(2) = -5$ et $f(5) = 1$.

1.

Déterminer le maximum de f sur $[-4, 5]$ et la valeur en laquelle il est atteint.

INDICE

Outil : sur chacun des trois intervalles, cherche la plus grande valeur, puis compare.

2.

Déterminer de même le minimum de f sur $[-4, 5]$.

INDICE

Outil : même démarche avec les plus petites valeurs ; compare $f(-4)$ et $f(2)$.

3.

Quels sont le minimum et le maximum de f sur $[2, 5]$?

INDICE

Outil : sur cet intervalle, f est monotone.

4.

Un élève affirme : « $f(x) \leq 4$ pour tout x de $[-4, 5]$, donc 4 est le maximum de f. » A-t-il raison ?

INDICE

Outil : un maximum est une image $f(a)$; existe-t-il un réel a tel que $f(a) = 4$?

Exercice 7

Deux composées, dans les deux ordres

On considère la fonction affine u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2x - 6$, et la fonction racine carrée $r : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0, +\infty[$.

1.

Déterminer l'ensemble de définition et l'expression de $r \circ u$.

INDICE

Outil : il faut x dans $\mathbb{R}$ et $u(x)$ dans $[0, +\infty[$.

2.

Déterminer de même l'ensemble de définition et l'expression de $u \circ r$.

INDICE

Outil : cette fois, on applique d'abord la racine carrée.

3.

Calculer $(r \circ u)(9)$ et $(u \circ r)(9)$. Que constate-t-on ?

INDICE

Outil : remplace x par 9 dans chacune des deux expressions.

4.

On pose $k(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$. Écrire k comme la composée d'un trinôme suivi de la fonction inverse, puis donner son ensemble de définition.

INDICE

Outil : on calcule d'abord $x^2 - 9$, puis on prend l'inverse ; l'inverse n'est pas défini en 0.

Exercice 8

Un axe et un centre, par le calcul

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = \dfrac{4x-1}{x-3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

1.

Vérifier que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe de f.

INDICE

Outil : la propriété de l'axe de symétrie, avec $a = 2$: calcule $f(4 - x)$.

2.

Vérifier que le point $\Omega(3, 4)$ est un centre de symétrie de la courbe de g.

INDICE

Outil : la propriété du centre de symétrie, avec $a = 3$ et $b = 4$: calcule $g(6 - x) + g(x)$.

Exercice 9

La courbe de la racine carrée de x + 7

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x + 7}$, et sa courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.

Donner l'ensemble de définition de f et son sens de variation.

INDICE

Outil : les propriétés de la fonction $x \mapsto \sqrt{x + a}$, ici avec $a = 7$.

2.

Calculer $f(-7)$, $f(-6)$, $f(-3)$ et $f(2)$. Expliquer comment obtenir $\mathcal{C}_f$ à partir de la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$.

INDICE

Outil : la courbe de f est l'image de celle de $x \mapsto \sqrt{x}$ par une translation ; de quel vecteur ?

3.

Résoudre l'inéquation $\sqrt{x + 7} \leq 3$.

INDICE

Outil : $3 = f(2)$; utilise la stricte croissance de f sur D_f.