BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Application	9

Exercice 1

Encadrer une fraction rationnelle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 + 2}.$$

1.

Justifier que, pour tout réel x :

$$f(x) - 1 = \frac{5}{x^2 + 2}.$$

En déduire que f est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : réduis au même dénominateur, puis regarde le signe du numérateur et celui du dénominateur.

CORRIGÉ

Calcul. Soit x un réel. On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} f(x) - 1 &= \frac{x^2 + 7 - (x^2 + 2)}{x^2 + 2} \\ &= \frac{5}{x^2 + 2}. \end{aligned}$$

Signe. Le numérateur 5 est strictement positif et $x^2 + 2 \geq 2 > 0$. Le quotient est donc strictement positif : $f(x) - 1 > 0$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) > 1$: la fonction f est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$.

2.

Calculer $f(x) - \dfrac{7}{2}$ et étudier son signe. Que peut-on en conclure ?

INDICE

Outil : le dénominateur commun est $2(x^2 + 2)$; un carré est positif ou nul.

CORRIGÉ

Calcul. Soit x un réel. Le dénominateur commun est $2(x^2 + 2)$:

$$\begin{aligned} & f(x) - \frac{7}{2} \\ &= \frac{2x^2 + 14 - 7x^2 - 14}{2(x^2 + 2)} \\ &= \frac{-5x^2}{2(x^2 + 2)}. \end{aligned}$$

Signe. Le numérateur $-5x^2$ est négatif ou nul, le dénominateur strictement positif. Donc $f(x) - \dfrac{7}{2} \leq 0$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) \leq \dfrac{7}{2}$: la fonction f est majorée par $\dfrac{7}{2}$ sur $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = \dfrac{7}{2}$, ce majorant est atteint : c'est le maximum de f.

3.

La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}$? Donner un réel $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : rassemble les questions 1 et 2 ; quel est le signe de $f(x)$?

CORRIGÉ

Encadrement. D'après les questions 1 et 2, pour tout réel x :

$$1 < f(x) \leq \frac{7}{2}.$$

La fonction f est minorée et majorée sur $\mathbb{R}$: elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

Valeur absolue. Comme $f(x) > 0$, on a $|f(x)| = f(x) \leq \frac{7}{2}$ pour tout réel x.

Conclusion. La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$, et le réel $M = \frac{7}{2}$ convient.

Exercice 2

Un motif de longueur 3

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 3, et, pour $0 \leq x < 3$:

$$f(x) = x(3 - x).$$

1.

Calculer $f(1)$, $f(2)$, $f(7)$, $f(-1)$ et $f\left(\dfrac{17}{2}\right)$.

INDICE

Outil : ajoute ou retranche un multiple de 3 pour te ramener à l'intervalle $[0, 3[$.

CORRIGÉ

Sur le motif. Les réels 1 et 2 sont dans $[0, 3[$: $f(1) = 1 \times 2 = 2$ et $f(2) = 2 \times 1 = 2$.

Par la période. Comme $7 = 1 + 2 \times 3$, $f(7) = f(1) = 2$. Comme $-1 + 3 = 2$, $f(-1) = f(2) = 2$.

Image de $\dfrac{17}{2}$. On a $\dfrac{17}{2} - 2 \times 3 = \dfrac{5}{2}$, qui est dans $[0, 3[$. Donc :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{17}{2}\right) &= f\left(\frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. $f(1) = f(2) = f(7) = f(-1) = 2$ et $f\left(\dfrac{17}{2}\right) = \dfrac{5}{4}$.

2.

On pose $g(x) = 2f(x) - 1$ pour tout réel x. Vérifier que g est périodique de période 3, puis calculer $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

INDICE

Outil : calcule $g(x + 3)$ en utilisant la période de f.

CORRIGÉ

Période. Soit x un réel. Les réels $x + 3$ et $x - 3$ sont dans $\mathbb{R}$ et, puisque 3 est une période de f :

$$\begin{aligned} g(x + 3) &= 2f(x + 3) - 1 \\ &= 2f(x) - 1 = g(x). \end{aligned}$$

Image. Comme $-\dfrac{1}{2} + 3 = \dfrac{5}{2}$, la question 1 donne $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{5}{4}$. Donc :

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{5}{4} - 1 = \frac{3}{2}.$$

Conclusion. La fonction g est périodique de période 3, et $g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$.

3.

Justifier que $0 \leq f(x) \leq \dfrac{9}{4}$ pour tout x de $[0, 3[$.

INDICE

Outil : sur le motif, écris $\dfrac{9}{4} - x(3-x)$ comme un carré.

CORRIGÉ

Minorant. Soit $x \in [0, 3[$. Alors $x \geq 0$ et $3 - x > 0$: le produit $f(x) = x(3-x)$ est positif ou nul.

Majorant. Pour le même réel x :

$$\begin{aligned} \frac{9}{4} - f(x) &= x^2 - 3x + \frac{9}{4} \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout x de $[0, 3[$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{9}{4}$.

4.

En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$, en utilisant la période.

INDICE

Outil : tout réel se ramène à $[0, 3[$ en ajoutant ou en retranchant un multiple de 3.

CORRIGÉ

Retour au motif. Soit x un réel. En ajoutant ou en retranchant à x un multiple de 3, on obtient un réel x_0 de $[0, 3[$: $x = x_0 + 3k$, avec k entier. Comme 3 est une période de f, $f(x) = f(x_0)$.

Encadrement. D'après la question 3, $0 \leq f(x_0) \leq \dfrac{9}{4}$, donc $0 \leq f(x) \leq \dfrac{9}{4}$.

Conclusion. Pour tout réel x, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{9}{4}$: la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Trois inéquations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les trois inéquations suivantes.

1.

$2x^2 + x - 6 \leq 0.$

INDICE

Outil : calcule Δ, puis les racines ; le trinôme a le signe de a à l'extérieur des racines.

CORRIGÉ

Discriminant. Ici $a = 2, b = 1$ et $c = -6$:

$$\begin{aligned}\Delta &= 1^2 - 4 \times 2 \times (-6) \\ &= 1 + 48 = 49.\end{aligned}$$

Ainsi $\Delta > 0$ et $\sqrt{49} = 7$.

Racines. Le trinôme a deux racines :

$$x_1 = \frac{-1 - 7}{4} = -2,$$
$$x_2 = \frac{-1 + 7}{4} = \frac{3}{2}.$$

Signe. Comme $a = 2 > 0$, le trinôme est négatif entre ses racines et nul en chacune d'elles.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S = \left[-2, \frac{3}{2}\right]$.

2.

$-x^2 + 2x - 3 < 0.$

INDICE

Outil : si $\Delta < 0$, le trinôme garde le signe de a pour tout réel x.

CORRIGÉ

Discriminant. Ici $a = -1, b = 2$ et $c = -3$:

$$\begin{aligned}\Delta &= 2^2 - 4 \times (-1) \times (-3) \\ &= 4 - 12 = -8 < 0.\end{aligned}$$

Signe. Comme $\Delta < 0$, le trinôme ne s'annule pas et garde le signe de $a = -1$: $-x^2 + 2x - 3 < 0$ pour tout réel x.

Conclusion. Tout réel est solution : $S = \mathbb{R}$.

3.

$9x^2 - 12x + 4 > 0$.

INDICE

Outil : si $\Delta = 0$, le trinôme s'annule en un seul réel ; ailleurs, il a le signe de a.

CORRIGÉ

Discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= (-12)^2 - 4 \times 9 \times 4 \\ &= 144 - 144 = 0.\end{aligned}$$

Racine double. Le trinôme s'annule en un seul réel, $-\dfrac{-12}{2 \times 9} = \dfrac{2}{3}$. On vérifie d'ailleurs que $9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2$.

Signe. Comme $a = 9 > 0$, le trinôme est strictement positif pour tout réel $x \neq \dfrac{2}{3}$, et nul en $\dfrac{2}{3}$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

Exercice 4

Une cubique et une parabole

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2$ et $g(x) = 3x^2 + 2$, de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un repère.

1.

Calculer $f(x) - g(x)$ et l'écrire comme un produit.

INDICE

Outil : les constantes s'éliminent ; mets x^2 en facteur.

CORRIGÉ

Différence. Soit x un réel. Les constantes 2 s'éliminent :

$$\begin{aligned} & f(x) - g(x) \\ &= x^3 + 2 - 3x^2 - 2 \\ &= x^3 - 3x^2. \end{aligned}$$

Conclusion. En mettant x^2 en facteur, pour tout réel x :

$$f(x) - g(x) = x^2(x - 3).$$

2.

Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ selon les valeurs de x.

INDICE

Outil : x^2 est positif ou nul ; il reste le signe de $x - 3$.

CORRIGÉ

Signe des facteurs. Le facteur x^2 est positif ou nul, et nul seulement en 0. Le facteur $x - 3$ est négatif pour $x \leq 3$ et positif pour $x \geq 3$.

Conclusion. $f(x) - g(x) \leq 0$ pour $x \leq 3$, et $f(x) - g(x) \geq 0$ pour $x \geq 3$. La différence s'annule en 0 et en 3.

3.

En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, ainsi que leurs points communs.

INDICE

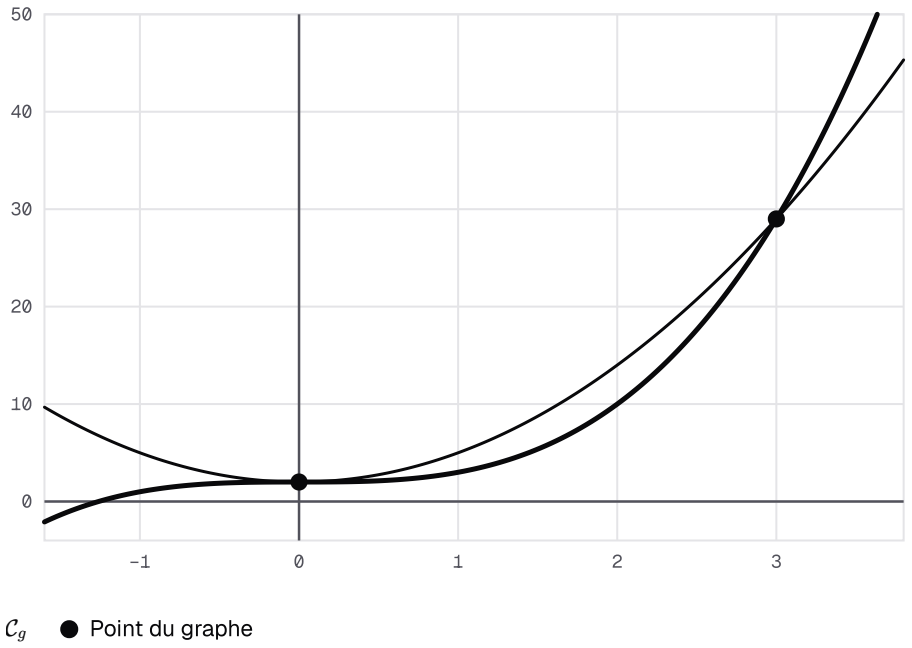
Outil : là où $f \leq g$, la courbe de f est au-dessous de celle de g.

CORRIGÉ

Position. D'après la question 2, $f(x) \leq g(x)$ pour tout x de $]-\infty, 3]$: sur cet intervalle, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$. Pour tout x de $[3, +\infty[$, $f(x) \geq g(x)$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

Points communs. Leurs abscisses sont les réels où la différence s'annule : 0 et 3. Or $f(0) = 2$ et $f(3) = 27 + 2 = 29$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty, 3]$ et au-dessus sur $[3, +\infty[$; les deux courbes ont pour points communs $(0, 2)$ et $(3, 29)$.



Courbes de f : x ↦ x³ + 2 et de g : x ↦ 3x² + 2 : elles se touchent au point (0, 2) et se coupent au point (3, 29). La courbe de f est sous celle de g jusqu'à l'abscisse 3, au-dessus ensuite.

Exercice 5

Le taux de variation d'une fonction homographique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$.

1.

Soit x et y deux réels distincts, différents de -3. Vérifier que :

$$f(x) - f(y) = \frac{5(x-y)}{(x+3)(y+3)}.$$

INDICE

Outil : réduis au même dénominateur $(x+3)(y+3)$, puis développe le numérateur.

CORRIGÉ

Même dénominateur. On réduit au dénominateur $(x+3)(y+3)$:

$$f(x) - f(y) = \frac{N}{(x+3)(y+3)},$$

où $N = (2x+1)(y+3) - (2y+1)(x+3)$.

Numérateur. En développant :

$$\begin{aligned} N &= (2xy + 6x + y + 3) \\ &\quad - (2xy + 6y + x + 3) \\ &= 5x - 5y = 5(x-y). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour x et y distincts, différents de -3 :

$$f(x) - f(y) = \frac{5(x-y)}{(x+3)(y+3)}.$$

2.

En déduire le taux de variation $\tau(x, y)$ de f entre x et y.

INDICE

Outil : divise par $x - y$, qui n'est pas nul.

CORRIGÉ

Division. Comme $x \neq y$, on peut diviser par $x - y$:

$$\begin{aligned} \tau(x,y) &= \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \\ &= \frac{5}{(x+3)(y+3)}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour x et y distincts de $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, le taux de variation de f entre x et y est $\tau(x,y) = \dfrac{5}{(x+3)(y+3)}$.

3.

Étudier le sens de variation de f sur $]-3,+\infty[$, puis sur $]-\infty,-3[$.

INDICE

Outil : sur chaque intervalle, $x+3$ et $y+3$ ont le même signe.

CORRIGÉ

Sur $]-3,+\infty[$**.** Soit x et y distincts dans cet intervalle. Les nombres $x+3$ et $y+3$ sont strictement positifs, donc $\tau(x,y)>0$.

Sur $]-\infty,-3[$**.** Pour x et y distincts dans cet intervalle, $x+3$ et $y+3$ sont strictement négatifs : leur produit est strictement positif, et $\tau(x,y)>0$.

Conclusion. Un taux de variation strictement positif sur un intervalle traduit une fonction strictement croissante sur cet intervalle. Donc f est strictement croissante sur $]-3,+\infty[$ et sur $]-\infty,-3[$.

4.

La fonction f est-elle croissante sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$? Calculer $f(-4)$ et $f(0)$ pour répondre.

INDICE

Outil : une seule paire de réels bien choisie suffit à réfuter une propriété « pour tous ».

CORRIGÉ

Deux images. Raisonnons par un contre-exemple :

$$f(-4)=\frac{-8+1}{-4+3}=7,$$

et $f(0)=\dfrac{1}{3}$.

Comparaison. On a $-4<0$, mais $f(-4)>f(0)$: l'ordre est renversé.

Conclusion. La fonction f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$. Elle est croissante sur chacun des deux intervalles, mais pas sur leur réunion.

Exercice 6

Lire les extremums à partir des variations

Une fonction f est définie sur $[-4, 5]$. On sait que :

- f est strictement croissante sur $[-4, -1]$, strictement décroissante sur $[-1, 2]$ et strictement croissante sur $[2, 5]$;
- $f(-4) = -2$, $f(-1) = 3$, $f(2) = -5$ et $f(5) = 1$.

1.

Déterminer le maximum de f sur $[-4, 5]$ et la valeur en laquelle il est atteint.

INDICE

Outil : sur chacun des trois intervalles, cherche la plus grande valeur, puis compare.

CORRIGÉ

Intervalle par intervalle.

- Sur $[-4, -1]$, f croît : $f(x) \leq f(-1) = 3$.
- Sur $[-1, 2]$, f décroît : $f(x) \leq f(-1) = 3$.
- Sur $[2, 5]$, f croît : $f(x) \leq f(5) = 1 < 3$.

Conclusion. Pour tout x de $[-4, 5]$, $f(x) \leq f(-1)$: le maximum de f sur $[-4, 5]$ est 3, atteint en -1.

2.

Déterminer de même le minimum de f sur $[-4, 5]$.

INDICE

Outil : même démarche avec les plus petites valeurs ; compare $f(-4)$ et $f(2)$.

CORRIGÉ

Intervalle par intervalle.

- Sur $[-4, -1]$, f croît : $f(x) \geq f(-4) = -2$.
- Sur $[-1, 2]$, f décroît : $f(x) \geq f(2) = -5$.
- Sur $[2, 5]$, f croît : $f(x) \geq f(2) = -5$.

Comparaison. Comme $-5 < -2$, on a $f(x) \geq f(2)$ pour tout x de $[-4, 5]$.

Conclusion. Ainsi, le minimum de f sur $[-4, 5]$ est -5, atteint en 2.

3.

Quels sont le minimum et le maximum de f sur $[2, 5]$?

INDICE

Outil : sur cet intervalle, f est monotone.

CORRIGÉ

Monotonie. Sur $[2, 5]$, f est strictement croissante : pour tout x de $[2, 5]$, $f(2) \leq f(x) \leq f(5)$.

Conclusion. Sur $[2, 5]$, le minimum de f est $f(2) = -5$, atteint en 2, et le maximum est $f(5) = 1$, atteint en 5.

4.

Un élève affirme : « $f(x) \leq 4$ pour tout x de $[-4, 5]$, donc 4 est le maximum de f. » A-t-il raison ?

INDICE

Outil : un maximum est une image $f(a)$; existe-t-il un réel a tel que $f(a) = 4$?

CORRIGÉ

Un majorant. Pour tout x de $[-4, 5]$, $f(x) \leq 3 < 4$: le réel 4 est bien un majorant de f.

Pas une valeur atteinte. Un maximum est une image. Or toutes les images sont inférieures ou égales à 3 : aucun réel a de $[-4, 5]$ ne vérifie $f(a) = 4$.

Conclusion. L'élève a tort : 4 est un majorant, mais pas le maximum de f, qui vaut 3.

Exercice 7

Deux composées, dans les deux ordres

On considère la fonction affine u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2x - 6$, et la fonction racine carrée $r : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0, +\infty[$.

1.

Déterminer l'ensemble de définition et l'expression de $r \circ u$.

INDICE

Outil : il faut x dans $\mathbb{R}$ et $u(x)$ dans $[0, +\infty[$.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Le réel $(r \circ u)(x)$ existe lorsque $u(x)$ est dans $[0, +\infty[$, c'est-à-dire lorsque $2x - 6 \geq 0$, soit $x \geq 3$.

Expression. Pour tout $x \geq 3$, $(r \circ u)(x) = r(2x - 6) = \sqrt{2x - 6}$.

Conclusion. L'ensemble de définition de $r \circ u$ est $[3, +\infty[$, et $(r \circ u)(x) = \sqrt{2x - 6}$ sur cet intervalle.

2.

Déterminer de même l'ensemble de définition et l'expression de $u \circ r$.

INDICE

Outil : cette fois, on applique d'abord la racine carrée.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. On calcule d'abord $\sqrt{x}$, qui exige $x \geq 0$; ensuite u est définie sur $\mathbb{R}$. L'ensemble de définition de $u \circ r$ est donc $[0, +\infty[$.

Conclusion. Pour tout $x \geq 0$, $(u \circ r)(x) = u\left(\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x} - 6$.

3.

Calculer $(r \circ u)(9)$ et $(u \circ r)(9)$. Que constate-t-on ?

INDICE

Outil : remplace x par 9 dans chacune des deux expressions.

CORRIGÉ

Calculs. On a $2 \times 9 - 6 = 12$, donc $(r \circ u)(9) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. De plus $\sqrt{9} = 3$, donc $(u \circ r)(9) = 2 \times 3 - 6 = 0$.

Conclusion. Les deux nombres sont différents : les fonctions $r \circ u$ et $u \circ r$ ne sont pas égales. L'ordre de la composition compte.

4.

On pose $k(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$. Écrire k comme la composée d'un trinôme suivi de la fonction inverse, puis donner son ensemble de définition.

INDICE

Outil : on calcule d'abord $x^2 - 9$, puis on prend l'inverse ; l'inverse n'est pas défini en 0.

CORRIGÉ

Décomposition. Posons $v : x \mapsto x^2 - 9$ et $i : t \mapsto \dfrac{1}{t}$, la fonction inverse. Pour obtenir $k(x)$, on calcule $v(x)$, puis son inverse : $k = i \circ v$.

Ensemble de définition. La fonction inverse n'est pas définie en 0 : il faut $x^2 - 9 \neq 0$, soit $x \neq -3$ et $x \neq 3$.

Conclusion. $k = i \circ v$, et l'ensemble de définition de k est $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

Exercice 8

Un axe et un centre, par le calcul

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = \dfrac{4x-1}{x-3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

1.

Vérifier que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe de f.

INDICE

Outil : la propriété de l'axe de symétrie, avec $a = 2$: calcule $f(4 - x)$.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Pour tout réel x, le réel $4 - x$ est dans $\mathbb{R}$.

Calcul. Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f(4-x) &= 3(4-x)^2 \\ &\quad - 12(4-x) + 1 \\ &= 48 - 24x + 3x^2 \\ &\quad - 48 + 12x + 1 \\ &= 3x^2 - 12x + 1 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f(4-x) = f(x)$, avec $4 = 2 \times 2$. D'après la propriété de l'axe de symétrie, la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe de f.

2.

Vérifier que le point $\Omega(3,4)$ est un centre de symétrie de la courbe de g.

INDICE

Outil : la propriété du centre de symétrie, avec $a=3$ et $b=4$: calcule $g(6-x)+g(x)$.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Si $x \neq 3$, alors $6-x \neq 3$: le réel $6-x$ est dans $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Image de $6-x$. Pour $x \neq 3$:

$$\begin{aligned} g(6-x) &= \frac{4(6-x)-1}{6-x-3} \\ &= \frac{23-4x}{3-x} \\ &= \frac{4x-23}{x-3}. \end{aligned}$$

Somme. Pour $x \neq 3$:

$$\begin{aligned} &g(6-x)+g(x) \\ &= \frac{4x-23+4x-1}{x-3} \\ &= \frac{8(x-3)}{x-3} = 8 = 2\times 4. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après la propriété du centre de symétrie, avec $a=3$ et $b=4$, le point $\Omega(3,4)$ est un centre de symétrie de la courbe de g.

Exercice 9

La courbe de la racine carrée de x + 7

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+7}$, et sa courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.

Donner l'ensemble de définition de f et son sens de variation.

INDICE

Outil : les propriétés de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$, ici avec $a = 7$.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Il faut $x + 7 \geq 0$, soit $x \geq -7$: $D_f = [-7, +\infty[$.

Conclusion. D'après les propriétés de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$, ici avec $a = 7$, f est définie sur $[-7, +\infty[$ et y est strictement croissante.

2.

Calculer $f(-7)$, $f(-6)$, $f(-3)$ et $f(2)$. Expliquer comment obtenir $\mathcal{C}_f$ à partir de la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$.

INDICE

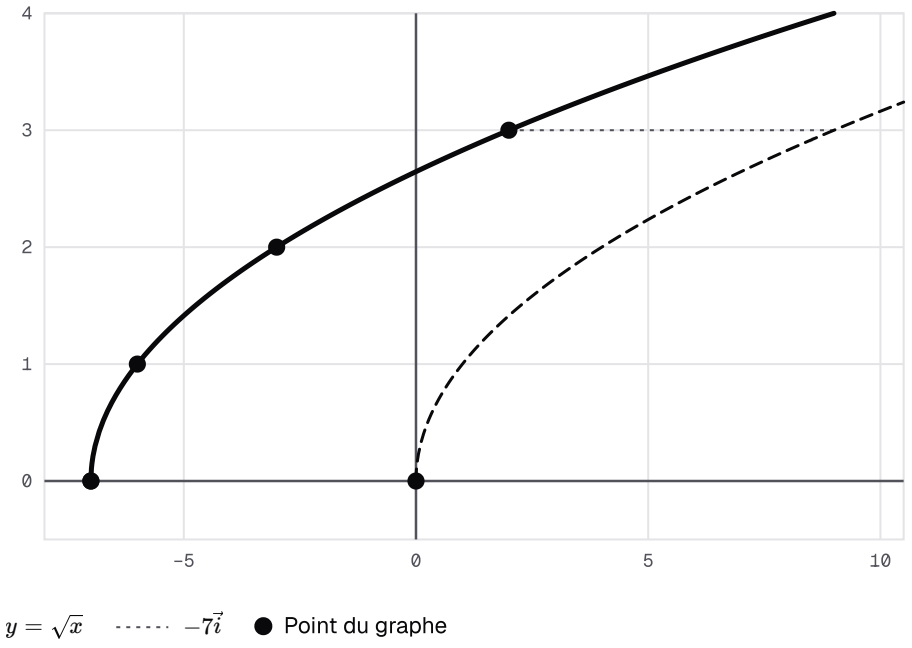
Outil : la courbe de f est l'image de celle de $x \mapsto \sqrt{x}$ par une translation ; de quel vecteur ?

CORRIGÉ

Valeurs. $f(-7) = \sqrt{0} = 0$, $f(-6) = \sqrt{1} = 1$, $f(-3) = \sqrt{4} = 2$ et $f(2) = \sqrt{9} = 3$.

Tracé. La courbe $\mathcal{C}_f$ est l'image de la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ par la translation de vecteur $-7\vec{i}$: chaque point se décale de 7 unités vers la gauche.

Conclusion. Les points $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(4, 2)$ et $(9, 3)$ de la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ deviennent $(-7, 0)$, $(-6, 1)$, $(-3, 2)$ et $(2, 3)$, qui sont sur $\mathcal{C}_f$.



La courbe de f : x ↦ √(x + 7) est l'image de celle de x ↦ √x, en pointillés, par la translation de vecteur −7 i ; elle passe par (−7, 0), (−6, 1), (−3, 2) et (2, 3).

3.

Résoudre l'inéquation $\sqrt{x + 7} \leq 3$.

INDICE

Outil : $3 = f(2)$; utilise la stricte croissance de f sur D_f.

CORRIGÉ

Domaine. L'inéquation n'a de sens que pour $x \geq -7$, c'est-à-dire pour x dans D_f. Comme $3 = f(2)$, elle s'écrit $f(x) \leq f(2)$.

Croissance. La fonction f est strictement croissante sur D_f : pour x dans D_f, $f(x) \leq f(2)$ équivaut à $x \leq 2$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S = [-7, 2]$.