BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/cours

Chapitre	Semestre
Généralités sur les fonctions numériques	Semestre 1

Lire une fonction avant de la tracer

Au laboratoire, tu chauffes un liquide qui part de 20 °C. Un modèle donne sa température, en degrés, après t minutes :

$$\theta(t) = \frac{80t + 20}{t + 1}, \quad t \geq 0.$$

Après une minute, $\theta(1) = 50$. Après trois minutes, $\theta(3) = 65$.

La température monte. Mais monte-t-elle sans fin ?

Devine : Une prédiction

La température de ce liquide atteindra-t-elle 80 °C ?

A. Oui, après quelques minutes.

Faux.

$\theta(9) = 74$: même après neuf minutes, elle reste sous 80 °C.

B. Non, jamais : elle reste sous 80 °C.

Juste.

Juste : $\theta(t) = 80 - \dfrac{60}{t + 1}$, et la fraction retranchée n'est jamais nulle.

C. Oui, et elle finit par dépasser 80 °C.

Faux.

Le calcul de $\theta(t) - 80$ montre que c'est impossible.

D. Elle redescend avant d'atteindre 80 °C.

Faux.

Tu verras que θ ne fait que monter : elle ne redescend jamais.

Correction

On réécrit le numérateur :

$$80t + 20 = 80(t + 1) - 60.$$

Pour tout $t \geq 0$, on en déduit :

$$\theta(t) = 80 - \frac{60}{t + 1}.$$

La fraction $\dfrac{60}{t+1}$ est strictement positive. Donc $\theta(t) < 80$ pour tout $t \geq 0$: ce seuil n'est jamais atteint.

Le nombre 80 est un **plafond** pour cette température, et 20 un plancher. Dans ce chapitre, tu apprends à justifier de tels plafonds et planchers.

Tu étudies aussi le sens de variation d'une fonction et ses valeurs extrêmes. Tu enchaînes enfin deux fonctions, et tu étudies quelques courbes nouvelles.

Tu réutilises le tronc commun : ensemble de définition, parité, second degré, courbes de référence.

Rappels : ensemble de définition, parité, courbes

Ce que tu sais déjà

Rappel du tronc commun. L'ensemble de définition D_f d'une fonction f est l'ensemble des réels qui ont une image.

La fonction f est **paire** si, pour tout x de D_f, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$. Elle est **impaire** si, pour tout x de D_f, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

En repère orthogonal, l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour la courbe d'une fonction paire. L'origine O est un centre de symétrie pour la courbe d'une fonction impaire.

Devine : Paire, impaire ou aucune ?

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3 - 9x$. Que peux-tu dire de sa parité ?

A. Elle est paire.

Faux.
$u(-1) = 8$ et $u(1) = -8$: ces deux images ne sont pas égales.

B. Elle est impaire.

Juste.
Juste : $u(-x) = -x^3 + 9x = -u(x)$.

C. Elle n'est ni paire ni impaire.

Faux.
Calcule $u(-x)$: tu retrouves l'opposé de $u(x)$.

D. Elle est à la fois paire et impaire.

Faux.
Seule la fonction nulle est à la fois paire et impaire ; or $u(1) = -8$.

Correction
Soit x un réel. Alors $-x$ est réel, et :

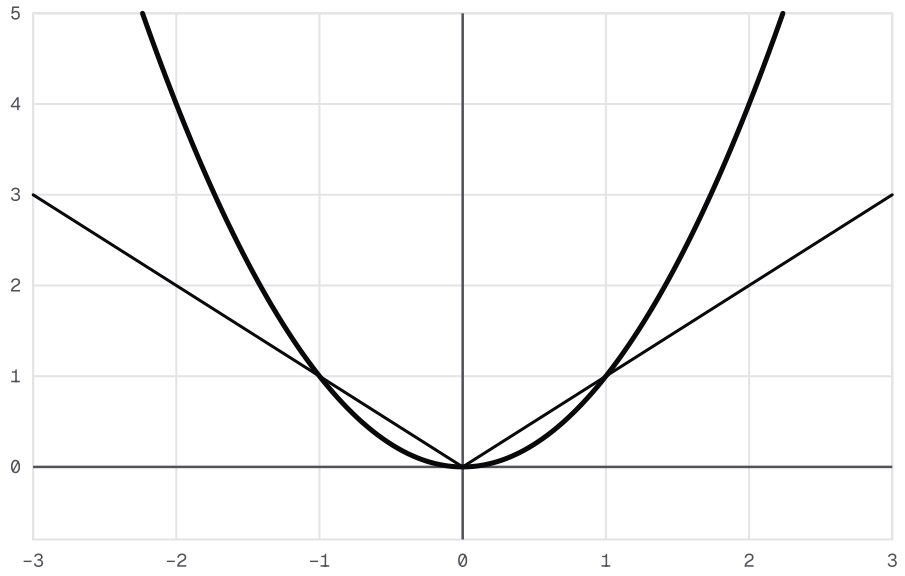
$$\begin{aligned} u(-x) &= (-x)^3 - 9(-x) \\ &= -x^3 + 9x \\ &= -u(x). \end{aligned}$$

Donc u est impaire : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

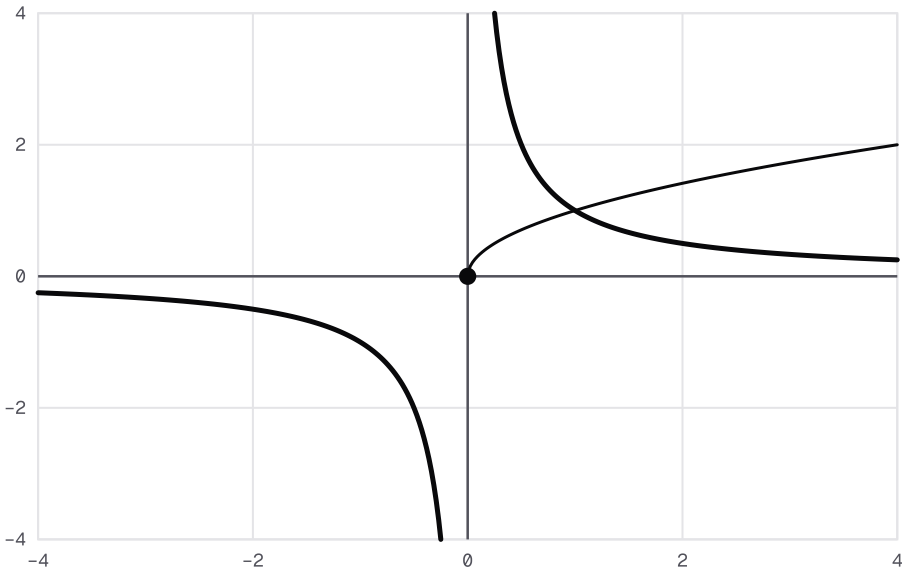
Courbes de référence et un exemple

Rappel du tronc commun. Voici le sens de variation des fonctions de référence.

- $x \mapsto x^2$: décroissante sur $]-\infty, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$;
- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$: strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$;
- $x \mapsto \sqrt{x}$: croissante sur $[0, +\infty[$;
- $x \mapsto |x|$: paire, décroissante sur $]-\infty, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$.



Deux courbes de référence paires : la parabole de x ↦ x² et le V de x ↦ |x|. Chacune descend jusqu'à l'origine puis remonte, et l'axe des ordonnées les partage en deux moitiés qui se correspondent.



Deux autres courbes de référence : l'hyperbole de x ↦ 1/x, qui descend sur chacun de ses deux morceaux, et la courbe de x ↦ √x, qui part de l'origine et monte sur [0, +∞[.

Exemple : ensemble de définition et parité

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$.

Ensemble de définition. Pour tout réel x, $x^2 + 1 \geq 1$: le dénominateur ne s'annule jamais. Donc $D_f = \mathbb{R}$.

Parité. Pour tout réel x, $-x$ est réel et :

$$f(-x) = \frac{3}{(-x)^2+1} = f(x).$$

Conclusion. La fonction f est paire : sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

À toi : Une autre fraction

Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$. Détermine D_g, puis étudie la parité de g. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le dénominateur peut-il s'annuler ? Compare $x^2 + 1$ à 1.
Indice 2
Calcule $g(-x)$ en remplaçant chaque x par $-x$.
Indice 3
Point délicat : $(-x)^2 = x^2$, mais $4 \times (-x) = -4x$; seul le numérateur change de signe.

Réponse

Ensemble de définition. Pour tout réel x, $x^2+1 \geq 1 > 0$, donc $D_g = \mathbb{R}$.

Parité. Pour tout réel x, $-x$ est réel et :

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{-4x}{x^2+1} \\ &= -g(x). \end{aligned}$$

Conclusion. La fonction g est impaire : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

Fonctions majorées, minorées, bornées

Un plafond, un plancher

En clair. Reprends la température du début : pour $t \geq 0$,

$$\theta(t) = 80 - \frac{60}{t+1}.$$

Elle ne dépasse jamais 80 : c'est un **plafond**. Elle ne descend jamais sous 20 : c'est un **plancher**.

Un même nombre convient pour **toutes** les valeurs de t. La définition qui suit rend cette idée précise.

Devine : Un plafond pour une fraction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$. Lequel de ces nombres est un plafond pour toutes les valeurs de $f(x)$?

A. 0

Faux.
Toutes les valeurs sont strictement positives : 0 est un plancher, pas un plafond.

B. 1

Faux.
$f(0) = 3$ dépasse 1.

C. 2

Faux.
$f(0) = 3$ dépasse 2.

D. 3

Juste.
Juste : $x^2+1 \geq 1$, donc $f(x) \leq 3$.

Correction
Pour tout réel x, $x^2+1 \geq 1$. En divisant 3 par un nombre au moins égal à 1, on obtient au plus 3 :

$$f(x) \leq 3.$$

L'égalité a lieu pour $x = 0$. Les nombres 1 et 2 ne conviennent pas, car $f(0) = 3$.

Définition : Fonction majorée, minorée, bornée

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f, et I un intervalle inclus dans D_f.

- f est **majorée** sur I s'il existe un réel M tel que $(\forall x \in I) : f(x) \leq M$. Le réel M est un **majorant** de f sur I.
- f est **minorée** sur I s'il existe un réel m tel que $(\forall x \in I) : f(x) \geq m$. Le réel m est un **minorant** de f sur I.
- f est **bornée** sur I si elle est à la fois majorée et minorée sur I.

Exemple : une fonction bornée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$.

Majorant. Pour tout réel x, on réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} f(x) - 3 &= \frac{3 - 3(x^2+1)}{x^2+1} \\ &= \frac{-3x^2}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Le numérateur est négatif ou nul, le dénominateur strictement positif : ce quotient est négatif ou nul. Donc :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \leq 3$$

Minorant. Pour tout réel x, $f(x)$ est le quotient de deux nombres strictement positifs : $f(x) > 0$, donc $f(x) \geq 0$.

Conclusion. La fonction f est majorée par 3 et minorée par 0 : elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

Un piège et la méthode

Attention : un majorant est un nombre fixe

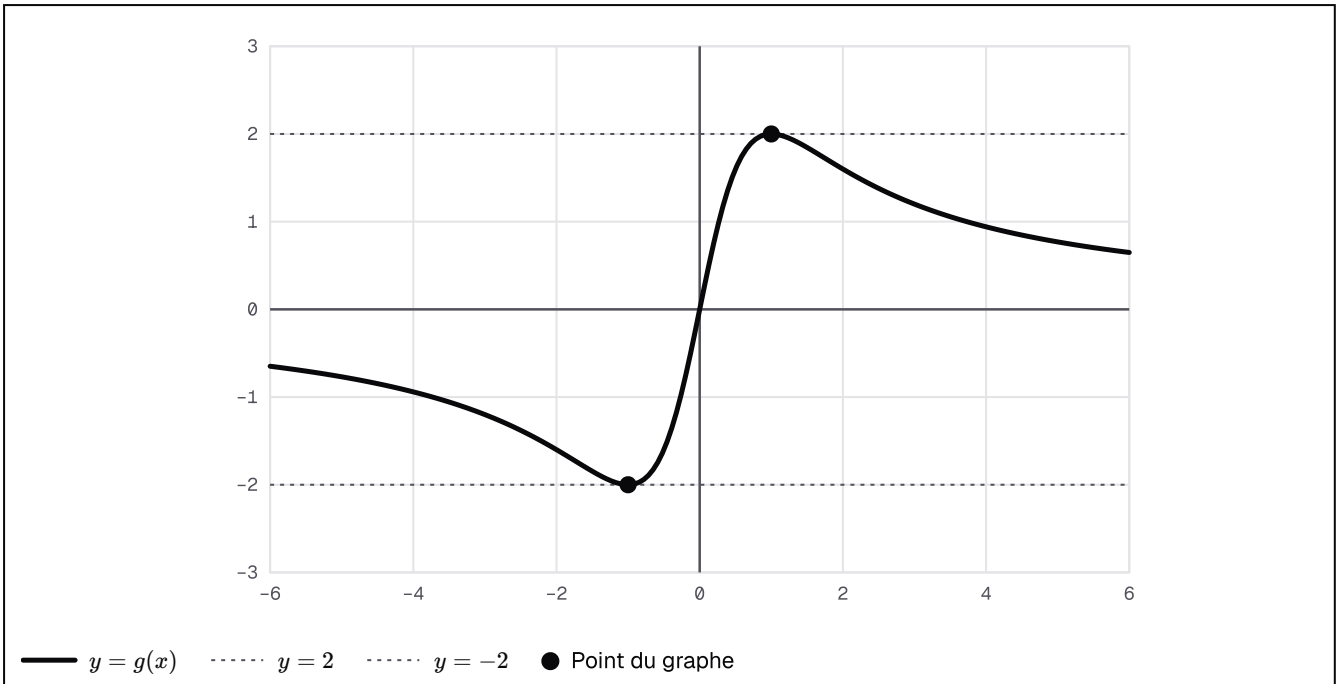
✗ « Pour tout réel x, $x^2 \leq x^2 + 1$. Donc $x \mapsto x^2$ est majorée par $x^2 + 1$. »

✓ Le nombre $x^2 + 1$ change avec x : ce n'est pas un majorant. On écrit d'abord « il existe M », puis « pour tout x ».

Ici, aucun M ne convient. Par un contre-exemple : pour tout réel M, le réel $x = |M| + 1$ vérifie $x^2 \geq x > M$.

Méthode : montrer qu'une fonction est majorée ou minorée

1. **Propose** un majorant M : lis la courbe, ou calcule quelques valeurs.
2. **Écris** la différence $f(x) - M$ avec un seul dénominateur.
3. **Étudie** son signe pour **tout** x de l'intervalle : carré, quotient de nombres positifs, signe d'un trinôme.
4. **Conclus** : $f(x) - M \leq 0$ donne $f(x) \leq M$. Pour un minorant m, montre que $f(x) - m \geq 0$.



Lire un majorant et un minorant sur la courbe de g : x ↦ 4x/(x² + 1). Elle ne monte jamais au-dessus de la droite d'équation y = 2, ni ne descend sous celle d'équation y = −2 ; on propose donc M = 2 et m = −2, puis on le démontre.

Un encadrement $m \leq f(x) \leq M'$ utilise deux nombres. Peut-on le remplacer par un seul ?

Pour la température, $20 \leq \theta(t) < 80$ donne $|\theta(t)| \leq 80$.

Pourquoi est-ce vrai ? On choisit un nombre M plus grand que $|m|$ et que $|M'|$. Alors $f(x)$ reste entre $-M$ et M.

Avec une valeur absolue

Propriété : Fonction bornée et valeur absolue

Soit f une fonction numérique et I un intervalle inclus dans D_f. La fonction f est bornée sur I si et seulement s'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$(\forall x \in I) : |f(x)| \leq M.$$

Démonstration

Étape 1. Supposons f bornée sur I : il existe deux réels m et M' tels que $m \leq f(x) \leq M'$ pour tout x de I. On pose $M = |m| + |M'| + 1$; ce réel est strictement positif.

Étape 2. Pour tout x de I : $f(x) \leq M' \leq |M'| < M$ et $f(x) \geq m \geq -|m| > -M$. Donc $-M < f(x) < M$, d'où $|f(x)| \leq M$.

Étape 3. Réciproquement, supposons $|f(x)| \leq M$ pour tout x de I. Alors $-M \leq f(x) \leq M$: la fonction f est majorée par M et minorée par $-M$ sur I, donc bornée sur I.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour passer d'un encadrement à une valeur absolue, on prend un nombre **plus grand que les deux bornes en valeur absolue**. La preuve choisit $M = |m| + |M'| + 1$, qui est strictement positif.

Dans l'autre sens, $|f(x)| \leq M$ s'écrit $-M \leq f(x) \leq M$. On y lit directement un minorant et un majorant.

Vérifie : Un réel qui encadre la valeur absolue

On sait que $-3 \leq f(x) \leq 5$ pour tout x de I. Quel réel $M > 0$ vérifie $|f(x)| \leq M$ pour tout x de I ?

A. $M = 3$
Faux.
$f(x)$ peut aller jusqu'à 5, qui dépasse 3.

B. $M = 5$
Juste.
Juste : $-5 \leq -3 \leq f(x) \leq 5$.

C. $M = -3$
Faux.
M doit être strictement positif.

D. $M = 2$
Faux.
2 est plus petit que 5 : $f(x)$ peut dépasser 2.

Correction
On prend un nombre au moins égal à $|-3| = 3$ et à $|5| = 5$: $M = 5$ convient, tout réel supérieur aussi.

En effet, pour tout x de I :

$$-5 \leq -3 \leq f(x) \leq 5,$$

ce qui s'écrit $|f(x)| \leq 5$.

Exemple : une valeur absolue, puis un contre-exemple

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$.

Une inégalité. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & x^2 + 1 - 2|x| \\ &= |x|^2 - 2|x| + 1 \\ &= (|x| - 1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Donc $4|x| \leq 2(x^2+1)$. En divisant par $x^2+1 > 0$, on obtient $|g(x)| \leq 2$.

Conclusion. D'après la caractérisation d'une fonction bornée par la valeur absolue, g est bornée sur $\mathbb{R}$, avec $-2 \leq g(x) \leq 2$ pour tout réel x.

Un contre-exemple. La fonction $x \mapsto 4x$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $M > 0$, le réel $x = M$ donne $|4M| = 4M > M$.

À toi : La température est bornée

Pour $t \geq 0$, $\theta(t) = \dfrac{80t + 20}{t+1}$. Montre que $20 \leq \theta(t) \leq 80$. Déduis-en un réel $M > 0$ tel que $|\theta(t)| \leq M$ pour tout $t \geq 0$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Applique la méthode : écris $\theta(t) - 20$ et $\theta(t) - 80$ avec le dénominateur $t+1$.

Indice 2

Pour $t \geq 0$, le dénominateur $t+1$ est strictement positif.

Indice 3

Point délicat : un majorant ne dépend pas de t ; le nombre 80 convient pour toutes les valeurs de t à la fois.

Réponse

Soit $t \geq 0$. Le dénominateur $t+1$ est strictement positif.

Minorant. On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} & \theta(t) - 20 \\ &= \frac{80t + 20 - 20t - 20}{t+1} \\ &= \frac{60t}{t+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Majorant. De même :

$$\theta(t) - 80 = \frac{-60}{t+1} < 0.$$

Donc $20 \leq \theta(t) \leq 80$: θ est bornée sur $[0, +\infty[$.

Valeur absolue. Comme $-80 \leq 20$, on a $-80 \leq \theta(t) \leq 80$, soit $|\theta(t)| \leq 80$.

Conclusion. Le réel $M = 80$ convient pour tout $t \geq 0$.

Fonctions périodiques

Un motif qui se répète

En clair. Au repos, ton cœur bat à un rythme régulier. Sur un électrocardiogramme, le même motif revient à intervalles égaux. Connaître un seul motif suffit alors pour connaître tout le tracé.

En mathématiques, on décrit ce motif sur un intervalle, puis on le répète. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = |x|$ pour tout x de $[-1, 1]$;
- $f(x + 2) = f(x)$ pour tout réel x.

Devine : Une image hors du motif

Avec cette fonction f, que vaut $f(3)$?

A. 3
Faux.
3 est hors de $[-1, 1]$: la formule $|x|$ ne s'applique pas en 3.

B. 0
Faux.
$f(0) = 0$, mais on passe de 0 à 3 en ajoutant 3, qui n'est pas un multiple de 2.

C. 1
Juste.
Juste : $f(3) = f(1 + 2) = f(1) = 1$.

D. -1
Faux.
Une valeur absolue n'est jamais négative : f ne prend que des valeurs positives.

Correction
On a $3 = 1 + 2$. La relation donne :

$$f(3) = f(1 + 2) = f(1).$$

Or $1 \in [-1, 1]$, donc $f(1) = |1| = 1$. Ainsi $f(3) = 1$.

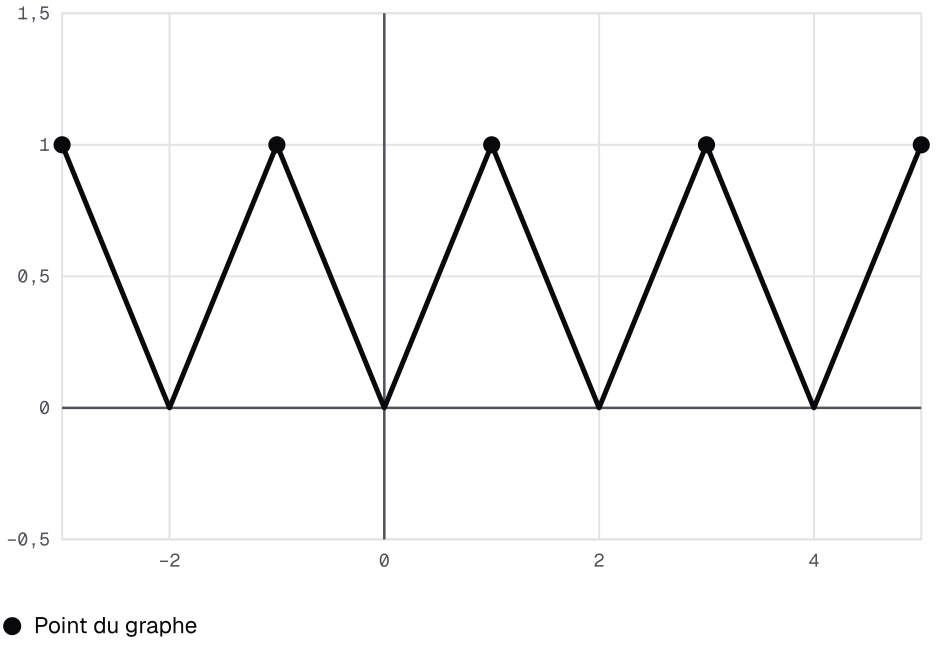
Définition : Fonction périodique

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f, et T un réel strictement positif. On dit que f est **périodique de période** T si, pour tout x de D_f :

$$x + T \in D_f, \quad x - T \in D_f \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x).$$

Graphiquement, la courbe $\mathcal{C}_f$ est alors inchangée par la translation de vecteur $T\vec{i}$: il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur T, puis de reproduire ce motif par translations.

Tracer le motif, puis le recopier



Un motif en V recopié tous les 2

Méthode : utiliser une période

1. **Vérifie** que $f(x+T) = f(x)$ pour tout x de D_f, avec $x+T$ et $x-T$ dans D_f.
2. **Trace** la courbe sur un intervalle de longueur T : c'est le motif.
3. **Recopie** ce motif par des translations de vecteurs $T\vec{i}$ et $-T\vec{i}$.
4. **Calcule** une image éloignée : ajoute ou retranche un multiple de T pour revenir dans le motif.

Images éloignées, puis à toi

Exemple : une image éloignée

En appliquant quatre fois la relation $f(x+2) = f(x)$, on obtient $f(x+8) = f(x)$ pour tout réel x. Donc :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{15}{2}\right) &= f\left(\frac{15}{2} - 8\right) \\ &= f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

De même, en appliquant dix fois la relation :

$$\begin{aligned} f(20) &= f(0 + 10 \times 2) \\ &= f(0) = 0. \end{aligned}$$

Pour aller vite, retranche le multiple de 2 qui ramène dans $[-1, 1]$.

Vérifie : Une autre période ?

La fonction f est-elle aussi périodique de période 4 ?

A. Oui : $f(x + 4) = f(x)$ pour tout réel x.

Juste.

Juste : $f(x + 4) = f\big((x + 2) + 2\big) = f(x + 2) = f(x)$.

B. Non : une fonction n'a qu'une seule période.

Faux.

La relation, appliquée deux fois, donne $f(x + 4) = f(x)$.

C. Non : le motif est de longueur 2, pas 4.

Faux.

Un intervalle de longueur 4 contient deux motifs : il se répète aussi.

D. Seulement pour les x compris entre -1 et 1.

Faux.

La relation vaut pour tout réel x : on peut l'appliquer deux fois partout.

Correction

Soit x un réel. La relation appliquée à $x + 2$ donne $f(x + 4) = f(x + 2)$. Appliquée à x, elle donne $f(x + 2) = f(x)$. Donc :

$$f(x + 4) = f(x).$$

Ainsi 4 est aussi une période. De même, 6 et 8 sont des périodes de f.

Pour un multiple quelconque $2n$, avec n entier naturel non nul, on procède de proche en proche : c'est un raisonnement par récurrence, que tu écriras dans les exercices.

À toi : Calculer avec le motif

Calcule $f(9)$ et $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)$. Donne ensuite les réels x de $[0, 6]$ tels que $f(x) = 0$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Ajoute ou retranche un multiple de 2 pour revenir dans $[-1, 1]$.

Indice 2

Dans $[-1, 1]$, $f(x) = 0$ seulement pour $x = 0$.

Indice 3

Point délicat : $9 - 10 = -1$; dans le motif, $f(-1) = |-1| = 1$, et non -1.

Réponse

Image de 9. On retranche $10 = 5 \times 2$:

$$\begin{aligned} f(9) &= f(9 - 10) \\ &= f(-1) = 1. \end{aligned}$$

Image de $-\dfrac{5}{2}$. On ajoute 2 :

$$\begin{aligned} & f\left(-\frac{5}{2}\right) \\ &= f\left(-\frac{5}{2} + 2\right) \\ &= f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Annulations. Dans le motif $[-1, 1]$, f ne s'annule qu'en 0. Par des translations de vecteurs $2\,\vec{i}$, les réels de $[0, 6]$ où f s'annule sont 0, 2, 4 et 6.

Reprise : équation et signe du trinôme

L'équation du second degré

Rappel du tronc commun. Pour comparer deux fonctions ou trouver un extremum, tu étudies le signe d'une différence. Dans ce chapitre, cette différence est parfois un **trinôme** $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Sa forme canonique donne ses racines et son signe. Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ résume ce calcul.

Devine : Combien de solutions ?

Combien de solutions réelles a l'équation $-x^2 + 4x - 5 = 0$?

A. Deux solutions distinctes.

Faux.

Calcule le discriminant : il est négatif.

B. Une seule solution.

Faux.

Il faudrait un discriminant nul ; or $\Delta = -4$.

C. Aucune solution.

Juste.

Juste : $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$.

D. Une infinité de solutions.

Faux.

Un trinôme a au plus deux racines.

Correction

Ici $a = -1$, $b = 4$ et $c = -5$. Donc :

$$\begin{aligned}\Delta &= 4^2 - 4 \times (-1) \times (-5) \\ &= 16 - 20 = -4.\end{aligned}$$

Le discriminant est strictement négatif : l'équation n'a aucune solution réelle.

La forme canonique le confirme : pour tout réel x,

$$\begin{aligned}-x^2 + 4x - 5 &= -(x-2)^2 - 1 \\ &\leq -1.\end{aligned}$$

Propriété : Équation du second degré

Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$:

- n'a aucune solution si $\Delta < 0$;
- a une seule solution, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, si $\Delta = 0$;
- a deux solutions distinctes, $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, si $\Delta > 0$; dans ce cas, pour tout réel x, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Démonstration

Idée de la preuve. On écrit la forme canonique du trinôme, obtenue en complétant le carré (calcul du tronc commun, non détaillé ici) :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Comme $a \neq 0$, l'équation équivaut à $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$. Un carré n'est jamais strictement négatif : si $\Delta < 0$, il n'y a aucune solution ; si $\Delta = 0$, il y en a une seule. Si $\Delta > 0$, le membre de droite est le carré de $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, ce qui donne les deux solutions x_1 et x_2. La factorisation se vérifie en développant ; ce développement est omis.

Exemple : deux racines

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Discriminant. On calcule :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 \\ &= 25 - 16 = 9 > 0.\end{aligned}$$

Solutions. Le discriminant est strictement positif : l'équation a deux solutions,

$$x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2},$$
$$x_2 = \frac{5+3}{4} = 2.$$

Factorisation. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &2x^2 - 5x + 2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) \\ &= (2x-1)(x-2). \end{aligned}$$

Contrôle. $2 \times 2^2 - 5 \times 2 + 2 = 0$.

Le signe du trinôme

Propriété : Signe du trinôme

Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout réel x.
- Si $\Delta = 0$, il est du signe de a pour tout réel $x \neq -\frac{b}{2a}$, et il s'annule en $-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, on note $\alpha < \beta$ ses deux racines : il est du signe de a pour $x < \alpha$ et pour $x > \beta$, du signe de $-a$ pour $\alpha < x < \beta$, et il s'annule en α et en β.

Démonstration

Idée de la preuve. On divise le trinôme par a : d'après la forme canonique,

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Si $\Delta \leq 0$, ce nombre est une somme de deux termes positifs ou nuls ; il n'est nul que si $\Delta = 0$ et $x = -\frac{b}{2a}$. Le trinôme a donc le signe de a. Si $\Delta > 0$, le quotient vaut $(x-\alpha)(x-\beta)$; son signe se lit dans un tableau de signes des deux facteurs, qui n'est pas détaillé ici. On multiplie enfin par a.

Exemple : un tableau de signes

Reprends $2x^2 - 5x + 2$, de racines $\frac{1}{2}$ et 2, avec $a = 2 > 0$. D'après le signe du trinôme, il est positif hors des racines et négatif entre elles.

Donc l'inéquation $2x^2 - 5x + 2 \leq 0$ a pour ensemble de solutions :

$$S = \left[\frac{1}{2}, 2\right].$$

Pour $-x^2+4x-5$, on a $\Delta<0$ et $a=-1$: ce trinôme est strictement négatif pour tout réel x.

Signe du trinôme de l'exemple

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2-5x+2$		+	0	−	0	+	

Méthode, piège, à toi

Méthode : résoudre une inéquation du second degré

1. **Ramène** l'inéquation à la forme $ax^2+bx+c>0$, ou avec $\geq$, $<$, $\leq$.
2. **Calcule** Δ, puis les racines s'il y en a.
3. **Dresse** le tableau de signes : signe de a hors des racines, signe contraire entre elles.
4. **Lis** les solutions, racines comprises ou non selon l'inégalité.

Attention : regarde le signe de a

✗ « Pour $-x^2+4x-5$, on a $\Delta<0$, donc le trinôme est positif pour tout x. »

✓ Quand $\Delta<0$, le trinôme a le **signe de** a. Ici $a=-1$: le trinôme est strictement négatif pour tout réel x. Contrôle : en $x=0$, il vaut -5.

À toi : Une inéquation

Résous l'inéquation $-x^2+4x-5\geq-2$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Ramène tout dans le membre de gauche : $-x^2+4x-3\geq0$.
Indice 2
Calcule Δ et les racines de $-x^2+4x-3$.
Indice 3
Point délicat : ici $a=-1<0$; le trinôme est positif **entre** ses racines.

Réponse
On ramène tout dans le membre de gauche. L'inéquation équivaut à :

$$-x^2+4x-3\geq0.$$

Racines. Ici $\Delta=16-12=4$, et les racines sont :

$$x_1=\frac{-4+2}{-2}=1,$$

$$x_2 = \frac{-4-2}{-2} = 3.$$

Signe. Comme $a = -1 < 0$, d'après le signe du trinôme, il est positif ou nul entre ses racines.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $[1, 3]$.

Comparer deux fonctions

Quelle courbe est au-dessus ?

En clair. Trace la parabole $y = x^2$ et la droite $y = x + 2$. Pour $x = 0$, la droite est plus haute : $0 < 2$. Pour $x = 3$, c'est la parabole : $9 > 5$. Comparer deux fonctions, c'est savoir laquelle est au-dessus, et sur quel intervalle.

Devine : Une position qui change

On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x + 2$. Que peux-tu dire de leurs courbes sur $\mathbb{R}$?

A. Leur position change : aucune n'est toujours au-dessus.
Juste.
Juste : les deux courbes se croisent, en deux points.

B. La parabole est toujours au-dessus de la droite.
Faux.
En $x = 0$, $f(0) = 0 < 2 = g(0)$.

C. La droite est toujours au-dessus de la parabole.
Faux.
En $x = 3$, $f(3) = 9 > 5 = g(3)$.

D. Les deux courbes ne se coupent jamais.
Faux.
En $x = 2$, $f(2) = 4 = g(2)$: elles ont un point commun.

Correction
D'une part, $f(0) = 0 < g(0) = 2$. D'autre part, $f(3) = 9 > g(3) = 5$.

Aucune courbe n'est toujours au-dessus de l'autre. Tu vas voir que $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ entre -1 et 2, et au-dessus ailleurs.

Définition : Comparaison de deux fonctions

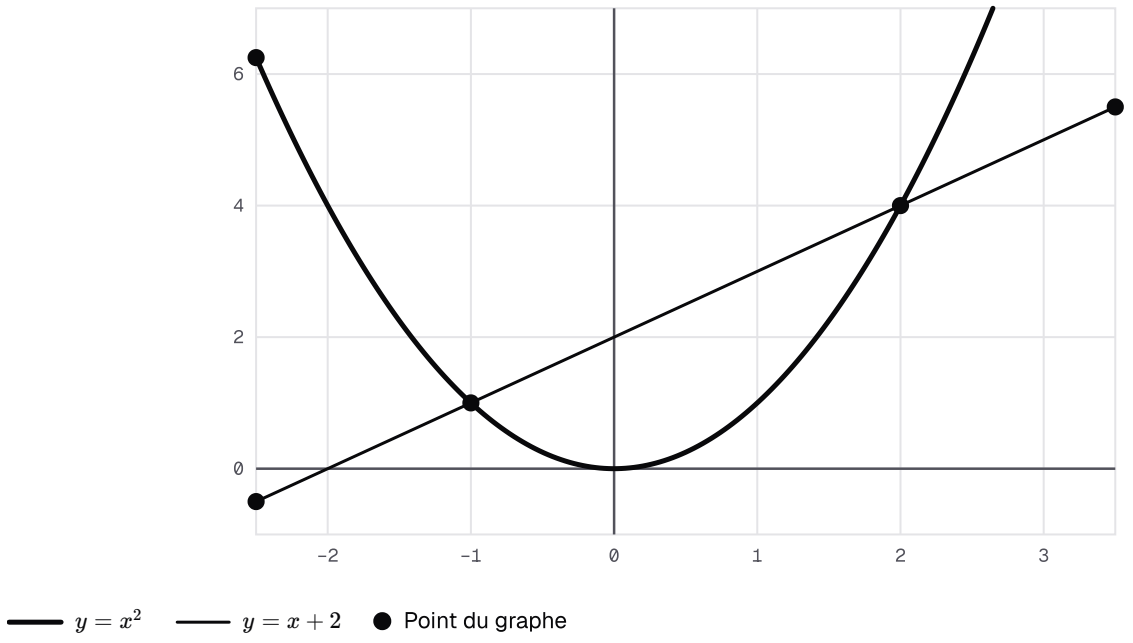
Soit f et g deux fonctions numériques, et I un intervalle inclus dans D_f et dans D_g.

- On dit que f est **inférieure** à g sur I, et on note $f \leq g$ sur I, si $(\forall x \in I) : f(x) \leq g(x)$.

- Les fonctions f et g sont **égales** si elles ont le même ensemble de définition D et si $(\forall x \in D)$: $f(x) = g(x)$.

Interprétation graphique. Dans un repère, $f \leq g$ sur I signifie que, sur I, la courbe $\mathcal{C}_f$ est **au-dessous** de la courbe $\mathcal{C}_g$: pour chaque abscisse x de I, le point de $\mathcal{C}_f$ a une ordonnée inférieure ou égale à celle du point de $\mathcal{C}_g$.

Position relative de deux courbes



Une parabole et une droite

Méthode : position relative de deux courbes

1. **Forme** la différence $d(x) = f(x) - g(x)$ sur l'intervalle commun.
2. **Étudie** son signe : factorisation, trinôme, tableau de signes.
3. **Conclus** : là où $d(x) \geq 0$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$; là où $d(x) \leq 0$, elle est au-dessous.
4. **Repère** les points communs : leurs abscisses sont les solutions de $d(x) = 0$.

Exemple : une parabole et une droite

Reprenons $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x + 2$. Pour tout réel x :

$$d(x) = x^2 - x - 2.$$

Signe. Ici $\Delta = 1 + 8 = 9$, les racines sont -1 et 2, et $a = 1 > 0$. D'après le signe du trinôme, $d(x) < 0$ sur $]-1, 2[$ et $d(x) > 0$ hors de $[-1, 2]$.

Position. Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $[-1, 2]$, et au-dessus ailleurs.

Points communs. Ce sont les points $(-1, 1)$ et $(2, 4)$.

Comparer un nombre et son carré

Exemple : un nombre et son carré

Comparons x et x^2 sur $[0, 1]$. Pour tout réel x :

$$x - x^2 = x(1 - x).$$

Pour $x \in [0, 1]$, les deux facteurs x et $1 - x$ sont positifs ou nuls, donc leur produit aussi.

Ainsi $x^2 \leq x$ pour tout x de $[0, 1]$: sur cet intervalle, la parabole est au-dessous de la droite d'équation $y = x$. Par exemple, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

Vérifie : Au-delà de 1

Sur $[1, +\infty[$, comment se comparent x et x^2 ?

A. $x^2 \leq x$

Faux.
En $x = 2$: $4 > 2$.

B. $x^2 \geq x$

Juste.
Juste : $x^2 - x = x(x - 1) \geq 0$ pour $x \geq 1$.

C. $x^2 = x$

Faux.
L'égalité n'a lieu qu'en 0 et en 1.

D. Cela dépend de x.

Faux.
Pour $x \geq 1$, les deux facteurs de $x(x - 1)$ sont positifs ou nuls : le signe ne change pas.

Correction
Pour tout réel x, $x^2 - x = x(x - 1)$.

Pour $x \geq 1$, on a $x > 0$ et $x - 1 \geq 0$: le produit est positif ou nul. Donc $x^2 \geq x$ pour tout x de $[1, +\infty[$.

Sur cet intervalle, la parabole est au-dessus de la droite d'équation $y = x$.

À toi : Une parabole sous une droite

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 5$, et g la fonction constante égale à -1. Étudie la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et donne leurs points communs. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Forme la différence $f(x) - g(x)$ et simplifie.
Indice 2
Reconnais le début d'une identité remarquable avec $x^2 - 4x$.
Indice 3
Point délicat : l'opposé d'un carré est négatif ou nul ; il ne s'annule qu'en un point.

Réponse
Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &f(x) - g(x) \\ &= -x^2 + 4x - 4 \\ &= -(x-2)^2. \end{aligned}$$

Ce nombre est négatif ou nul pour tout réel x. Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

La différence ne s'annule qu'en 2 : les deux courbes n'ont qu'un point commun, le point $(2, -1)$.

Monotonie et taux de variation

Monter, descendre

En clair. La température θ du début ne fait que monter : plus on attend, plus elle est élevée.

Une fonction **croissante** respecte l'ordre : si $x < y$, alors $f(x) \leq f(y)$. Une fonction **décroissante** l'inverse.

Lire deux valeurs ne suffit pas : il faut comparer **tous** les couples.

Devine : Deux valeurs suffisent-elles ?

On sait que $\theta(1) = 50$ et $\theta(3) = 65$. Peut-on en déduire que θ est croissante sur $[0, +\infty[$?

A. Oui, car $\theta(1) < \theta(3)$: elle monte entre 1 et 3.
Faux.
Deux valeurs ne disent rien de ce qui se passe entre elles, ni ailleurs.

B. Oui, si l'on ajoute la valeur $\theta(0) = 20$ au calcul.
Faux.
Trois valeurs ne suffisent pas plus : il faut tous les couples.

C. Non : il faut comparer tous les couples de réels.
Juste.
Juste : la définition porte sur tous les réels $x < y$ de l'intervalle.

D. Non, car la fonction θ est décroissante.

Faux.

Les valeurs calculées montent ; mais cela ne prouve rien.

Correction

Une fonction peut monter puis redescendre entre 1 et 3. Pour conclure, il faut un calcul valable pour **tous** les réels $t < s$ de l'intervalle. C'est ce que permettent la définition et le taux de variation.

Définition : Fonction croissante, décroissante, monotone

Soit f une fonction numérique et I un intervalle inclus dans D_f.

- f est **croissante** sur I si, pour tous réels x et y de I : $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- f est **strictement croissante** sur I si, pour tous réels x et y de I : $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- f est **décroissante** sur I si, pour tous réels x et y de I : $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- f est **strictement décroissante** sur I si, pour tous réels x et y de I : $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- f est **monotone** sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

Exemple : la température monte

Soit t et s deux réels tels que $0 \leq t < s$. Alors $1 \leq t+1 < s+1$.

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, donc $\dfrac{1}{t+1} > \dfrac{1}{s+1}$. En multipliant par $60 > 0$:

$$\frac{60}{t+1} > \frac{60}{s+1}.$$

On retranche ces nombres à 80 : $\theta(t) < \theta(s)$.

Conclusion. Par définition, θ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Le taux de variation

Dans cet exemple, $\theta(t) - \theta(s)$ et $t - s$ sont de même signe. Leur quotient est donc positif.

Pourquoi est-ce vrai ? Pour $x < y$, une fonction croissante donne $f(x) - f(y) \leq 0$, et $x - y < 0$. Un quotient de deux nombres de même signe est positif. Ce quotient s'appelle le taux de variation.

Propriété : Taux de variation et monotonie

Soit f une fonction numérique et I un intervalle inclus dans D_f. Pour deux réels distincts x et y de I, on appelle **taux de variation** de f entre x et y le nombre

$$\tau(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}.$$

- f est croissante sur I si et seulement si $\tau(x,y) \geq 0$ pour tous réels distincts x et y de I.
- f est décroissante sur I si et seulement si $\tau(x,y) \leq 0$ pour tous réels distincts x et y de I.
- f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I si et seulement si $\tau(x,y) > 0$ (respectivement $\tau(x,y) < 0$) pour tous réels distincts x et y de I.

Démonstration

Étape 1. Soit x et y deux réels distincts de I. Échanger x et y ne change pas le taux, car $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. On suppose donc $x < y$: le dénominateur $x-y$ est strictement négatif.

Étape 2. Si f est croissante sur I, alors $f(x) \leq f(y)$, donc $f(x)-f(y) \leq 0$. Le quotient d'un nombre négatif ou nul par un nombre strictement négatif est positif ou nul : $\tau(x,y) \geq 0$.

Étape 3. Réciproquement, supposons $\tau(x,y) \geq 0$ pour tous réels distincts x et y de I. Soit $x < y$ deux réels de I. Le produit $f(x)-f(y) = \tau(x,y)\,(x-y)$ d'un nombre positif ou nul par un nombre strictement négatif est négatif ou nul : $f(x) \leq f(y)$. Donc f est croissante sur I.

Étape 4. Les autres cas se traitent de la même façon, en changeant le sens des inégalités ou en les rendant strictes.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste clé : se ramener à $x < y$, car échanger x et y ne change pas le taux. Le dénominateur $x-y$ est alors **strictement négatif**.

Le taux a donc le signe contraire de celui de $f(x)-f(y)$. Une fonction croissante donne un taux positif ; une fonction décroissante, un taux négatif.

Vérifie : Le signe du dénominateur

Dans la preuve, on suppose $x < y$. Pourquoi le signe du dénominateur $x-y$ compte-t-il ?

A. Parce qu'il décide du signe du quotient, avec celui de $f(x)-f(y)$.
Juste.
Juste : deux nombres de même signe ont un quotient positif.

B. Parce que ce dénominateur pourrait être nul.
Faux.
x et y sont distincts : $x-y$ n'est jamais nul.

C. Parce que ce dénominateur est toujours positif.

Faux.
Pour $x < y$, $x - y$ est strictement négatif.

D. Il ne compte pas : seul le numérateur importe.
Faux.
Le signe d'un quotient dépend de ses deux termes.

Correction
Pour $x < y$, le dénominateur $x - y$ est strictement négatif. Le taux a donc le signe contraire de $f(x) - f(y)$. Si f est croissante, $f(x) - f(y) \leq 0$, et le taux est positif ou nul.

Exemple : une fonction homographique

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $h(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$. Pour tout $x \neq 2$, $h(x) = 1 + \dfrac{3}{x-2}$.

Taux. Soit x et y deux réels distincts de $]2, +\infty[$. Alors :

$$\begin{aligned} h(x) - h(y) &= \frac{3}{x-2} - \frac{3}{y-2} \\ &= \frac{3(y-x)}{(x-2)(y-2)}. \end{aligned}$$

En divisant par $x - y$:

$$\tau(x, y) = \frac{-3}{(x-2)(y-2)}.$$

Signe. Comme $x > 2$ et $y > 2$, on a $(x-2)(y-2) > 0$: le taux est strictement négatif.

Conclusion. D'après le lien entre taux de variation et monotonie, h est strictement décroissante sur $]2, +\infty[$. Le même calcul vaut sur $]-\infty, 2[$.

Un piège, la méthode, à toi

Attention : décroissante sur deux intervalles, pas sur leur réunion

✗ « h est décroissante sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$, donc sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. »

✓ Par un contre-exemple : $0 < 3$, mais $h(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $h(3) = 4$, donc $h(0) < h(3)$.

La réunion de deux intervalles disjoints n'est pas un intervalle. Écris toujours l'intervalle dans une conclusion de monotonie.

Méthode : monotonie par le taux de variation

1. **Prends** deux réels distincts x et y de l'intervalle I.
2. **Calcule** $f(x) - f(y)$ et factorise par $x - y$.

3. **Simplifie** le taux $\tau(x, y)$, puis étudie son signe en utilisant $x \in I$ et $y \in I$.
4. **Conclus** en nommant l'intervalle : taux positif, f croissante sur I ; taux négatif, f décroissante sur I.

Exemple : un trinôme

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 6x + 1$, et $x \neq y$ deux réels. Alors :

$$\begin{aligned} &g(x) - g(y) \\ &= (x^2 - y^2) - 6(x - y) \\ &= (x - y)(x + y - 6). \end{aligned}$$

En divisant par $x - y \neq 0$:

$$\tau(x, y) = x + y - 6.$$

Signe. On distingue deux intervalles.

- Si x et y sont dans $[3, +\infty[$ et distincts, alors $x + y > 6$, donc $\tau(x, y) > 0$.
- Si x et y sont dans $]-\infty, 3]$ et distincts, alors $x + y < 6$, donc $\tau(x, y) < 0$.

Conclusion. D'après le lien entre taux de variation et monotonie, g est strictement croissante sur $[3, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, 3]$.

À toi : Un taux à simplifier

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 7$. Étudie les variations de f sur $\mathbb{R}$ à l'aide de son taux $\tau(x, y)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Factorise $f(x) - f(y)$ par $x - y$, comme dans l'exemple du trinôme.
Indice 2
Tu obtiens un facteur $x - y$ dans les deux termes : mets-le en facteur.
Indice 3
Point délicat : découpe $\mathbb{R}$ en deux intervalles séparés par 2 ; sur chacun, le signe de $x + y - 4$ ne change pas.

Réponse
Soit $x \neq y$ deux réels. Alors :

$$\begin{aligned} &f(x) - f(y) \\ &= (x - y)(x + y) \\ &\quad - 4(x - y) \\ &= (x - y)(x + y - 4). \end{aligned}$$

En divisant par $x - y \neq 0$:

$$\tau(x, y) = x + y - 4.$$

Signe. Sur $[2, +\infty[$, deux réels distincts vérifient $x + y > 4$: le taux est strictement positif. Sur $]-\infty, 2]$, ils vérifient $x + y < 4$: le taux est strictement négatif.

Conclusion. D'après le lien entre taux de variation et monotonie, f est strictement décroissante sur $]-\infty, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

Monotonie et parité

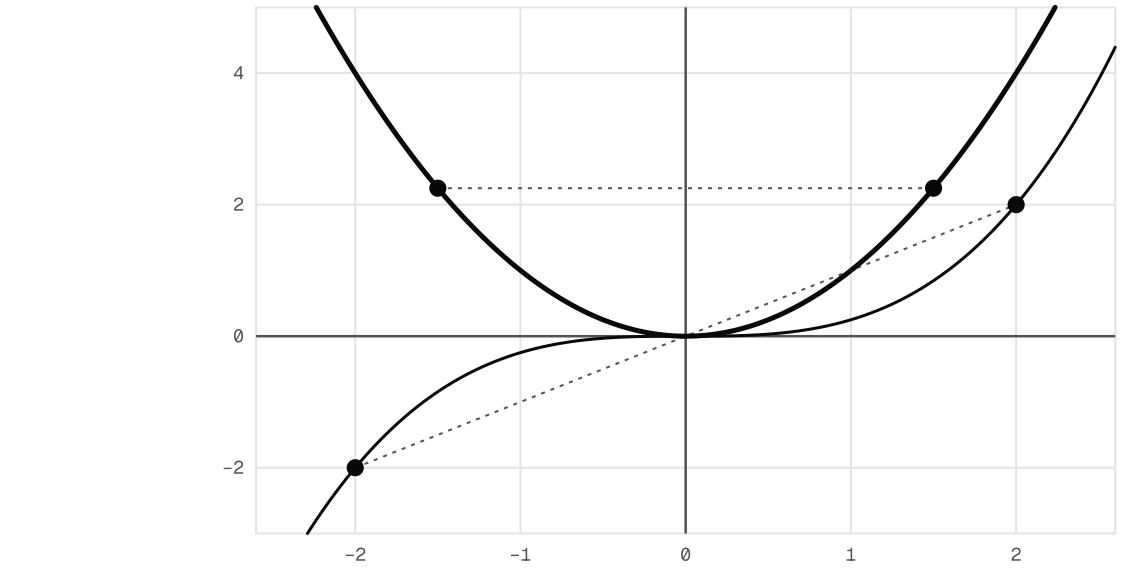
Le miroir et le demi-tour

Rappel. La fonction f est paire si $f(-x) = f(x)$, impaire si $f(-x) = -f(x)$, pour tout x de D_f.

En clair. Pour une fonction paire, l'axe des ordonnées agit comme un miroir sur la courbe. Ce miroir renverse le sens : $x \mapsto x^2$ monte sur $[0, +\infty[$ et descend sur $]-\infty, 0]$.

La courbe d'une fonction impaire se retrouve après un demi-tour autour de O, et le sens est conservé.

Pourquoi est-ce vrai ? Passer aux opposés renverse l'ordre : si $x < y$, alors $-y < -x$.



Le miroir et le demi-tour : la courbe paire de x ↦ x² est son propre reflet par rapport à l'axe des ordonnées, celle de l'impaire x ↦ x³/4 se retrouve après un demi-tour autour de O. Le miroir change le sens de variation, le demi-tour le garde.

Devine : Du côté des négatifs

Soit f une fonction **paire**, strictement croissante sur $[1, 3]$. Quel est son sens de variation sur $[-3, -1]$?

A. Strictement croissante.

Faux.

C'est le cas d'une fonction impaire, pas d'une fonction paire.

B. Strictement décroissante.

Juste.

Juste : le miroir renverse le sens.

C. Constante.

Faux.

$f(-3) = f(3)$ et $f(-1) = f(1)$ sont différents, car $f(1) < f(3)$.

D. On ne peut rien dire.

Faux.

La parité suffit : les valeurs sur $[-3, -1]$ sont celles de $[1, 3]$, lues à l'envers.

Correction

Soit x et y deux réels tels que $-3 \leq x < y \leq -1$. Alors $1 \leq -y < -x \leq 3$.

Comme f est strictement croissante sur $[1, 3]$, $f(-y) < f(-x)$. Comme f est paire, cela s'écrit $f(y) < f(x)$.

Conclusion. La fonction f est strictement décroissante sur $[-3, -1]$.

Monotonie et parité

Propriété : Monotonie et parité

Soit f une fonction **paire** ou **impaire**, et I un intervalle inclus dans $D_f \cap [0, +\infty[$, sur lequel f est monotone. On note I' l'intervalle formé des opposés des éléments de I.

- Si f est paire, f a sur I' le sens de variation **contraire** de celui qu'elle a sur I.
- Si f est impaire, f a sur I' le **même** sens de variation que sur I.

Démonstration

Étape 1. Soit x et y deux réels de I' tels que $x < y$. Alors $-x$ et $-y$ appartiennent à I, et $-y < -x$.

Étape 2. Supposons f croissante sur I. Alors $f(-y) \leq f(-x)$.

Étape 3. Si f est paire, $f(-y) = f(y)$ et $f(-x) = f(x)$, donc $f(y) \leq f(x)$: la fonction f est décroissante sur I'. Si f est impaire, $f(-y) = -f(y)$ et $f(-x) = -f(x)$, donc $-f(y) \leq -f(x)$, soit $f(x) \leq f(y)$: la fonction f est croissante sur I'.

Étape 4. Si f est décroissante sur I, le raisonnement est le même avec les inégalités renversées. Il vaut aussi pour la stricte monotonie.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux renversements se combinent. Passer aux opposés **renverse** l'ordre des réels.

Pour une fonction paire, $f(-x) = f(x)$: rien ne rétablit l'ordre, et le sens est contraire. Pour une fonction impaire, $f(-x) = -f(x)$: la multiplication par -1 renverse une seconde fois, et le sens est conservé.

Vérifie : Combien de renversements ?

Dans la preuve, pour une fonction impaire, combien de fois l'ordre d'une inégalité est-il renversé ?

A. Aucune fois : l'ordre ne change jamais.
Faux.
Le passage de $x < y$ à $-y < -x$ renverse déjà l'ordre.

B. Une seule fois, et le sens est contraire.
Faux.
Il y a aussi le passage de $f(-y) \leq f(-x)$ à $-f(y) \leq -f(x)$.

C. Deux fois, et le sens est conservé.
Juste.
Juste : aux opposés, puis par la multiplication par -1.

D. Trois fois, et le sens est contraire.
Faux.
Seuls deux passages renversent l'ordre.

Correction
Premier renversement. L'inégalité $x < y$ donne $-y < -x$. Si f est croissante sur I, on obtient $f(-y) \leq f(-x)$.

Second renversement. Comme f est impaire, cela s'écrit $-f(y) \leq -f(x)$, soit $f(x) \leq f(y)$.

Les deux renversements se compensent : f est croissante sur I'.

Étudier une moitié, déduire l'autre

Exemple : étudier sur les positifs, puis déduire

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{6}{x^2 + 2}$; elle est paire.

Sur $[0, +\infty[$. Soit x et y deux réels tels que $0 \leq x < y$. Alors $x^2 < y^2$, donc $x^2 + 2 < y^2 + 2$. Ces deux nombres sont strictement positifs, et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$: en multipliant par 6, on obtient $f(x) > f(y)$.

Ainsi f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. D'après le lien entre monotonie et parité, elle est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$.

L'hypothèse compte. La fonction $v : x \mapsto x^2 + 2x$ n'est pas paire. Elle croît sur $[0, +\infty[$. Mais $v(-2) = 0, v(-1) = -1$ et $v(0) = 0$: elle n'est pas monotone sur $]-\infty, 0]$.

À toi : Une fonction impaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$; elle est impaire. On admet que, pour tous réels distincts x et y :

$$\tau(x, y) = \frac{4(1 - xy)}{(x^2+1)(y^2+1)}.$$

Déduis-en le sens de variation de g sur $[0, 1]$, puis sur $[-1, 0]$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le dénominateur est-il positif ? Que peux-tu dire de xy quand x et y sont dans $[0, 1]$?
Indice 2
Si $x \neq y$ sont dans $[0, 1]$, l'un des deux est strictement inférieur à 1 : compare xy à 1.
Indice 3
Point délicat : g est impaire ; le sens est **conservé** sur l'intervalle opposé.

Réponse
Dénominateur. Le produit $(x^2+1)(y^2+1)$ est strictement positif.

Numérateur. Soit $x \neq y$ dans $[0, 1]$. L'un des deux est strictement inférieur à 1, l'autre est au plus 1, et tous deux sont positifs : $xy < 1$. Donc $1 - xy > 0$.

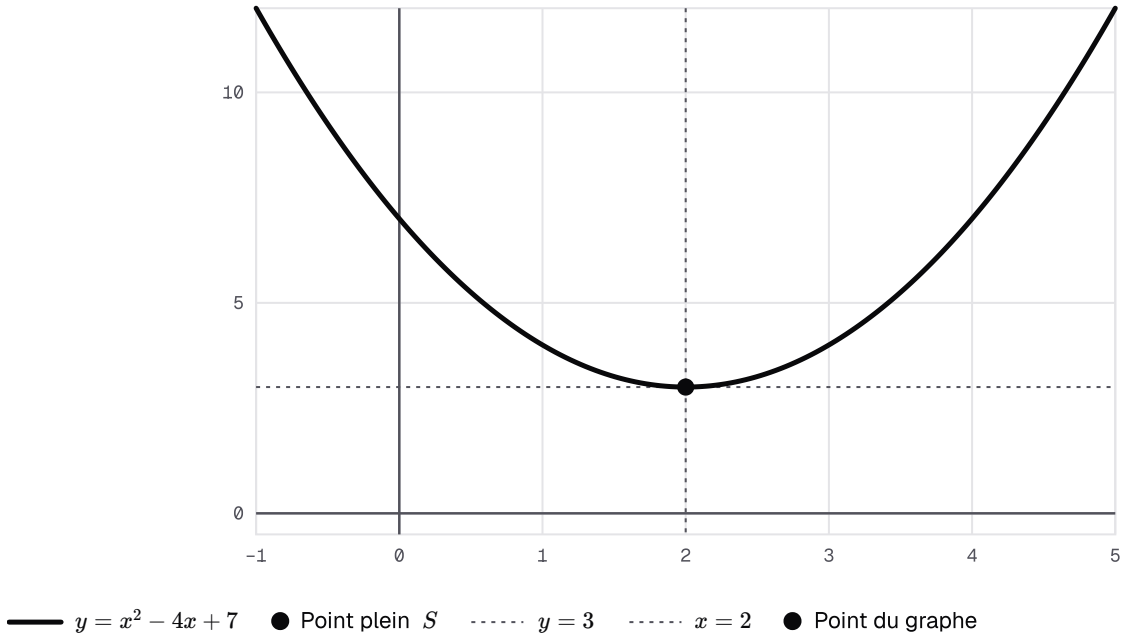
Le taux est strictement positif. D'après le lien entre taux de variation et monotonie, g est strictement croissante sur $[0, 1]$.

Par la parité. Comme g est impaire, d'après le lien entre monotonie et parité, elle est aussi strictement croissante sur $[-1, 0]$.

Extremums

Le point le plus bas

En clair. Pense au fond d'une vallée sur un profil de randonnée. La fonction $x \mapsto x^2 - 4x + 7$ descend jusqu'à $x = 2$, puis remonte. Son point le plus bas a pour abscisse 2 et pour ordonnée 3. Ce nombre 3 est une valeur **atteinte** : c'est un minimum.



Le fond de la vallée : la parabole de x ↦ x² − 4x + 7 descend jusqu'à l'abscisse 2, puis remonte. Son point le plus bas, S(2, 3), est sur la droite d'équation y = 3 ; aucun autre point de la courbe ne descend jusqu'à cette droite.

Devine : Lire un minimum

La fonction $g : x \mapsto x^2 - 6x + 1$ est décroissante sur $]-\infty, 3]$ et croissante sur $[3, +\infty[$. Quelle est la plus petite valeur de $g(x)$?

A. 3

Faux.

3 est l'abscisse où le sens change ; la valeur cherchée est $g(3)$.

B. -8

Juste.

Juste : $g(3) = 9 - 18 + 1 = -8$.

C. 1

Faux.

$g(0) = 1$, mais $g(3)$ est plus petit.

D. Il n'y en a pas.

Faux.

g descend puis remonte : la valeur en 3 est la plus petite.

Correction

Sur $]-\infty, 3]$, g décroît : pour tout x de cet intervalle, $g(x) \geq g(3)$.

Sur $[3, +\infty[$, g croît : pour tout x de cet intervalle, $g(x) \geq g(3)$.

Or $g(3) = 9 - 18 + 1 = -8$. C'est la plus petite valeur de g sur $\mathbb{R}$, atteinte en 3.

Définition : Maximum, minimum, extremum

Soit f une fonction numérique, I un intervalle inclus dans D_f et a un élément de I.

- $f(a)$ est le **maximum** de f sur I si $(\forall x \in I) : f(x) \leq f(a)$.
- $f(a)$ est le **minimum** de f sur I si $(\forall x \in I) : f(x) \geq f(a)$.
- Un maximum ou un minimum s'appelle un **extremum**.
- $f(a)$ est un **maximum local** (respectivement un **minimum local**) de f s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que $(\forall x \in J \cap D_f) : f(x) \leq f(a)$ (respectivement $f(x) \geq f(a)$).

Variations de la fonction g

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$		↘	-8	↗	

Lire, puis justifier

Exemple : lire un tableau de variations

Le tableau donne les variations de $g : x \mapsto x^2 - 6x + 1$. Son minimum sur $\mathbb{R}$ est $g(3) = -8$.

Justification. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g(x) - (-8) &= x^2 - 6x + 9 \\ &= (x-3)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Sur $[4, 6]$. La fonction g est croissante : son minimum est $g(4) = -7$ et son maximum $g(6) = 1$.

Un extremum dépend toujours de l'intervalle.

Attention : un plafond n'est pas toujours un maximum

✗ « Pour tout $t \geq 0$, $\theta(t) < 80$, donc 80 est le maximum de θ. »

✓ Un maximum est une valeur **atteinte** : une image $\theta(a)$. Or, pour tout $t \geq 0$:

$$\theta(t) - 80 = -\frac{60}{t+1} \neq 0.$$

Donc 80 majore θ sur $[0, +\infty[$, sans être une de ses valeurs.

De plus, θ n'a pas de maximum : elle est strictement croissante, donc $\theta(t+1) > \theta(t)$.

Méthode : lire et justifier un extremum

1. **Repère** un changement de sens de variation en a, sur le tableau ou sur la courbe.
2. **Lis** : croissante puis décroissante donne un maximum $f(a)$; décroissante puis croissante, un minimum $f(a)$.
3. **Justifie** par le calcul : étudie le signe de $f(x) - f(a)$ sur l'intervalle.
4. **Nomme** l'intervalle : un extremum sur $[\alpha, \beta]$ n'est pas forcément un extremum sur $\mathbb{R}$.

Un minimum justifié

Exemple : un minimum justifié par une inégalité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 7$. Son taux de variation vaut $x + y - 4$: f décroît sur $]-\infty, 2]$ et croît sur $[2, +\infty[$.

Valeur en 2. On calcule $f(2) = 4 - 8 + 7 = 3$.

Inégalité. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) - f(2) &= x^2 - 4x + 4 \\ &= (x-2)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Conclusion. Le réel $f(2) = 3$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$, atteint en 2.

Vérifie : Le minimum sur un intervalle

Quel est le minimum de $f : x \mapsto x^2 - 4x + 7$ sur l'intervalle $[3, 5]$?

A. 3

Faux.
$3 = f(2)$, mais 2 n'appartient pas à $[3, 5]$.

B. 4

Juste.
Juste : f est croissante sur $[3, 5]$, donc le minimum est $f(3) = 4$.

C. 12

Faux.
$12 = f(5)$ est le maximum sur $[3, 5]$.

D. 0

Faux.
$f(x) \geq 3$ pour tout réel x : 0 n'est pas une valeur de f.

Correction

L'intervalle $[3,5]$ est inclus dans $[2,+\infty[$, où f est croissante.

Pour tout x de $[3,5]$:

$$f(x) \geq f(3) = 9 - 12 + 7 = 4.$$

Le minimum de f sur $[3,5]$ est donc 4, atteint en 3. Le maximum est $f(5) = 12$.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Un maximum

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 5$. Montre que $f(x) \leq -1$ pour tout réel x. Déduis-en le maximum de f sur $\mathbb{R}$, et le réel où il est atteint. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule $f(x) - (-1)$ et reconnais une identité remarquable.
Indice 2
Reconnais l'opposé d'un carré, en faisant attention au signe $-$.
Indice 3
Point délicat : il faut aussi une valeur **atteinte** ; calcule $f(2)$.

Réponse
Inégalité. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & f(x) + 1 \\ & = -x^2 + 4x - 4 \\ & = -(x-2)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Donc $f(x) \leq -1$ pour tout réel x.

Valeur atteinte. De plus, $f(2) = -4 + 8 - 5 = -1$.

Conclusion. Le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est $f(2) = -1$, atteint en 2.

Remarque : Coin devoir : rédiger un minimum

En devoir, un extremum se justifie par une inégalité et une valeur atteinte. Écris : « Pour tout réel x, $f(x) - f(2) = (x-2)^2 \geq 0$, donc $f(x) \geq f(2)$. Comme $2 \in \mathbb{R}$, $f(2) = 3$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$. »

Nomme toujours l'intervalle, et le réel où l'extremum est atteint.

Composée de deux fonctions

Enchaîner deux calculs

En clair. Sur ta calculatrice, tu tapes un nombre x. Tu calcules d'abord $2x-1$, puis tu élèves le résultat au carré. Tu as enchaîné deux fonctions : $x \mapsto 2x-1$, puis $X \mapsto X^2$. Le résultat final est $(2x-1)^2$. L'ordre des calculs compte.

Devine : Dans quel ordre ?

Soit $f : x \mapsto 2x-1$ et $g : x \mapsto x^2$, définies sur $\mathbb{R}$. On calcule d'abord $f(3)$, puis l'image de ce résultat par g. Qu'obtient-on ?

A. 25

Juste.
Juste : $f(3)=5$, puis $g(5)=25$.

B. 17

Faux.
C'est $f\big(g(3)\big)=2\times 9-1$: l'ordre est inversé.

C. 9

Faux.
C'est $g(3)$: le calcul par f a été oublié.

D. 5

Faux.
C'est $f(3)$: il manque le calcul par g.

Correction
On calcule $f(3)=2\times 3-1=5$, puis $g(5)=5^2=25$. Ce nombre se note $(g\circ f)(3)$.

Dans l'autre ordre, $g(3)=9$ puis $f(9)=17$: le résultat change.

Définition : Composée de deux fonctions

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et g une fonction d'ensemble de définition D_g. La **composée** de f suivie de g est la fonction notée $g\circ f$ (on lit « g rond f ») définie par

$$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big).$$

Son ensemble de définition est l'ensemble des réels x tels que $x\in D_f$ et $f(x)\in D_g$.

L'ordre et l'ensemble de définition

Attention : l'ordre de la composée

✗ « Avec $f(x)=2x-1$ et $g(x)=x^2$, on a $(g\circ f)(x)=2x^2-1$. »

✓ Dans $g\circ f$, on applique **d'abord** f, **puis** g. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(2x-1)\\ &= (2x-1)^2.\end{aligned}$$

L'expression $2x^2 - 1$ est celle de $(f \circ g)(x)$. En $x = 0$, ces deux expressions valent 1 et -1 : les deux fonctions sont différentes.

Exemple : l'ensemble de définition d'une composée

Soit h la fonction définie par $h(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$. C'est $g \circ f$, avec $f : x \mapsto x^2 - 2x - 3$ et g la fonction racine carrée.

Conditions. Il faut $x \in D_f = \mathbb{R}$ et $f(x) \in D_g = [0, +\infty[$, soit :

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0.$$

Signe du trinôme. Ici $\Delta = 4 + 12 = 16$: ce trinôme a pour racines -1 et 3, et $a = 1 > 0$. D'après le signe du trinôme, il est positif ou nul hors de $]-1, 3[$.

Conclusion. L'ensemble de définition de h est :

$$D_h =]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[\,.$$

Décomposer une fonction

Exemple : décomposer une fonction

Pour étudier une fonction, il est utile de la voir comme une composée.

Première fonction. La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 13}$ est $g \circ u$, avec $u(x) = x^2 - 4x + 13$ et $g(X) = \sqrt{X}$.

Ici $\Delta = 16 - 52 = -36 < 0$ et $a = 1 > 0$: $u(x) > 0$ pour tout réel x. L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Seconde fonction. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$ est $w \circ v$, avec $v(x) = x^2 + 2x + 3$ et $w(X) = \dfrac{1}{X}$.

Ici $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$ et $a = 1 > 0$: $v(x) > 0$ pour tout réel x. L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Vérifie : La bonne décomposition

Soit $u(x) = x^2 - 4x + 13$ et $g(X) = \sqrt{X}$. Quelle écriture désigne la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 13}$?

A. $u \circ g$

Faux.
$(u \circ g)(x) = u\big(\sqrt{x}\big) = x - 4\sqrt{x} + 13$: on applique d'abord la racine.

B. $g \circ u$

Juste.
Juste : on calcule d'abord $u(x)$, puis sa racine.

C. $g \times u$

Faux.

$g \times u$ multiplie les deux images ; ici, on enchaîne deux calculs.

D. $g + u$

Faux.

Aucune addition n'apparaît : on enchaîne deux calculs.

Correction

On calcule d'abord $u(x) = x^2 - 4x + 13$, puis la racine carrée de ce nombre. C'est $g\big(u(x)\big) = (g \circ u)(x)$.

La fonction $u \circ g$ applique la racine en premier : elle est différente.

À toi : Deux ordres, deux fonctions

Soit $u(x) = x - 2$, et v la fonction racine carrée. Écris $(v \circ u)(x)$ et $(u \circ v)(x)$, puis donne l'ensemble de définition de chacune. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour $v \circ u$, calcule d'abord $u(x)$, puis applique la racine.

Indice 2

Pour chaque composée, écris deux conditions : x dans le premier ensemble, et son image dans le second.

Indice 3

Point délicat : u est définie sur $\mathbb{R}$, mais $u(x)$ doit être positif ou nul pour que la racine existe.

Réponse

Première composée. Pour tout réel x tel que $x - 2 \geq 0$, $(v \circ u)(x) = \sqrt{x - 2}$. Son ensemble de définition est donc $[2, +\infty[$.

Seconde composée. Pour tout réel $x \geq 0$, $(u \circ v)(x) = \sqrt{x} - 2$. La racine demande $x \geq 0$, et u est définie sur $\mathbb{R}$: l'ensemble de définition est $[0, +\infty[$.

Les deux fonctions sont différentes.

Variations d'une composée

Deux sens de variation

En clair. Enchaîne deux fonctions croissantes : si x augmente, $f(x)$ augmente, puis $g\big(f(x)\big)$ aussi. Si la seconde est décroissante, l'ordre est renversé une fois.

Pourquoi est-ce vrai ? Chaque fonction décroissante renverse le sens d'une inégalité. Deux renversements se compensent.

Devine : Croissante, puis décroissante

Soit f croissante sur I, et g décroissante sur J, avec $f(x) \in J$ pour tout x de I. Quel est le sens de variation de $g \circ f$ sur I ?

A. Croissante.

Faux.

Un seul renversement : le sens ne peut pas rester le même.

B. Constante.

Faux.

Rien n'oblige $g \circ f$ à prendre une seule valeur.

C. On ne peut rien dire.

Faux.

L'énoncé qui suit répond : les sens de f et de g suffisent.

D. Décroissante.

Juste.

Juste : g renverse l'ordre une fois.

Correction

Soit $x < y$ dans I. Comme f est croissante, $f(x) \leq f(y)$, deux réels de J.

Comme g est décroissante sur J :

$$g\big(f(x)\big) \geq g\big(f(y)\big).$$

Donc $g \circ f$ est décroissante sur I.

La monotonie d'une composée

Propriété : Monotonie d'une composée

Soit f une fonction monotone sur un intervalle I et g une fonction monotone sur un intervalle J, telles que $f(x) \in J$ pour tout x de I.

- Si f et g ont le **même** sens de variation (sur I et sur J), alors $g \circ f$ est **croissante** sur I.
- Si f et g ont des sens de variation **contraires**, alors $g \circ f$ est **décroissante** sur I.

Démonstration

Étape 1. Soit x et y deux réels de I tels que $x < y$. Les nombres $f(x)$ et $f(y)$ appartiennent à J. Si $f(x) = f(y)$, alors $g\big(f(x)\big) = g\big(f(y)\big)$ et les inégalités larges ci-dessous sont vraies ; on suppose donc $f(x) \neq f(y)$.

Étape 2. Cas où f et g sont croissantes : $f(x) < f(y)$, puis, comme g est croissante sur J, $g\big(f(x)\big) \leq g\big(f(y)\big)$. Donc $g \circ f$ est croissante sur I.

Étape 3. Cas où f est croissante et g décroissante : $f(x) < f(y)$, puis $g\big(f(x)\big) \geq g\big(f(y)\big)$. Donc $g \circ f$ est décroissante sur I.

Étape 4. Si f est décroissante, alors $f(y) < f(x)$ et on raisonne de la même façon : chaque fonction décroissante renverse le sens de l'inégalité, et deux renversements se compensent.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve suit l'inégalité $x < y$ à travers les deux fonctions. Chaque fonction décroissante **renverse** son sens ; une fonction croissante le **conserve**.

Même sens : zéro ou deux renversements, et $g \circ f$ est croissante. Sens contraires : un renversement, et $g \circ f$ est décroissante.

L'hypothèse $f(x) \in J$ permet d'utiliser le sens de g.

Vérifie : Le rôle de l'hypothèse

Dans la preuve, à quoi sert l'hypothèse « $f(x) \in J$ pour tout x de I » ?

A. À utiliser le sens de variation de g en $f(x)$ et $f(y)$.

Juste.

Juste : on ne connaît le sens de g que sur J.

B. À garantir que la fonction f est définie sur tout I.

Faux.

f est définie sur I par hypothèse : c'est l'emploi de g qui pose problème.

C. À exclure le cas où $f(x)$ et $f(y)$ sont égaux.

Faux.

Ce cas est traité à part, à l'étape 1.

D. À s'assurer que I et J sont des intervalles.

Faux.

I et J sont des intervalles par hypothèse.

Correction

Le sens de variation de g n'est connu que sur J. Pour comparer $g\big(f(x)\big)$ et $g\big(f(y)\big)$, il faut que $f(x)$ et $f(y)$ appartiennent à J. C'est exactement l'hypothèse.

Méthode : variations d'une composée

1. **Décompose** : $h = g \circ f$, avec f et g de variations connues.
2. **Découpe** l'intervalle d'étude en intervalles I où f est monotone.

3. **Vérifie** que $f(x)$ reste dans un intervalle J où g est monotone.
4. **Conclus** : même sens, h croissante sur I ; sens contraires, h décroissante sur I.

Deux exemples

Exemple : la racine d'un trinôme

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 13}$, et $u : x \mapsto x^2 - 4x + 13$. Pour tout réel x :

$$u(x) = (x-2)^2 + 9.$$

Sens de u. Le taux de u vaut $x + y - 4$: u décroît sur $]-\infty, 2]$ et croît sur $[2, +\infty[$.

Valeurs de u. De plus $u(x) \geq 9$, donc $u(x) \in [0, +\infty[$, où la racine carrée est croissante.

Conclusion. D'après la monotonie d'une composée, h est décroissante sur $]-\infty, 2]$ et croissante sur $[2, +\infty[$. Son minimum est $h(2) = \sqrt{9} = 3$.

Exemple : l'inverse d'une fonction positive

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$, et $v : x \mapsto x^2 + 2x + 3$. Pour tout réel x :

$$v(x) = (x+1)^2 + 2.$$

Sens de v. Le taux de v vaut $x + y + 2$: v décroît sur $]-\infty, -1]$ et croît sur $[-1, +\infty[$.

Valeurs de v. Comme $v(x) \geq 2$, les valeurs de v sont dans $]0, +\infty[$, où la fonction inverse est décroissante.

Conclusion. D'après la monotonie d'une composée, k est croissante sur $]-\infty, -1]$ et décroissante sur $[-1, +\infty[$. Son maximum est $k(-1) = \dfrac{1}{2}$.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Le carré d'une fonction affine

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2x-1)^2$. Étudie les variations de h sur $\mathbb{R}$ en la décomposant. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris $h = g \circ f$, avec $f(x) = 2x - 1$ et $g(X) = X^2$.
Indice 2
Cherche où $f(x) \geq 0$, et où $f(x) \leq 0$.
Indice 3
Point délicat : la fonction carré change de sens en 0 ; cherche le réel où $f(x) = 0$.

Réponse

On a $h = g \circ f$, avec $f : x \mapsto 2x - 1$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $g : X \mapsto X^2$.

Sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$**.** On a $f(x) \geq 0$, et g est croissante sur $[0, +\infty[$: même sens, donc h est croissante.

Sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$**.** On a $f(x) \leq 0$, et g est décroissante sur $]-\infty, 0]$: sens contraires, donc h est décroissante.

Ces deux conclusions viennent de la monotonie d'une composée.

Remarque : Coin devoir : rédiger les variations d'une composée

En devoir, chaque hypothèse de l'énoncé est vérifiée par écrit. Écris : « La fonction u est croissante sur $[2, +\infty[$, et $u(x) \geq 9$, donc $u(x) \in [0, +\infty[$. La racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$. D'après la monotonie d'une composée, h est croissante sur $[2, +\infty[$. »

Ne saute ni l'intervalle J, ni le sens de chaque fonction.

Axe et centre de symétrie

Plier, retourner

En clair. Un papillon a deux ailes identiques, de part et d'autre de son corps. Une courbe peut avoir la même allure : un pliage selon une verticale l'échange avec elle-même. On parle d'**axe de symétrie**.

Une autre courbe peut rester inchangée par un demi-tour autour d'un point. On parle de **centre de symétrie**.

Tu connais déjà deux cas : l'axe des ordonnées pour une fonction paire, l'origine pour une fonction impaire.

Devine : Où plier ?

La parabole d'équation $y = -x^2 + 6x - 5$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 1 et 5. Quelle droite est probablement son axe de symétrie ?

A. La droite d'équation $x = 1$.

Faux.

Les points d'abscisses 1 et 5 doivent s'échanger : l'axe passe entre eux.

B. La droite d'équation $x = 5$.

Faux.

Cette droite passe par l'un des deux points ; le symétrique de l'abscisse 1 serait 9.

C. La droite d'équation $x = 3$.

Juste.

Juste : 3 est le milieu de 1 et 5.

D. L'axe des abscisses.

Faux.
Les points $(3, 4)$ et $(3, -4)$ seraient alors tous deux sur la courbe ; or l'abscisse 3 n'a qu'une image.

Correction
Les points d'abscisses 1 et 5 ont la même ordonnée, 0. Un axe vertical qui les échange passe par le milieu de 1 et 5, d'abscisse 3. On vérifie plus loin que la droite d'équation $x = 3$ est bien un axe de symétrie.

Propriété : Axe de symétrie d'une courbe

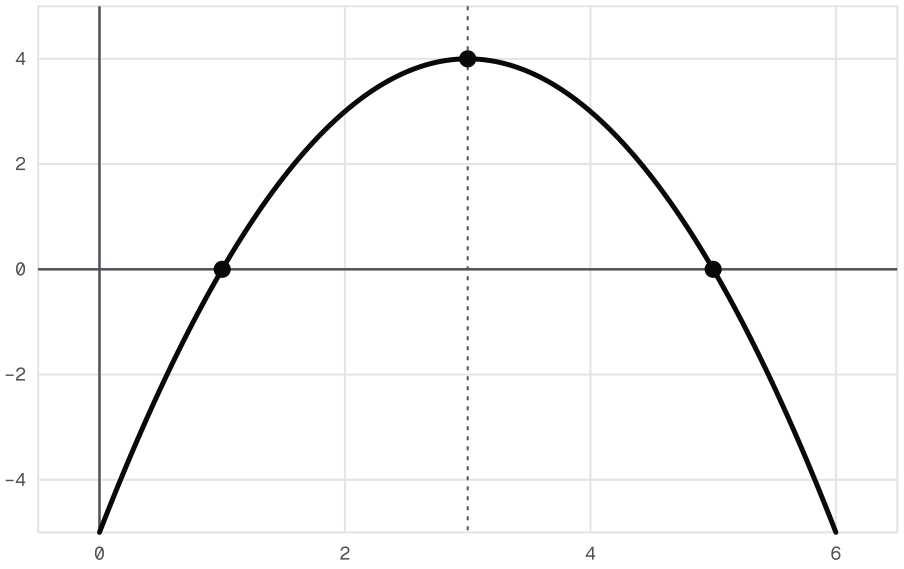
Le plan est rapporté à un repère orthogonal. Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et a un réel. La droite d'équation $x = a$ est un **axe de symétrie** de la courbe $\mathcal{C}_f$ si et seulement si, pour tout x de D_f :

$$2a - x \in D_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) = f(x).$$

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis.

Un axe de symétrie



Une parabole et son axe de symétrie

Exemple : l'axe d'une parabole

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, et $a = 3$, de sorte que $2a - x = 6 - x$.

Domaine. Pour tout réel x, $6 - x$ est réel.

Calcul. Pour tout réel x, $(6 - x)^2 = 36 - 12x + x^2$, donc :

$$\begin{aligned} & f(6 - x) \\ & = -(36 - 12x + x^2) \\ & \quad + 36 - 6x - 5 \\ & = -x^2 + 6x - 5 = f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. En repère orthogonal, la propriété de l'axe de symétrie permet de conclure : $\mathcal{C}_f$ admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = 3$. Le sommet est le point $(3, 4)$, car $f(3) = 4$.

Un centre de symétrie

Propriété : Centre de symétrie d'une courbe

Le plan est rapporté à un repère. Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et $\Omega(a, b)$ un point du plan. Le point Ω est un **centre de symétrie** de la courbe $\mathcal{C}_f$ si et seulement si, pour tout x de D_f :

$$2a - x \in D_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) + f(x) = 2b.$$

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis.

Exemple : le centre d'une courbe homographique

Soit g la fonction définie sur $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $g(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$, et le point $\Omega(2,3)$. Ici $a = 2$ et $b = 3$.

Domaine. Si $x \neq 2$, alors $4 - x \neq 2$: la condition sur D_g est vérifiée.

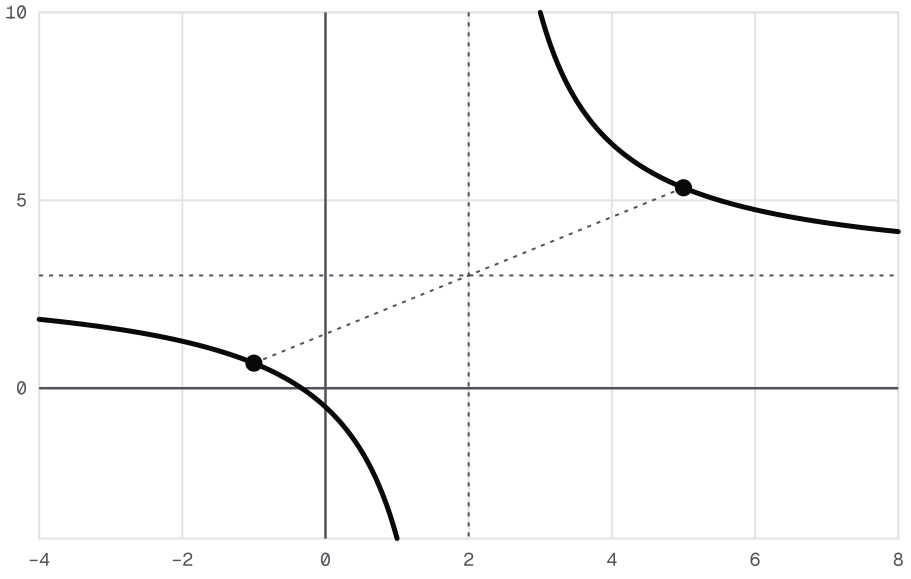
Calcul. Pour tout $x \neq 2$:

$$\begin{aligned} g(4-x) &= \frac{3(4-x)+1}{(4-x)-2} \\ &= \frac{13-3x}{2-x} = \frac{3x-13}{x-2}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} &g(4-x) + g(x) \\ &= \frac{3x-13+3x+1}{x-2} \\ &= \frac{6x-12}{x-2} = 6 = 2 \times 3. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après la propriété du centre de symétrie, $\Omega(2,3)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$.



Courbe de g : x ↦ (3x + 1)/(x − 2), en deux morceaux de part et d'autre de la droite d'équation x = 2. Le point Ω(2, 3) est le milieu du segment qui joint M, d'abscisse −1, et M', d'abscisse 5 : les abscisses x et 4 − x se répondent.

La méthode, puis à toi

Méthode : montrer un axe ou un centre de symétrie

1. **Vérifie** que D_f est symétrique par rapport à a : si $x \in D_f$, alors $2a - x \in D_f$.
2. **Calcule** $f(2a - x)$ et simplifie.
3. **Pour un axe**, compare avec $f(x)$: l'égalité $f(2a - x) = f(x)$ donne l'axe d'équation $x = a$, en repère orthogonal.
4. **Pour un centre**, calcule $f(2a - x) + f(x)$: si cette somme vaut $2b$, le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie.

À toi : Un axe pour une racine

Soit $h(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 13}$, définie sur $\mathbb{R}$. Montre que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_h$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Ici $a = 2$: calcule $h(4 - x)$.
Indice 2
Développe $(4 - x)^2 - 4(4 - x) + 13$.
Indice 3
Point délicat : vérifie d'abord que $4 - x$ appartient à l'ensemble de définition ; ici, c'est $\mathbb{R}$.

Réponse
Domaine. On a $D_h = \mathbb{R}$: pour tout réel x, $4 - x$ est réel.

Calcul. Ici $a = 2$, donc $2a - x = 4 - x$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(4 - x)^2 - 4(4 - x) + 13 \\ = 16 - 8x + x^2 \\ \quad - 16 + 4x + 13 \\ = x^2 - 4x + 13.\end{aligned}$$

Donc $h(4 - x) = h(x)$ pour tout réel x.

Conclusion. En repère orthogonal, la propriété de l'axe de symétrie permet de conclure : $\mathcal{C}_h$ admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = 2$.

Les fonctions racine de x + a et cube

Glisser une courbe connue

En clair. Tu connais la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$: elle part de l'origine et monte. Pour $x \mapsto \sqrt{x + 3}$, l'image de x est la racine de $x + 3$. Chaque valeur est donc atteinte 3 unités plus tôt. La courbe a glissé horizontalement.

Devine : Dans quel sens glisser ?

Comment obtient-on la courbe de $x \mapsto \sqrt{x+3}$ à partir de celle de $x \mapsto \sqrt{x}$?

A. Par une translation de 3 unités vers la gauche.

Juste.

Juste : le point de départ passe de $(0,0)$ à $(-3,0)$.

B. Par une translation de 3 unités vers la droite.

Faux.

Vers la droite, on obtiendrait $x \mapsto \sqrt{x-3}$, qui s'annule en 3.

C. Par une translation de 3 unités vers le haut.

Faux.

Vers le haut, on obtiendrait $x \mapsto \sqrt{x}+3$.

D. Par une translation de 3 unités vers le bas.

Faux.

Vers le bas, on obtiendrait $x \mapsto \sqrt{x}-3$.

Correction

La racine de $x+3$ s'annule pour $x=-3$: la courbe part du point $(-3,0)$.

Plus généralement, le point (x,y) est sur la nouvelle courbe exactement quand $(x+3,y)$ est sur celle de $x \mapsto \sqrt{x}$. C'est la translation de vecteur $-3\vec{i}$, vers la gauche.

Propriété : La fonction racine carrée de x + a

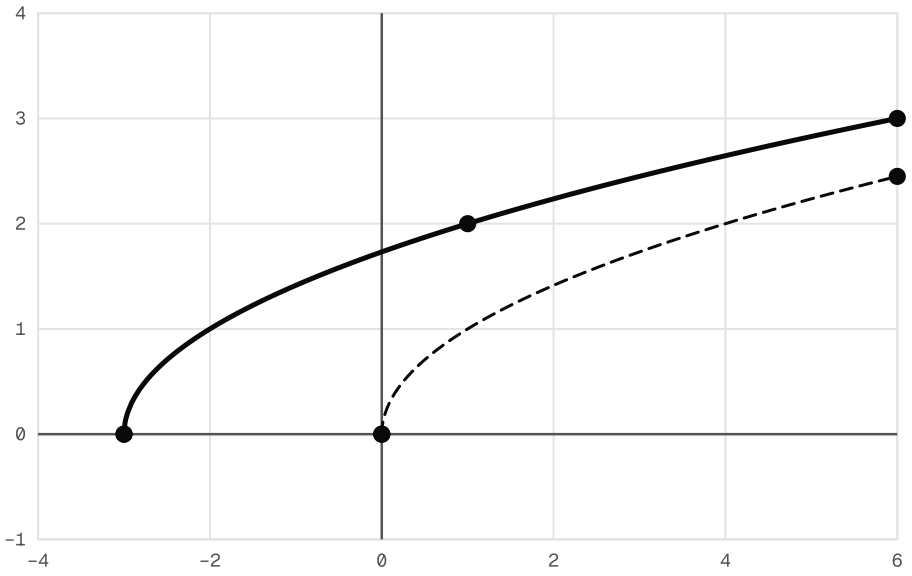
Soit a un réel et f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x+a}$.

- $D_f=[-a,+\infty[$, et f est strictement croissante sur D_f.
- Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe de f est l'image de la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ par la translation de vecteur $-a\vec{i}$.

Démonstration

Idée de la preuve. L'inégalité $x+a \geq 0$ équivaut à $x \geq -a$, d'où D_f. La fonction f est la composée de $u : x \mapsto x+a$, strictement croissante sur $D_f=[-a,+\infty[$, suivie de la fonction racine carrée, strictement croissante sur $[0,+\infty[$; pour tout x de D_f, $u(x)=x+a$ appartient à $[0,+\infty[$. On applique la monotonie d'une composée, dans sa version stricte, dont la preuve est la même. Enfin, le point $M(x,y)$ appartient à la courbe de f si et seulement si le point $M'(x+a,y)$ appartient à la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$; or $\overrightarrow{M'M}=-a\vec{i}$.

Des racines décalées



Deux courbes de racines carrées

Exemple : une racine décalée vers la droite

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x-2}$. Ici $a = -2$.

D'après la propriété des fonctions $x \mapsto \sqrt{x+a}$, on a $D_f = [2, +\infty[$, et f est strictement croissante sur D_f. Sa courbe est celle de $x \mapsto \sqrt{x}$, translatée de vecteur $2\vec{i}$, vers la droite.

Quelques points : $f(2) = 0$, $f(3) = 1$, $f(6) = 2$ et $f(11) = 3$.

Les fonctions cubes

En clair. Calcule x^3 pour $x = -2, -1, 0, 1, 2$: tu trouves $-8, -1, 0, 1, 8$. Les valeurs montent quand x augmente, et deux nombres opposés ont des cubes opposés. Si tu multiplies par un nombre a négatif, tout est renversé : la courbe descend. L'énoncé suivant dit cela pour tout a non nul.

Propriété : La fonction cube multipliée par a

Soit a un réel non nul et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3$.

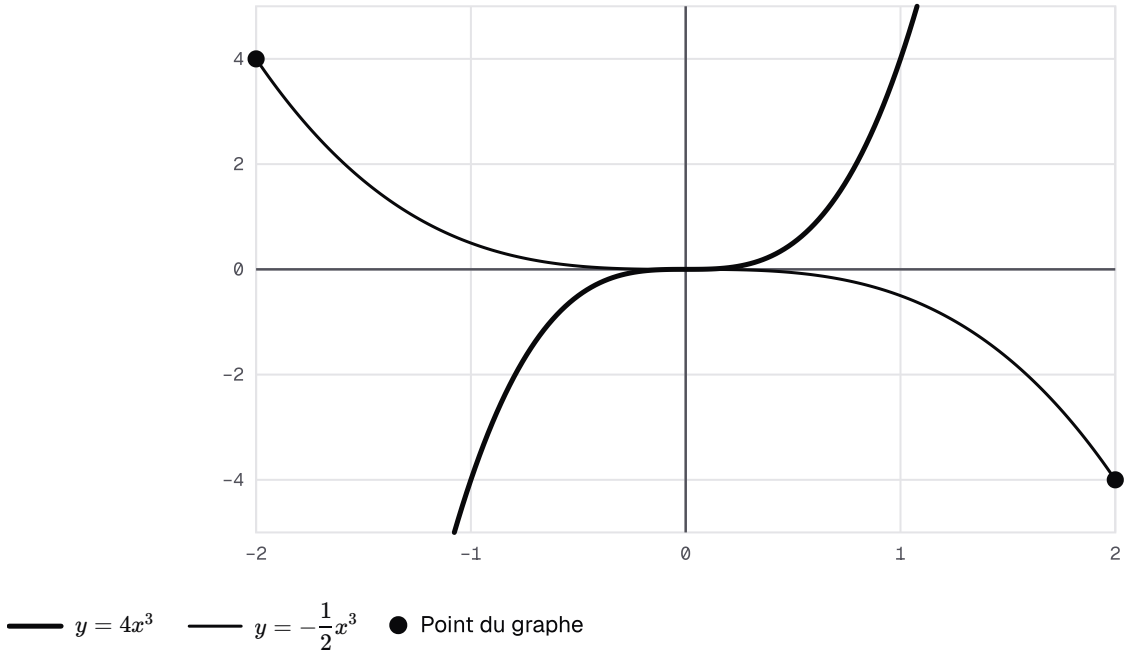
- f est impaire : sa courbe admet l'origine O du repère comme centre de symétrie.
- Si $a > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; si $a < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Idée de la preuve. Pour tout réel x, $-x$ est réel et $f(-x) = a(-x)^3 = -ax^3 = -f(x)$: f est impaire, et, d'après le tronc commun, la courbe d'une fonction impaire admet l'origine O pour centre de symétrie. Pour deux réels distincts x et y, le taux de variation vaut

$$\frac{ax^3 - ay^3}{x - y} = a\left(x^2 + xy + y^2\right).$$

Le facteur $x^2 + xy + y^2$ est strictement positif dès que $x \neq y$; cela se montre avec la forme canonique $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}$, calcul non détaillé ici. Le taux a donc le signe de a, et on conclut par le lien entre taux de variation et monotonie.



Deux fonctions cubes, de coefficients de signes contraires

Exemple : deux fonctions cubes

Premier exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3$. Ici $a = 4 > 0$. D'après la propriété des fonctions $x \mapsto ax^3$, f est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par exemple, $f(-1) = -4$ et $f(1) = 4$.

L'équation $4x^3 = 32$ a pour seule solution $x = 2$: on a $f(2) = 32$, et une fonction strictement croissante ne prend jamais deux fois la même valeur.

Second exemple. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{1}{2}x^3$. Ici $a < 0$: g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, avec $g(-2) = 4$ et $g(2) = -4$.

Comparer sans calculer, à toi

Vérifie : Comparer sans calculer

Sans calculer ces nombres, compare $-\frac{1}{2} \times 3^3$ et $-\frac{1}{2} \times 2^3$.

A. Le premier est plus grand.

Faux.

La fonction $g : x \mapsto -\frac{1}{2}x^3$ renverse l'ordre.

B. Les deux nombres sont égaux.

Faux.

g est strictement décroissante : deux réels distincts ont des images distinctes.

C. Le second est plus grand.

Juste.

Juste : $2 < 3$ et g est strictement décroissante, donc $g(2) > g(3)$.

D. On ne peut pas conclure sans calcul.

Faux.

Le sens de variation de g suffit.

Correction

Ces nombres sont $g(3)$ et $g(2)$, avec $g(x) = -\frac{1}{2}x^3$. Ici $a = -\frac{1}{2} < 0$: g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Comme $2 < 3$, on a $g(2) > g(3)$. Contrôle : $g(2) = -4$ et $g(3) = -\frac{27}{2}$.

À toi : Une racine décalée

Soit $f(x) = \sqrt{x+3}$. Donne D_f, puis calcule $f(-3)$, $f(1)$ et $f(6)$. Compare ensuite $f(2)$ et $f(5)$ sans calculer de racine. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Applique la propriété des fonctions $x \mapsto \sqrt{x+a}$, avec $a = 3$.

Indice 2

$f(1) = \sqrt{4}$ et $f(6) = \sqrt{9}$.

Indice 3

Point délicat : pour comparer, utilise le sens de variation de f, et non une valeur approchée.

Réponse

Ensemble de définition. Ici $a = 3$: $D_f = [-3, +\infty[$.

Valeurs. On a $f(-3) = 0$, $f(1) = \sqrt{4} = 2$ et $f(6) = \sqrt{9} = 3$.

Comparaison. La fonction f est strictement croissante sur D_f, et $2 < 5$: donc $f(2) < f(5)$, soit $\sqrt{5} < \sqrt{8}$.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle méthode pour quelle question

- **Majorer, minorer** : étudier le signe de $f(x) - M$ ou de $f(x) - m$, pour tout x.
- **Utiliser une période** : revenir dans le motif, en ajoutant ou en retranchant un multiple de T.
- **Résoudre une inéquation du second degré** : Δ, racines, signe de a.
- **Comparer deux fonctions** : signe de $f(x) - g(x)$.
- **Sens de variation** : signe du taux $\tau(x, y)$, parité, monotonie d'une composée.
- **Extremum** : changement de sens, puis signe de $f(x) - f(a)$.
- **Symétrie** : calcul de $f(2a - x)$.

Le mot du prof. Avant chaque conclusion, nomme l'intervalle et l'outil employé. Un majorant est un nombre fixe ; un extremum est une valeur atteinte. Ces réflexes te serviront à chaque étude de fonction, dans les chapitres qui suivent.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Généralités sur les fonctions numériques » (1bac · sciences-experimentales · mathematiques)