BURHAN

# Résumé : Étude et représentation des fonctions

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/resume

| Chapitre | Semestre |
| --- | --- |
| Étude et représentation des fonctions | Semestre 2 |

## Asymptotes verticales et horizontales

**Définition : Asymptote verticale**

Soit $f$ une fonction, $a$ un réel et $r$ un réel strictement positif, avec $f$ définie sur $]a, a+r[$ ou sur $]a-r, a[$. Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand $x$ tend vers $a$ à droite, ou à gauche, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe $\mathcal{C}_f$.

**Définition : Asymptote horizontale**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $]\alpha, +\infty[$ et $b$ un réel. Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, on dit que la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$. On définit de même une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$, pour une fonction définie sur un intervalle $]-\infty, \alpha[$.

**À retenir : Lire une asymptote sur une limite**

- Une limite infinie **en un réel** $a$, à droite ou à gauche, donne une asymptote verticale d'équation $x = a$ .
- Une limite **réelle** $b$ en $+\infty$ ou en $-\infty$ donne une asymptote horizontale d'équation $y = b$.

Cherche les premières aux valeurs interdites, les secondes aux bornes infinies de $D_f$.

**Exemple**

**Énoncé.** Asymptotes de la courbe de $x \mapsto \dfrac{5-2x}{x+3}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

**En $-3$.** Le numérateur tend vers $11$. Le dénominateur tend vers $0$, positif à droite de $-3$ et négatif à gauche. Par la limite d'un quotient, la fonction tend vers $+\infty$ à droite et vers $-\infty$ à gauche : la droite d'équation $x = -3$ est asymptote verticale.

**À l'infini.** Par la règle du terme de plus haut degré, la fonction a la même limite que $\dfrac{-2x}{x} = -2$ en $+\infty$ et en $-\infty$. La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale des deux côtés.

**Attention : Une asymptote peut être traversée**

La fonction $x \mapsto \dfrac{x-2}{x^2+1}$ tend vers $0$ en $+\infty$ et en $-\infty$, par la règle du terme de plus haut degré. L'axe des abscisses est donc asymptote horizontale.

Pourtant la fonction s'annule en $2$ : la courbe traverse cette asymptote au point $(2, 0)$. Une asymptote décrit le comportement lointain, pas chaque point.

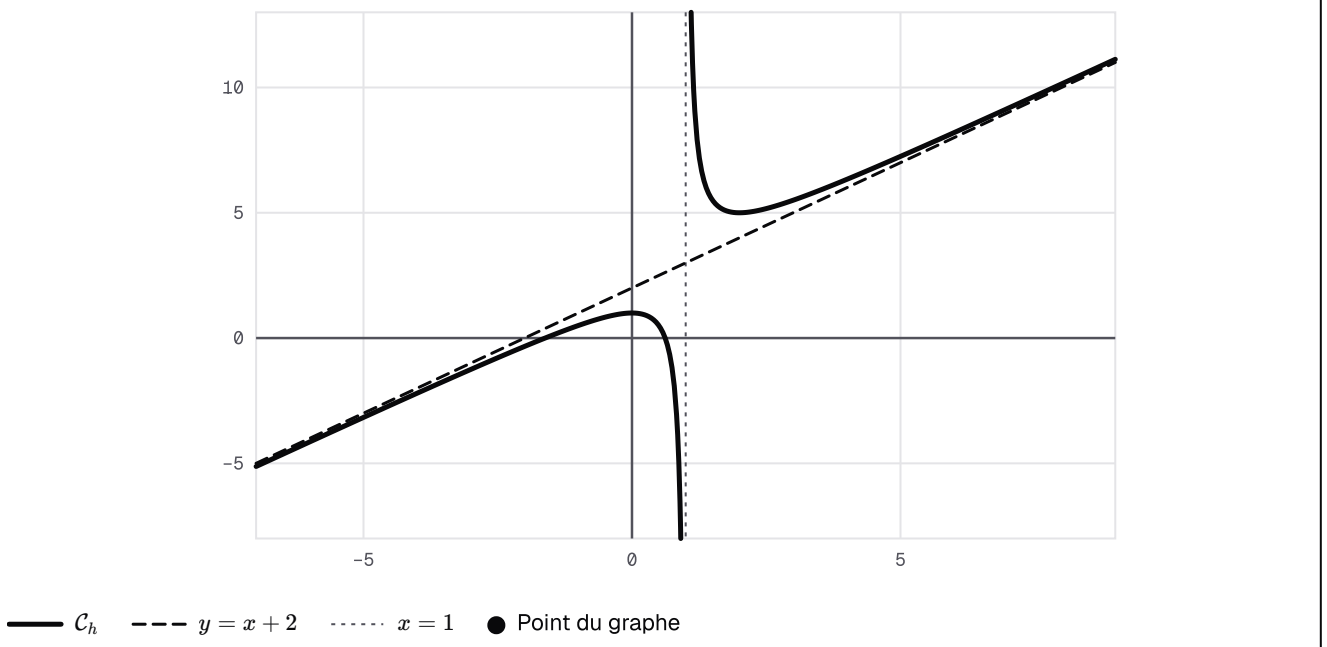
## Asymptote oblique

**Définition : Asymptote oblique**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $]\alpha, +\infty[$, et $a$ et $b$ deux réels avec $a \neq 0$. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

On définit de même une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$, pour une fonction définie sur un intervalle $]-\infty, \alpha[$.




**Exemple avec a = 1 et b = 2 : la droite d'équation y = x + 2 est asymptote oblique à la courbe de x ↦ x + 2 + 1/(x − 1), car l'écart vertical 1/(x − 1) se rapproche de 0 en +∞ et en −∞.**

**Propriété : Recherche d'une asymptote oblique**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $]\alpha, +\infty[$, avec $\alpha \geq 0$, et $a$ et $b$ deux réels avec $a \neq 0$. La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$
$$\text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b.$$

L'énoncé est le même au voisinage de $-\infty$, pour une fonction définie sur un intervalle $]-\infty, \alpha[$ avec $\alpha \leq 0$.

**Méthode : vérifier qu'une droite donnée est asymptote oblique**

1. **Forme** la différence entre $f(x)$ et l'expression $ax + b$ de la droite, puis simplifie-la : même dénominateur, division par $x - d$ ou quantité conjuguée.
2. **Cherche** sa limite à la borne infinie concernée, en citant la règle.
3. **Conclus** : si cette limite est nulle, la droite est asymptote.
4. **Garde** cette différence : son signe servira pour la position.

**Exemple**

**Énoncé.** Soit $x \mapsto \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$, définie pour $x \neq 3$.

**Écriture.** Pour tout réel $x$, $(x-3)(x-2) + 1 = x^2 - 5x + 7$. Donc, pour $x \neq 3$, la valeur de la fonction en $x$ s'écrit $x - 2 + \dfrac{1}{x-3}$.

**Limite.** Sa différence avec $x - 2$ vaut $\dfrac{1}{x-3}$. Par la limite de l'inverse, elle tend vers $0$ en $+\infty$ et en $-\infty$. La droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique des deux côtés.

**Exemple**

**Énoncé.** Branche en $+\infty$ de $x \mapsto \sqrt{4x^2 + 4x + 3}$, définie sur $\mathbb{R}$ car $4x^2 + 4x + 3 = (2x+1)^2 + 2 > 0$.

**Coefficient $a$.** Pour $x > 0$, le quotient par $x$ vaut $\sqrt{4 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^2}}$. Par la limite d'une somme puis d'une racine, il tend vers $2$.

**Ordonnée $b$.** Avec la quantité conjuguée, pour $x > 0$, la fonction moins $2x$ vaut :

$$\frac{4x + 3}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3} + 2x}.$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par $x$, elle tend vers $\dfrac{4}{2 + 2} = 1$.

**Conclusion.** En $+\infty$, la droite d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote oblique.

**Attention : Chaque infini a sa droite**

En $-\infty$, la même fonction n'a pas pour asymptote la droite d'équation $y = 2x + 1$. Pour $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$ : le quotient par $x$ tend vers $-2$.

Le même travail donne alors la droite d'équation $y = -2x - 1$. Refais le calcul à chaque borne infinie.

## Branches paraboliques

**Définition : Branches paraboliques**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $]\alpha, +\infty[$, avec $\alpha \geq 0$, telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

- Si $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.
- Si $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers $0$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.
- Si $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers un réel $a \neq 0$ et si $f(x) - ax$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = ax$.

On définit de même ces branches au voisinage de $-\infty$.

**Exemple**

**Axe des ordonnées.** En $+\infty$, $x \mapsto 4 - x^2$ tend vers $-\infty$. Son quotient par $x$, égal à $\dfrac{4}{x} - x$, tend vers $-\infty$ par la limite d'une somme. En $+\infty$, sa courbe présente ainsi une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

**Axe des abscisses.** En $+\infty$, $x \mapsto \sqrt{x+5}$ tend vers $+\infty$. Pour $x > 0$, son quotient par $x$ vaut $\sqrt{\dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x^2}}$ et tend vers $0$. Sa courbe a une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

**Attention : Le quotient par x ne suffit pas**

Pour $x \mapsto 2x - \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$, le quotient par $x$ vaut $2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et tend vers $2$. Ce n'est pas encore une asymptote.

En effet, la fonction moins $2x$ vaut $-\sqrt{x}$, qui tend vers $-\infty$. La courbe a une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = 2x$.

**Méthode : étudier une branche infinie**

1. **Repère** les valeurs interdites et les bornes infinies de $D_f$.
2. **En un réel** $a$ interdit : une limite infinie à droite ou à gauche de $a$ signale l'asymptote verticale d'équation $x = a$.

3. **En l'infini**, regarde la limite de $f(x)$. Réelle, égale à $b$ : asymptote horizontale d'équation $y = b$. Infinie : passe au quotient $\frac{f(x)}{x}$. S'il tend vers l'infini, la branche suit l'axe des ordonnées ; s'il tend vers $0$, elle suit l'axe des abscisses ; s'il tend vers un réel $a \neq 0$, passe à la différence.
4. **Calcule** la limite de $f(x) - ax$ : limite réelle $b$, asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ ; limite infinie, branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.

## Position d'une courbe et d'une droite

**Propriété : Position relative d'une courbe et d'une droite**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$, $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère et $(D)$ la droite d'équation $y = mx + p$.

- Si $f(x) - (mx + p) > 0$ pour tout $x$ de $I$, alors $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de $(D)$ sur $I$.
- Si $f(x) - (mx + p) < 0$ pour tout $x$ de $I$, alors $\mathcal{C}_f$ est **au-dessous** de $(D)$ sur $I$.
- Les points communs à $\mathcal{C}_f$ et à $(D)$ ont pour abscisses les solutions de l'équation $f(x) = mx + p$.

**Méthode : placer une courbe par rapport à une droite**

1. **Écris** $d(x) = f(x) - (mx + p)$ sur $D_f$.
2. **Transforme**-la en une forme dont le signe se lit : produit, quotient, carré.
3. **Étudie** son signe dans un tableau de signes.
4. **Conclus** : $d$ positive, courbe au-dessus ; $d$ négative, courbe au-dessous ; $d$ nulle, point commun.

**Exemple**

**Énoncé.** Position de la courbe de $x \mapsto x - 2 + \frac{1}{x - 3}$ par rapport à son asymptote $(\Delta)$ d'équation $y = x - 2$.

**Différence.** Pour $x \neq 3$, elle vaut $\frac{1}{x - 3}$, du signe de $x - 3$.

**Conclusion.** La courbe est au-dessus de $(\Delta)$ sur $]3, +\infty[$ et au-dessous sur $]-\infty, 3[$. Elle ne la coupe jamais, car la différence ne s'annule pas.

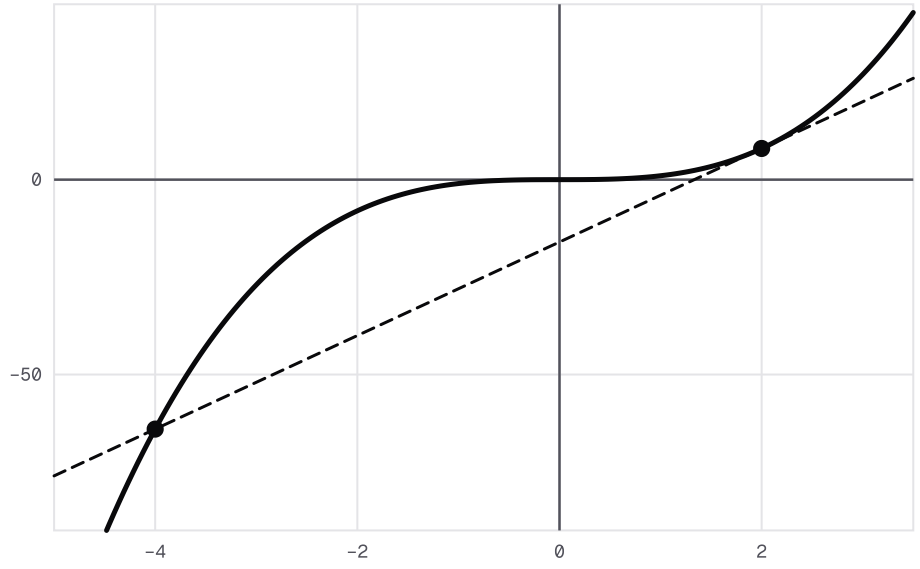
**Exemple**

**Énoncé.** La tangente à la courbe de $x \mapsto x^3$ au point d'abscisse $2$ a pour équation $y = 12x - 16$. Où est la courbe par rapport à elle ?

**Différence.** Elle vaut $x^3 - 12x + 16$. Comme $2$ l'annule, on factorise ; pour tout réel $x$ :

$$x^3 - 12x + 16 = (x-2)^2(x+4).$$

**Signe.** Le carré est positif ou nul. La courbe est au-dessous de la tangente sur $]-\infty, -4[$, au-dessus sur $]-4, 2[$ et sur $]2, +\infty[$. Les points communs ont pour abscisses $-4$ et $2$.




**La courbe de x ↦ x³ et sa tangente y = 12x − 16 au point d'abscisse 2 : elles se touchent en ce point et se coupent au point d'abscisse −4. La courbe est sous la tangente avant −4, au-dessus ensuite.**

Signe de l'écart entre la courbe de la fonction cube et sa tangente au point d'abscisse 2

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x-2)^2(x+4)$ | | − | 0 | + | 0 | + | |

## Concavité et dérivée seconde

**Définition : Courbe convexe, courbe concave**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

- On dit que $\mathcal{C}_f$ est **convexe** sur $I$ si, sur $I$, elle est située au-dessus de chacune de ses tangentes en un point d'abscisse dans $I$ : pour tous réels $a$ et $x$ de $I$, $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$.
- On dit que $\mathcal{C}_f$ est **concave** sur $I$ si, sur $I$, elle est située au-dessous de chacune de ces tangentes : pour tous réels $a$ et $x$ de $I$, $f(x) \leq f'(a)(x-a) + f(a)$.

**Propriété : Signe de la dérivée seconde et concavité**

Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $I$.

- Si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x$ de $I$, alors $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $I$.
- Si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x$ de $I$, alors $\mathcal{C}_f$ est concave sur $I$.

**À retenir : Ce que dit le signe de la dérivée seconde**

Si $f''$ est positive, $f'$ croît : les pentes des tangentes augmentent et la courbe tourne vers le haut. Si $f''$ est négative, les pentes diminuent et la courbe tourne vers le bas.

Une parabole ouverte vers le haut est convexe.

**Exemple**

**Énoncé.** Concavité de la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0, +\infty[$.

**Dérivées.** Sur $]0, +\infty[$, la dérivée vaut $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. D'après la dérivée de l'inverse, la dérivée seconde vaut $-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$, strictement négative.

**Conclusion.** La courbe est concave sur $]0, +\infty[$ : elle reste sous ses tangentes. Au point d'abscisse $4$, la tangente d'équation $y = \dfrac{x}{4} + 1$ est au-dessus de la courbe, car pour $x > 0$ :

$$\begin{aligned} &\frac{x}{4} + 1 - \sqrt{x} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - 2)^2}{4} \geq 0. \end{aligned}$$

**Remarque : Sur quoi repose ce lien**

La règle « dérivée seconde positive, courbe convexe » s'appuie sur un résultat admis au chapitre « Dérivabilité » : les variations d'une fonction se lisent sur le signe de sa dérivée.

## Points d'inflexion

**Définition : Point d'inflexion**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$ et $a$ un réel de $I$. On dit que le point $A(a, f(a))$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ si la courbe **change de concavité** en $A$ : il existe un réel $r > 0$, avec $]a - r, a + r[$ inclus dans $I$, tel que $\mathcal{C}_f$ soit convexe sur $]a - r, a]$ et concave sur $[a, a + r[$, ou concave sur $]a - r, a]$ et convexe sur $[a, a + r[$.

**Propriété : Dérivée seconde qui s'annule en changeant de signe**

Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert $I$, $a$ un réel de $I$ et $r$ un réel strictement positif tel que $]a-r, a+r[$ soit inclus dans $I$. Si $f''(a)=0$, et si $f''(x)>0$ pour tout $x$ de $]a-r, a[$ et $f''(x)<0$ pour tout $x$ de $]a, a+r[$, ou l'inverse, alors le point $A(a, f(a))$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$.

**Méthode : concavité et points d'inflexion**

1. **Calcule** $f''(x)$, en nommant l'intervalle et la règle.
2. **Étudie** son signe dans un tableau.
3. **Conclus** sur la concavité : convexe là où $f''$ est positive, concave là où elle est négative.
4. **Repère** comme abscisses d'inflexion les réels où $f''$ s'annule **et** change de signe. Calcule l'ordonnée, puis la tangente si on la demande.

**Exemple**

**Énoncé.** Points d'inflexion de la courbe de $x \mapsto x^4 - 6x^2$.

**Dérivées.** Sur $\mathbb{R}$, d'après la dérivée d'une somme, la dérivée vaut $4x^3 - 12x$ et la dérivée seconde vaut :

$$12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1).$$

**Signe.** La dérivée seconde est positive sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$, négative sur $]-1, 1[$. Elle s'annule en changeant de signe en $-1$ et en $1$.

**Conclusion.** Les points $(-1, -5)$ et $(1, -5)$ sont des points d'inflexion. En $(1, -5)$, la tangente a pour équation $y = -8x + 3$.

Signe de la dérivée seconde de x ↦ x⁴ − 6x²

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $12(x-1)(x+1)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

**À retenir : La courbe traverse sa tangente**

En un point d'inflexion, la courbe passe d'un côté de sa tangente à l'autre. Pour $x \mapsto x^4 - 6x^2$ en $(1, -5)$, l'écart à la tangente vaut, pour tout réel $x$ :

$$x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x-1)^3(x+3).$$

Ce produit change de signe en $1$.

**Attention : Annulation sans changement de signe**

Pour $x \mapsto (x-2)^4$, la dérivée seconde vaut $12(x-2)^2$ : elle s'annule en $2$ mais reste positive ou nulle partout. La courbe est convexe sur $\mathbb{R}$.

La tangente en $(2, 0)$ est l'axe des abscisses et, pour $x \neq 2$, $(x-2)^4 > 0$ : la courbe reste strictement au-dessus d'elle des deux côtés, elle ne traverse pas sa tangente. Le point $(2, 0)$ n'est donc pas un point d'inflexion.

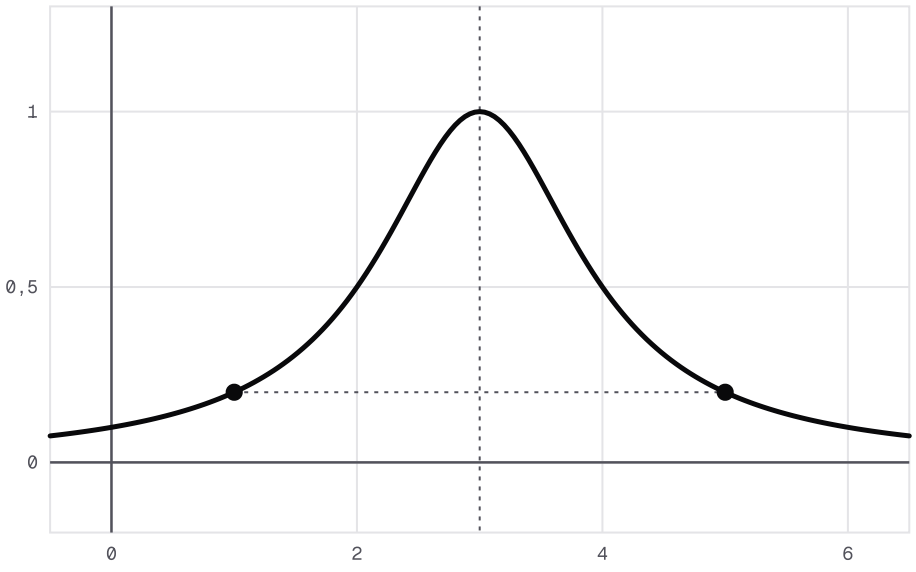
Un zéro de $f''$ ne suffit pas : il faut que son signe change.

## Symétries et réduction du domaine

**Propriété : Symétrie et réduction du domaine d'étude**

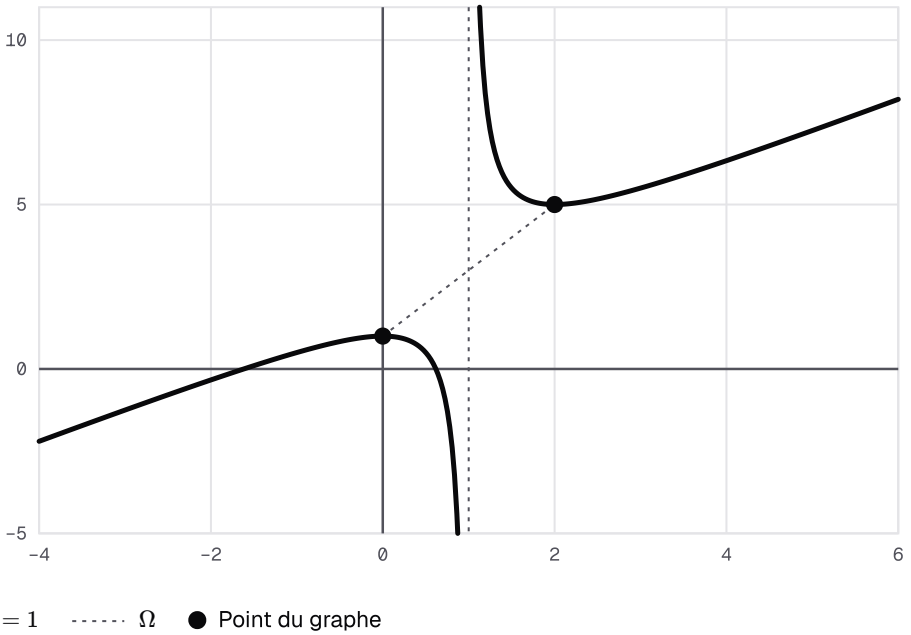
Le plan est muni d'un repère orthogonal. Soit $f$ une fonction, et $a$ et $b$ deux réels tels que $2a - x$ appartienne à $D_f$ pour tout $x$ de $D_f$.

- Si $f(2a-x) = f(x)$ pour tout $x$ de $D_f$, la droite d'équation $x = a$ est un **axe de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ : on étudie $f$ sur $D_f \cap [a, +\infty[$, puis on complète par la symétrie d'axe cette droite. Les variations sont **inversées** de part et d'autre de $a$.
- Si $f(2a-x) + f(x) = 2b$ pour tout $x$ de $D_f$, le point $\Omega(a, b)$ est un **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ : on étudie $f$ sur $D_f \cap [a, +\infty[$, puis on complète par la symétrie de centre $\Omega$. Les variations sont **conservées**.
- Pour $a = 0$, on retrouve les fonctions paires (axe des ordonnées) ; pour $a = 0$ et $b = 0$, les fonctions impaires (origine).




$y = \frac{1}{x^2 - 6x + 10}$ $x = 3$ Point du graphe

**Exemple d'axe, avec a = 3 : pour x ↦ 1/(x² − 6x + 10), les images de x et de 6 − x sont égales ; on étudie la fonction sur [3, +∞[, et les variations s'inversent de l'autre côté.**




**Exemple de centre, avec a = 1 et b = 3 : pour x ↦ x + 2 + 1/(x − 1), la somme des images de x et de 2 − x vaut 6, et le point Ω(1, 3) est centre de symétrie ; les variations sont conservées.**

**Propriété : Fonction périodique et réduction du domaine d'étude**

Soit $f$ une fonction périodique de période $T > 0$ et $\alpha$ un réel.

- On étudie $f$ sur $D_f \cap [\alpha, \alpha + T]$ ; la courbe $\mathcal{C}_f$ s'obtient à partir de la partie tracée sur cet intervalle par les translations de vecteurs $kT\vec{i}$, où $k$ est un entier relatif.
- Si de plus $f$ est paire ou impaire, on étudie $f$ sur $D_f \cap \left[0, \frac{T}{2}\right]$, on complète par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées ou à l'origine pour obtenir la courbe sur $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, puis par les translations.

**Méthode : réduire le domaine d'étude**

1. **Vérifie** que $D_f$ s'y prête : $-x$, $2a - x$, ou $x + T$ et $x - T$ restent dans $D_f$.
2. **Calcule** $f(-x)$, $f(2a - x)$ ou $f(x + T)$, puis compare avec $f(x)$.
3. **Choisis** où étudier $f$ : la moitié retenue, une période, ou $D_f \cap \left[0, \frac{T}{2}\right]$ si $f$ est de plus paire ou impaire.
4. **Complète** enfin la courbe : symétrie d'abord, translations ensuite.

**Exemple**

**Énoncé.** Soit $x \mapsto (x^2 - 4x)^2$, définie sur $\mathbb{R}$. La droite d'équation $x = 2$ est-elle un axe de symétrie ?

**Calcul.** Pour tout réel $x$, $4 - x$ est réel et $(4 - x)^2 - 4(4 - x) = x^2 - 4x$. La fonction prend donc la même valeur en $4 - x$ et en $x$.

**Conclusion.** La droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie : on étudie la fonction sur $[2, +\infty[$ seulement.

### Exemple

**Énoncé.** Soit $x \mapsto \dfrac{x + 5}{x + 1}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Le point $\Omega(-1, 1)$ est-il un centre de symétrie ?

**Domaine.** Si $x \neq -1$, alors $-2 - x \neq -1$.

**Calcul.** Pour $x \neq -1$, la valeur en $-2 - x$ vaut :

$$\frac{3 - x}{-1 - x} = \frac{x - 3}{x + 1}.$$

Ajoutée à la valeur en $x$, elle donne $\dfrac{2x + 2}{x + 1} = 2$.

**Conclusion.** La somme vaut $2 \times 1$ : le point $\Omega(-1, 1)$ est centre de symétrie.

### Exemple

**Énoncé.** Soit $x \mapsto \sin(3x)$, définie sur $\mathbb{R}$.

**Période.** Pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned}&\sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right)\\ &= \sin(3x + 2\pi) = \sin(3x).\end{aligned}$$

La fonction est donc périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$.

**Parité.** Pour tout réel $x$, $\sin(-3x) = -\sin(3x)$ : elle est impaire.

**Domaine réduit.** On l'étudie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$. On complète par la symétrie de centre $O$, puis par les translations de vecteurs $\dfrac{2k\pi}{3}\vec{i}$.

### Attention : Une demi-période n'est pas une période

Pour $x \mapsto \sin(3x)$, translater de $\dfrac{\pi}{3}$ la partie tracée sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ est faux. En effet, pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned}&\sin\left(3\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)\\ &= \sin(3x + \pi) = -\sin(3x).\end{aligned}$$

On complète d'abord par la symétrie de centre $O$, sur $\left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right]$, puis on translate d'une période entière.

## Courbe d'un polynôme de degré 3

**Propriété : Courbe d'une fonction polynôme de degré 3**

Soit $a$, $b$, $c$ et $d$ des réels, avec $a \neq 0$, et $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. On pose $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet un **unique** point d'inflexion, $\Omega(x_0, f(x_0))$, et ce point est un **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f$.

**À retenir : Où chercher le centre**

Le centre de la courbe est son point d'inflexion, d'abscisse $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$ : la dérivée seconde $6ax + 2b$ s'y annule. Calcule $f(x_0)$ et place ce point avant de tracer. Les deux moitiés de la courbe se correspondent par la symétrie de centre ce point.

**Exemple**

**Énoncé.** Soit $x \mapsto 2x^3 - 6x^2 + 1$, définie sur $\mathbb{R}$.

**Inflexion.** Ici $a = 2$ et $b = -6$, donc $x_0 = 1$. La dérivée seconde vaut $12x - 12$ et change de signe en $1$. La valeur en $1$ est $-3$.

**Centre.** Le point $\Omega(1, -3)$ est point d'inflexion et centre de symétrie de la courbe.

**Variations.** La dérivée vaut $6x^2 - 12x = 6x(x - 2)$ : maximum local $1$ en $0$, minimum local $-7$ en $2$. Ces deux valeurs ont pour moyenne $-3$, l'ordonnée du centre.

Variations de x ↦ 2x³ − 6x² + 1 sur $\mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $6x(x-2)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $2x^3 - 6x^2 + 1$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-7$ | ↗ | $+\infty$ |

## Plan d'étude d'une fonction

**Méthode : le plan d'étude d'une fonction**

1. **Détermine** $D_f$, puis cherche une parité, une période, un axe ou un centre qui réduit l'étude.
2. **Calcule** les limites aux bornes de l'intervalle étudié ; nomme chaque branche infinie.
3. **Dérive** : étudie le signe de $f'(x)$, dresse le tableau.
4. **Complète** : dérivée seconde, points d'inflexion, position par rapport aux asymptotes, tangentes utiles.

5. **Trace** la courbe, puis complète-la par symétrie ou par translation.

**Méthode : tracer une courbe**

1. **Choisis** l'unité pour que les extremums et les points remarquables tiennent sur la feuille.
2. **Trace** en premier les asymptotes, puis les tangentes horizontales aux extremums.
3. **Place** les points du tableau, les points d'inflexion et les intersections avec les axes.
4. **Dessine** la courbe par ces points en suivant les flèches du tableau, la concavité et le côté de chaque asymptote.

**Exemple**

**Fonction.** $x \mapsto x - 2 + \dfrac{1}{x-3}$, déjà rencontrée, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

**Bornes.** Par la limite de l'inverse, elle tend vers $+\infty$ à droite de $3$ et vers $-\infty$ à gauche : asymptote verticale d'équation $x = 3$. Asymptote oblique d'équation $y = x - 2$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

**Variations.** D'après la dérivée d'une somme et de l'inverse, pour $x \neq 3$, la dérivée vaut :

$$1 - \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{(x-2)(x-4)}{(x-3)^2}.$$

Maximum local $-1$ en $2$, minimum local $3$ en $4$.

**Symétrie.** Si $x \neq 3$, alors $6 - x \neq 3$ ; la somme des valeurs en $6 - x$ et en $x$ vaut $2$ : le point $(3, 1)$ est centre de symétrie.

## Résoudre graphiquement

**Méthode : résoudre graphiquement**

1. **Écris** l'équation sous la forme $f(x) = m$ ou $f(x) = g(x)$.
2. **Lis** les points communs à $\mathcal{C}_f$ et à la droite d'équation $y = m$, ou à $\mathcal{C}_g$ : leurs abscisses sont les solutions.
3. **Pour une inéquation** $f(x) > g(x)$, repère où $\mathcal{C}_f$ passe au-dessus de $\mathcal{C}_g$.
4. **Présente** ta réponse ainsi : « graphiquement, l'équation semble avoir… », avec des valeurs approchées. Confirme par le calcul quand tu le peux.

**Exemple**

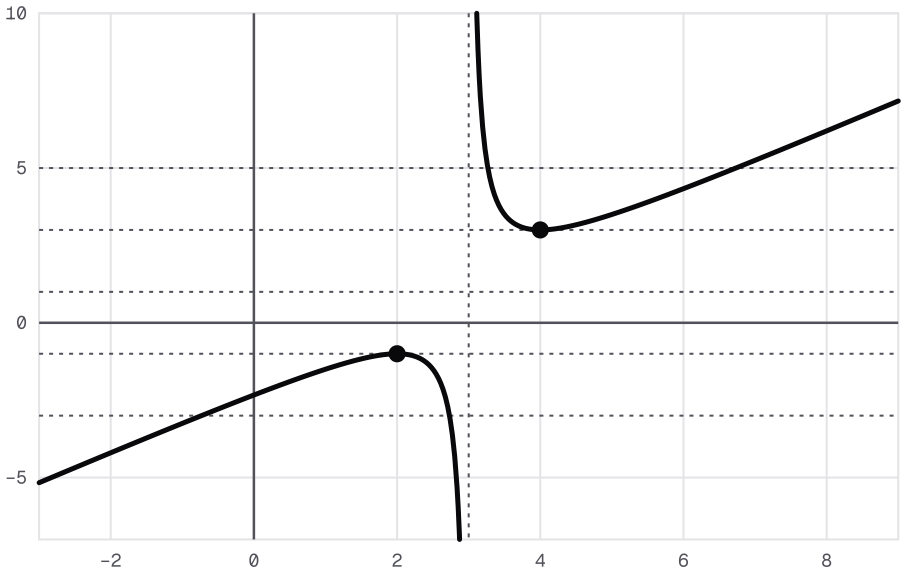
**Énoncé.** Nombre de solutions de l'équation $x - 2 + \dfrac{1}{x-3} = m$, selon le réel $m$.

**Lecture.** On coupe la courbe par la droite horizontale d'équation $y = m$. Graphiquement : deux solutions si $m < -1$ ou $m > 3$ ; une seule si $m = -1$ ou $m = 3$ ; aucune si $-1 < m < 3$.

**Confirmation.** Pour $x \neq 3$, l'équation équivaut à :

$$x^2 - (m+5)x + 3m + 7 = 0,$$

de discriminant $(m-3)(m+1)$. Le signe de ce discriminant confirme la lecture.




$y = x - 2 + \dfrac{1}{x-3}$ $x = 3$ $y = -3$ $y = -1$ $y = 1$ $y = 3$ $y = 5$

● Point du graphe

**Courbe de x ↦ x − 2 + 1/(x − 3) et droites y = m pour m = −3, −1, 1, 3 et 5 : deux points communs si m < −1 ou m > 3, un seul si m = −1 ou m = 3, aucun entre les deux.**

**À retenir : Une lecture, pas une preuve**

Un nombre de solutions lu sur une courbe reste une conjecture appuyée sur le tracé. Écris-le avec « graphiquement » ou « semble ». Un calcul, par exemple un discriminant, le confirme quand l'équation s'y prête.

## Quelle méthode pour quelle question ?

**Méthode : Quelle méthode pour quelle question ?**

- **Limite infinie en un réel** : asymptote verticale.
- **Limite réelle à l'infini** : asymptote horizontale.
- **Droite oblique donnée** : limite nulle de la différence.

- **Droite oblique à trouver** : limite de $\frac{f(x)}{x}$, puis de $f(x) - ax$.
- **Position** : signe de $f(x) - (mx + p)$.
- **Concavité** : signe de $f''$.
- **Inflexion** : $f''$ s'annule **et** change de signe.
- **Axe ou centre** : calcul de $f(2a - x)$.
- **Période** : calcul de $f(x + T)$, puis parité.
- **Nombre de solutions** : lecture graphique, confirmée par le calcul.

**Asymptote verticale x = a**

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$
$$\text{ou } \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

**Asymptote horizontale y = b**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

**Asymptote oblique y = ax + b**

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

**Recherche de a et de b**

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x},$$
$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$$

**Branche de direction l'axe des ordonnées**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

**Branche de direction l'axe des abscisses**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

**Courbe au-dessus de la droite**

$$f(x) - (mx + p) > 0$$

**Convexe, concave**

$$f'' \geq 0 \ \Rightarrow \ \text{convexe},$$
$$f'' \leq 0 \ \Rightarrow \ \text{concave}$$

**Axe de symétrie x = a**

$$f(2a - x) = f(x)$$

**Centre de symétrie de coordonnées (a, b)**

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

**Période T**

$$f(x + T) = f(x)$$

**Centre d'une courbe de degré 3**

$$x_0 = -\frac{b}{3a}$$

**À retenir : Rédiger en devoir**

Pour chaque limite, nomme l'opération ou la limite de référence. Pour chaque dérivée, écris l'intervalle et la règle. Pour chaque variation, nomme le signe de $f'$ et l'intervalle ; pour chaque concavité, le signe de $f''$ et l'intervalle. Un nombre de solutions lu sur la courbe s'écrit comme une lecture.