BURHAN

Étude et représentation des fonctions : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Étude et représentation des fonctions	Niveau examen	5

Exercice 1 6 pts

Étude complète d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 6}{x - 1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 1 pts

Calculer $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \to 1^-} f(x)$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Début : calcule la limite du numérateur en 1. **Ensuite :** étudie le signe de $x - 1$ à droite et à gauche de 1.

2. 1 pts

Vérifier que, pour tout x de D_f :

$$f(x) = x + 3 + \frac{9}{x - 1}.$$

En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis une asymptote oblique (Δ) à $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Début : développe $(x + 3)(x - 1) + 9$. **Ensuite :** la différence $f(x) - (x + 3)$ se lit sur la nouvelle écriture.

3. 0,75 pts

Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ).

INDICE

Début : reprends la différence de la question 2. **Ensuite :** son numérateur est positif.

4. 0,75 pts

Justifier que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, et vérifier que, pour tout x de D_f :

$$f'(x) = \frac{(x - 4)(x + 2)}{(x - 1)^2}.$$

INDICE

Début : dérive l'écriture de la question 2 avec la dérivée de l'inverse. **Ensuite :** réduis au même dénominateur et factorise $(x - 1)^2 - 9$.

5. 0,75 pts

Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f. En déduire les extremums locaux de f.

INDICE

Début : le dénominateur est strictement positif ; étudie le signe du trinôme $(x-4)(x+2)$. **Ensuite :** calcule $f(-2)$ et $f(4)$ avec l'écriture de la question 2.

6. 0,75 pts

Calculer $f(2-x)+f(x)$ pour x dans D_f. En déduire un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Début : si $x \neq 1$, alors $2-x \neq 1$; utilise l'écriture de la question 2. **Ensuite :** remarque que $\dfrac{9}{1-x} = -\dfrac{9}{x-1}$.

7. 0,5 pts

Calculer $f''(x)$. En déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

INDICE

Début : dérive $x \mapsto -\dfrac{9}{(x-1)^2}$ avec la dérivée de l'inverse de $x \mapsto (x-1)^2$.

8. 0,5 pts

Tracer (Δ), l'asymptote verticale et $\mathcal{C}_f$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

INDICE

Début : trace les deux asymptotes, puis place $\Omega(1,4)$, les points $(-2,-2)$ et $(4,10)$. **Ensuite :** respecte la position de la question 3 et la concavité de la question 7.

Exercice 2 6 pts

Étude complète d'une fonction irrationnelle

Soit f la fonction définie sur $D_f =]-\infty, 1]$ par $f(x) = x + 2\sqrt{1-x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,75 pts

On admet que, pour tout réel $x < 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = 1 - 2\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}.$$

En déduire $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

INDICE

Début : $\dfrac{1}{x^2}$ et $\dfrac{1}{x}$ tendent vers 0 en $-\infty$. **Ensuite :** écris $f(x) = x \times \dfrac{f(x)}{x}$.

2. 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - x]$ et interpréter. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$.

INDICE

Début : $f(x) - x = 2\sqrt{1-x}$. **Ensuite :** une racine carrée est positive ou nulle.

3. 0,75 pts

Pour $x < 1$, vérifier que :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{1-x}}.$$

La fonction f est-elle dérivable à gauche en 1 ? Interpréter.

INDICE

Début : $f(1) = 1$ et, pour $x < 1$, $x - 1 = -\left(\sqrt{1-x}\right)^2$. **Ensuite :** cherche la limite de $\dfrac{2}{\sqrt{1-x}}$ quand x tend vers 1 à gauche. **Rappel :** un taux d'accroissement qui tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ donne une demi-tangente verticale.

4. 1 pts

Justifier que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et vérifier que, pour tout $x < 1$:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x} - 1}{\sqrt{1-x}}.$$

Étudier le signe de $f'(x)$.

INDICE

Début : dérive $x \mapsto \sqrt{1-x}$ avec la dérivée de la racine d'une fonction. **Ensuite :** compare $\sqrt{1-x}$ et 1, c'est-à-dire $1 - x$ et 1.

5. 0,75 pts

En déduire le tableau de variations de f sur $]-\infty, 1]$ et le maximum de f.

INDICE

Début : la question 4 donne les variations sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, 1[$. **Ensuite :** calcule $f(0)$ et $f(1)$.

6. 0,75 pts

Calculer $f''(x)$ pour $x < 1$. En déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Début : dérive $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ avec la dérivée de l'inverse.

7. 0,75 pts

Résoudre l'équation $f(x) = 0$. En déduire le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

INDICE

Début : $f(x) = 0$ équivaut à $2\sqrt{1-x} = -x$; une racine est positive, donc $x \leq 0$. **Ensuite :** élève au carré et résous l'équation du second degré obtenue.

8. 0,5 pts

Tracer la droite (D), la demi-tangente au point $(1, 1)$ et $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Début : place les points $(0, 2)$ et $(1, 1)$, puis le point de l'axe des abscisses trouvé à la question 7. **Ensuite :** respecte la position de la question 2 et la concavité de la question 6.

Exercice 3 6 pts

Étude complète d'une fonction trigonométrique

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 1 pts

Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$. Vérifier que f est périodique de période 2π et impaire. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$, et dire comment compléter la courbe.

INDICE

Début : pour tout réel x, $\cos x \geq -1$; le sinus est impair, le cosinus est pair, et tous deux sont de période 2π. **Ensuite :** une fonction impaire de période T s'étudie sur $D_f \cap \left[0, \dfrac{T}{2}\right]$; ici $D_f = \mathbb{R}$.

2. 1 pts

Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$.

INDICE

Début : dérive avec la règle de la dérivée d'un quotient. **Ensuite :** simplifie le numérateur avec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

3. 1,25 pts

Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0, \pi]$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.

INDICE

Début : le dénominateur est un carré non nul. **Ensuite :** sur $[0, \pi]$, $\cos x > -\dfrac{1}{2}$ équivaut à $x < \dfrac{2\pi}{3}$.

4. 0,75 pts

Écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ à l'origine, puis au point d'abscisse π.

INDICE

Début : calcule $f'(0)$ et $f'(\pi)$ avec la question 2.

5. 0,75 pts

Résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans $[0, \pi]$, puis dans $[-\pi, \pi]$. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[-\pi, \pi]$.

INDICE

Début : un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul. **Ensuite :** le dénominateur est strictement positif ; utilise l'imparité pour $[-\pi, 0]$.

6. 1,25 pts

Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi, \pi]$. En déduire, par une lecture graphique, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ dans $[-\pi, \pi]$.

INDICE

Début : compare $\dfrac{1}{2}$ au maximum $\dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58$. **Ensuite :** sur $[-\pi, 0]$, la question 5 donne le signe de f.

Exercice 4 6 pts

Étude complète d'une fonction polynôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32x$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, puis $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Début : pour $x \neq 0$, mets x^4 en facteur : $f(x) = x^4\left(1 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{12}{x^2} + \dfrac{32}{x^3}\right)$. **Ensuite :** de même, $\dfrac{f(x)}{x} = x^3\left(1 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{12}{x^2} + \dfrac{32}{x^3}\right)$.

2. 1 pts

Vérifier que, pour tout réel x :

$$f(x) = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 16).$$

Calculer $(2-x)^2 - 2(2-x)$, puis en déduire que la droite d'équation $x = 1$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Début : pose $u = x^2 - 2x$; le produit vaut $u(u-16) = u^2 - 16u$. **Ensuite :** compare $f(2-x)$ et $f(x)$; ici $a = 1$ et $2a - x = 2 - x$.

3. 0,75 pts

Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = 4(x-1)(x+2)(x-4)$. Étudier le signe de $f'(x)$.

INDICE

Début : dérive terme à terme, puis développe $(x+2)(x-4)$ et multiplie par $x-1$. **Ensuite :** dresse un tableau de signes des trois facteurs.

4. 0,75 pts

Dresser le tableau de variations de f. En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$ et le maximum local de f.

INDICE

Début : calcule $f(-2)$, $f(1)$ et $f(4)$ avec l'écriture de la question 2. **Ensuite :** l'axe de la question 2 explique l'égalité $f(-2) = f(4)$.

5. 1 pts

Calculer $f''(x)$ et étudier son signe. En déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$ et ses points d'inflexion A et B, A étant celui dont l'abscisse est la plus petite.

INDICE

Début : dérive $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 24x + 32$, puis factorise par 12. **Ensuite :** le trinôme $x^2 - 2x - 2$ a pour discriminant 12 ; pour les ordonnées, remarque que $x^2 - 2x = 2$ en ses racines.

6. 1 pts

Résoudre l'équation $f(x) = 0$. En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.

INDICE

Début : utilise l'écriture de la question 2 et la règle du produit nul. **Ensuite :** le trinôme $x^2 - 2x - 16$ a pour discriminant $68 = 4 \times 17$; dresse un tableau de signes de $x(x-2)$ et de $x^2 - 2x - 16$.

7. 0,75 pts

Tracer la droite d'équation $x = 1$ et $\mathcal{C}_f$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, en choisissant des unités différentes sur les deux axes.

INDICE

Début : place les points des questions 4, 5 et 6. **Ensuite :** respecte la concavité de la question 5 et la symétrie de la question 2.

Exercice 5 6 pts

Étude complète d'une fonction rationnelle paire

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,75 pts

Déterminer D_f et vérifier que f est paire. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $D_f \cap [0, +\infty[$, et dire comment compléter la courbe.

INDICE

Début : $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. **Ensuite :** pour x dans D_f, $-x$ est dans D_f et $(-x)^2 = x^2$.

2. 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \to 1^-} f(x)$. Interpréter graphiquement, puis en déduire, par la question 1, une seconde asymptote verticale.

INDICE

Début : calcule la limite du numérateur en 1. **Ensuite :** près de 1, $x+1 > 0$, donc x^2-1 a le signe de $x-1$.

3. 1 pts

Vérifier que, pour tout x de D_f :

$$f(x) = 1 + \frac{4}{x^2-1}.$$

En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et une asymptote (Δ) à $\mathcal{C}_f$, puis la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ) sur D_f.

INDICE

Début : écris $x^2 + 3 = (x^2-1) + 4$. **Ensuite :** le signe de $f(x) - 1$ est celui de $x^2 - 1$.

4. 1 pts

Justifier que f est dérivable sur D_f et vérifier que, pour tout x de D_f :

$$f'(x) = \frac{-8x}{(x^2-1)^2}.$$

En déduire le tableau de variations de f sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ et l'extremum local de f.

INDICE

Début : dérive l'écriture de la question 3 avec la dérivée de l'inverse de $x \mapsto x^2 - 1$. **Ensuite :** le dénominateur de $f'(x)$ est strictement positif : $f'(x)$ a le signe de $-8x$, aussi sur $]-1, 0[$, ce qui donne la nature de l'extremum en 0.

5. 0,75 pts

Vérifier que, pour tout x de D_f :

$$f''(x) = \frac{8(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}.$$

En déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$ sur $]-\infty,-1[$, sur $]-1,1[$ et sur $]1,+\infty[$. La courbe admet-elle un point d'inflexion ?

INDICE

Début : dérive le quotient $\frac{-8x}{(x^2-1)^2}$, sachant que la dérivée de $x \mapsto (x^2-1)^2$ est $x \mapsto 4x(x^2-1)$. **Ensuite :** simplifie par x^2-1 ; $(x^2-1)^3$ a le signe de x^2-1.

6. 1 pts

Résoudre l'équation $f(x) = 3$.

Vérifier que, pour tout x de D_f :

$$f(x) + 3 = \frac{4x^2}{x^2-1}.$$

En déduire que, si $-3 < m \leq 1$, l'équation $f(x) = m$ n'a aucune solution. Préciser, par une lecture graphique, le nombre de solutions dans les autres cas.

INDICE

Début : pour x dans D_f, $f(x) = 3$ équivaut à $x^2 + 3 = 3(x^2-1)$. **Ensuite :** $f(x) + 3 \leq 0$ sur $]-1,1[$ et, d'après la question 3, $f(x) > 1$ sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$.

7. 0,75 pts

Tracer les asymptotes et $\mathcal{C}_f$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

INDICE

Début : trace les trois asymptotes, puis place les points $(0,-3)$, $(-\sqrt{3},3)$ et $(\sqrt{3},3)$. **Ensuite :** respecte la position de la question 3, la concavité de la question 5 et la symétrie de la question 1.