BURHAN

Étude et représentation des fonctions : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Étude et représentation des fonctions	Niveau examen	5

Exercice 1 6 pts

Étude complète d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 6}{x - 1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 1 pts

Calculer $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \to 1^-} f(x)$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Début : calcule la limite du numérateur en 1. **Ensuite :** étudie le signe de $x - 1$ à droite et à gauche de 1.

CORRIGÉ

Numérateur et dénominateur. Quand x tend vers 1, $x^2 + 2x + 6$ tend vers $1 + 2 + 6 = 9 > 0$, et $x - 1$ tend vers 0, en restant positif à droite de 1 et négatif à gauche.

Conclusion. D'après la limite d'un quotient, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$. La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

2. 1 pts

Vérifier que, pour tout x de D_f :

$$f(x) = x + 3 + \frac{9}{x - 1}.$$

En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis une asymptote oblique (Δ) à $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Début : développe $(x + 3)(x - 1) + 9$. **Ensuite :** la différence $f(x) - (x + 3)$ se lit sur la nouvelle écriture.

CORRIGÉ

Écriture. Pour tout x de D_f :

$$\begin{aligned} &(x + 3)(x - 1) + 9 \\ &= x^2 + 2x - 3 + 9 \\ &= x^2 + 2x + 6. \end{aligned}$$

En divisant par $x - 1 \neq 0$, on obtient $f(x) = x + 3 + \dfrac{9}{x - 1}$.

Limites. D'après la limite de l'inverse, $\dfrac{9}{x - 1}$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$. D'après la limite d'une somme, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Asymptote. Pour tout x de D_f, $f(x) - (x + 3) = \dfrac{9}{x - 1}$, qui tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$. La droite (Δ) d'équation $y = x + 3$ est donc asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. 0,75 pts

Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ).

INDICE

Début : reprends la différence de la question 2. **Ensuite :** son numérateur est positif.

CORRIGÉ

Signe de la différence. D'après la question 2, pour tout x de D_f, $f(x)-(x+3)=\dfrac{9}{x-1}$. Comme $9>0$, ce quotient a le signe de $x-1$ et ne s'annule pas.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (Δ) sur $]1,+\infty[$ et au-dessous de (Δ) sur $]-\infty,1[$; elle ne coupe pas (Δ).

4. 0,75 pts

Justifier que f est dérivable sur $]-\infty,1[$ et sur $]1,+\infty[$, et vérifier que, pour tout x de D_f :

$$f'(x)=\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}.$$

INDICE

Début : dérive l'écriture de la question 2 avec la dérivée de l'inverse. **Ensuite :** réduis au même dénominateur et factorise $(x-1)^2-9$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Sur chacun des intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$, $x-1\neq 0$. D'après la dérivée d'une somme et la dérivée de l'inverse, f y est dérivable et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1-\frac{9}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-1)^2-9}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Factorisation. D'après l'identité $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$:

$$\begin{aligned} &(x-1)^2-3^2 \\ &=(x-1-3)(x-1+3) \\ &=(x-4)(x+2). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout x de D_f, $f'(x)=\dfrac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$.

5. 0,75 pts

Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f. En déduire les extremums locaux de f.

INDICE

Début : le dénominateur est strictement positif ; étudie le signe du trinôme $(x-4)(x+2)$. **Ensuite :** calcule $f(-2)$ et $f(4)$ avec l'écriture de la question 2.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Pour tout x de D_f, $(x-1)^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe du trinôme $(x-4)(x+2)$, de racines -2 et 4. Il est strictement positif sur $]-\infty,-2[$ et sur $]4,+\infty[$, strictement négatif sur $]-2,1[$ et sur $]1,4[$.

Variations. f est croissante sur $]-\infty,-2]$, décroissante sur $[-2,1[$ et sur $]1,4]$, croissante sur $[4,+\infty[$. Avec l'écriture de la question 2 :

$$f(-2) = -2+3+\frac{9}{-3} = -2,$$
$$f(4) = 4+3+\frac{9}{3} = 10.$$

Extremums. f' s'annule en changeant de signe en -2 et en 4. D'où les extremums locaux de f : maximum local -2 en -2, minimum local 10 en 4.

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	croissante	-2	décroissante	$-\infty$ ‖ $+\infty$	décroissante	10	croissante	$+\infty$

6. 0,75 pts

Calculer $f(2-x)+f(x)$ pour x dans D_f. En déduire un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Début : si $x \neq 1$, alors $2-x \neq 1$; utilise l'écriture de la question 2. **Ensuite :** remarque que $\frac{9}{1-x} = -\frac{9}{x-1}$.

CORRIGÉ

Calcul. Soit x de D_f. Alors $2-x \neq 1$, donc $2-x$ appartient à D_f. Avec la question 2 et $\frac{9}{1-x} = -\frac{9}{x-1}$:

$$\begin{aligned} f(2-x) &= 2-x+3+\frac{9}{1-x} \\ &= 5-x-\frac{9}{x-1}. \end{aligned}$$

En ajoutant $f(x) = x+3+\frac{9}{x-1}$, on obtient $f(2-x)+f(x) = 8$.

Centre. Pour tout x de D_f, $2\times 1-x$ appartient à D_f et $f(2\times 1-x)+f(x) = 2\times 4$: le point $\Omega(1,4)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. C'est le point d'intersection des deux asymptotes.

7. 0,5 pts

Calculer $f''(x)$. En déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

INDICE

Début : dérive $x \mapsto -\dfrac{9}{(x-1)^2}$ avec la dérivée de l'inverse de $x \mapsto (x-1)^2$.

CORRIGÉ

Dérivée seconde. Pour tout x de D_f, $f'(x) = 1 - \dfrac{9}{(x-1)^2}$, et la dérivée de $x \mapsto (x-1)^2$ est $x \mapsto 2(x-1)$. D'après la dérivée de l'inverse :

$$\begin{aligned} f''(x) &= 9 \times \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{18}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

Concavité. $(x-1)^3$ a le signe de $x-1$. Donc $f''(x) < 0$ sur $]-\infty, 1[$, où $\mathcal{C}_f$ est concave, et $f''(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$, où $\mathcal{C}_f$ est convexe.

8. 0,5 pts

Tracer (Δ), l'asymptote verticale et $\mathcal{C}_f$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

INDICE

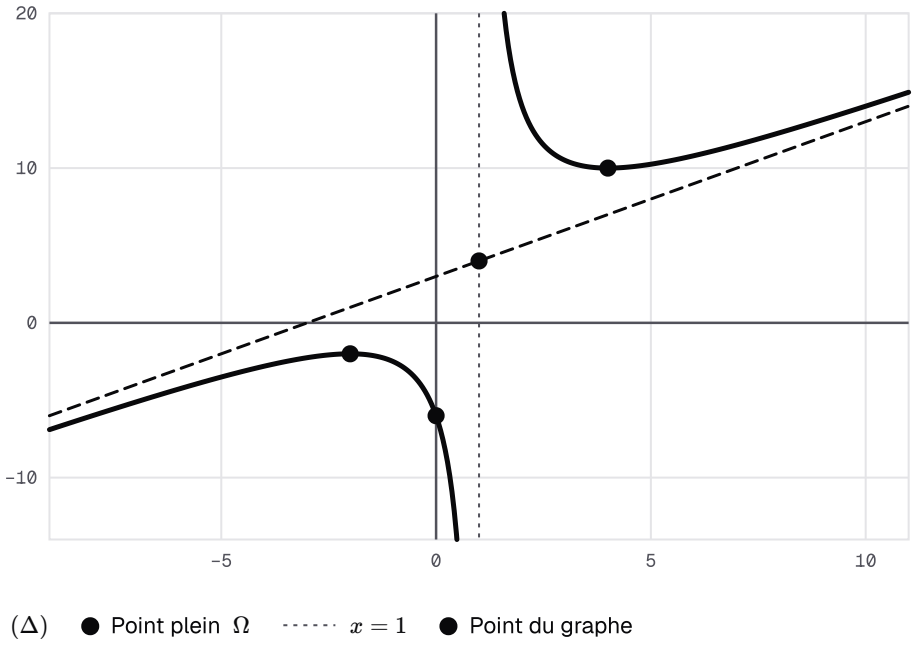
Début : trace les deux asymptotes, puis place $\Omega(1,4)$, les points $(-2,-2)$ et $(4,10)$. **Ensuite :** respecte la position de la question 3 et la concavité de la question 7.

CORRIGÉ

Droites. On trace la droite d'équation $x = 1$ et la droite (Δ) d'équation $y = x + 3$: elles se coupent en $\Omega(1,4)$.

Points. On place les points $(-2,-2)$ et $(4,10)$, puis le point $(0,-6)$ de l'axe des ordonnées, car $f(0) = \dfrac{6}{-1} = -6$. La courbe ne coupe pas l'axe des abscisses : le discriminant de $x^2 + 2x + 6$ vaut $4 - 24 = -20 < 0$.

Courbe. À gauche de 1, la branche est concave et sous (Δ) : elle monte jusqu'à $(-2,-2)$, puis descend vers $-\infty$ le long de la droite d'équation $x = 1$. À droite de 1, la branche est convexe et au-dessus de (Δ) : elle descend de $+\infty$ jusqu'à $(4,10)$, puis remonte en se rapprochant de (Δ). Les deux branches sont symétriques par rapport à Ω.



Courbe de f : x ↦ (x² + 2x + 6)/(x − 1) avec l'asymptote verticale x = 1 et l'asymptote oblique (Δ) : y = x + 3, qui se croisent en Ω(1, 4). Les points (−2, −2), (0, −6) et (4, 10) sont placés.

Exercice 2 6 pts

Étude complète d'une fonction irrationnelle

Soit f la fonction définie sur $D_f =]-\infty, 1]$ par $f(x) = x + 2\sqrt{1-x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,75 pts

On admet que, pour tout réel $x < 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = 1 - 2\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}.$$

En déduire $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

INDICE

Début : $\dfrac{1}{x^2}$ et $\dfrac{1}{x}$ tendent vers 0 en $-\infty$. **Ensuite :** écris $f(x) = x \times \dfrac{f(x)}{x}$.

CORRIGÉ

Limite du quotient. En $-\infty$, $\dfrac{1}{x^2}$ et $\dfrac{1}{x}$ tendent vers 0. D'après la limite d'une somme puis d'une racine, $\sqrt{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}}$ tend vers 0, donc $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

Limite de f. Pour tout $x < 0$, $f(x) = x \times \dfrac{f(x)}{x}$. Le premier facteur tend vers $-\infty$ et le second vers $1 > 0$: d'après la limite d'un produit, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - x]$ et interpréter. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$.

INDICE

Début : $f(x) - x = 2\sqrt{1-x}$. **Ensuite :** une racine carrée est positive ou nulle.

CORRIGÉ

Limite. Pour tout $x \leq 1$, $f(x) - x = 2\sqrt{1-x}$. En $-\infty$, $1 - x$ tend vers $+\infty$; d'après la limite d'une racine, $f(x) - x$ tend vers $+\infty$.

Interprétation. $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 1 (question 1) et $f(x) - x$ tend vers $+\infty$: $\mathcal{C}_f$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction la droite (D).

Position. Pour tout $x \leq 1$, $f(x) - x = 2\sqrt{1-x} \geq 0$, avec égalité seulement pour $x = 1$. Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) sur $]-\infty, 1[$ et la rencontre au point $(1, 1)$.

3. `0,75 pts`

Pour $x < 1$, vérifier que :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{1 - x}}.$$

La fonction f est-elle dérivable à gauche en 1 ? Interpréter.

INDICE

Début : $f(1) = 1$ et, pour $x < 1$, $x - 1 = -\left(\sqrt{1 - x}\right)^2$. **Ensuite :** cherche la limite de $\dfrac{2}{\sqrt{1 - x}}$ quand x tend vers 1 à gauche. **Rappel :** un taux d'accroissement qui tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ donne une demi-tangente verticale.

CORRIGÉ

Taux d'accroissement. $f(1) = 1 + 0 = 1$. Pour tout $x < 1$, $f(x) - 1 = (x - 1) + 2\sqrt{1 - x}$ et $x - 1 = -\left(\sqrt{1 - x}\right)^2$, donc :

$$\begin{aligned} &\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= 1 + \frac{2\sqrt{1 - x}}{x - 1} \\ &= 1 - \frac{2\sqrt{1 - x}}{\left(\sqrt{1 - x}\right)^2} \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{1 - x}}. \end{aligned}$$

Limite. Quand x tend vers 1 à gauche, $\sqrt{1 - x}$ tend vers 0 en restant strictement positif. D'après la limite d'un quotient puis d'une somme, le taux tend vers $-\infty$.

Interprétation. Le taux n'a pas de limite finie : f n'est pas dérivable à gauche en 1, et $\mathcal{C}_f$ admet au point $(1, 1)$ une demi-tangente verticale.

4. 1 pts

Justifier que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et vérifier que, pour tout $x < 1$:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x} - 1}{\sqrt{1-x}}.$$

Étudier le signe de $f'(x)$.

INDICE

Début : dérive $x \mapsto \sqrt{1-x}$ avec la dérivée de la racine d'une fonction. **Ensuite :** compare $\sqrt{1-x}$ et 1, c'est-à-dire $1-x$ et 1.

CORRIGÉ

Dérivée. Pour tout $x < 1$, $1 - x > 0$. D'après la dérivée de la racine d'une fonction et la dérivée d'une somme, f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 2 \times \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{\sqrt{1-x} - 1}{\sqrt{1-x}}. \end{aligned}$$

Signe. Le dénominateur est strictement positif : $f'(x)$ a le signe de $\sqrt{1-x} - 1$. Les deux nombres $\sqrt{1-x}$ et 1 étant positifs, $\sqrt{1-x} > 1$ équivaut à $1 - x > 1$, c'est-à-dire à $x < 0$.

Conclusion. $f'(x) > 0$ sur $]-\infty, 0[$, $f'(0) = 0$ et $f'(x) < 0$ sur $]0, 1[$.

5. 0,75 pts

En déduire le tableau de variations de f sur $]-\infty, 1]$ et le maximum de f.

INDICE

Début : la question 4 donne les variations sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, 1[$. **Ensuite :** calcule $f(0)$ et $f(1)$.

CORRIGÉ

Variations. D'après la question 4, f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, 1[$.

Maximum. On a $f(0) = 0 + 2\sqrt{1} = 2$. D'après les variations, $f(x) \leq 2$ pour tout $x < 1$, et $f(1) = 1 < 2$: le maximum vaut $f(0) = 2$.

Tableau.

x	$-\infty$		0		1
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖
variations de f	$-\infty$	croissante	2	décroissante	$f(1) = 1$

6. 0,75 pts

Calculer $f''(x)$ pour $x < 1$. En déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Début : dérive $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ avec la dérivée de l'inverse.

CORRIGÉ

Dérivée seconde. Pour tout $x < 1$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. D'après la dérivée de l'inverse, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$ sur $]-\infty, 1[$. Donc :

$$f''(x) = -\frac{1}{2(1-x)\sqrt{1-x}}.$$

Concavité. Pour tout $x < 1$, $(1-x)\sqrt{1-x} > 0$, donc $f''(x) < 0$: $\mathcal{C}_f$ est concave sur $]-\infty, 1[$.

7. 0,75 pts

Résoudre l'équation $f(x) = 0$. En déduire le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

INDICE

Début : $f(x) = 0$ équivaut à $2\sqrt{1-x} = -x$; une racine est positive, donc $x \leq 0$. **Ensuite :** élève au carré et résous l'équation du second degré obtenue.

CORRIGÉ

Équation. $f(x) = 0$ équivaut à $2\sqrt{1-x} = -x$. Une racine carrée est positive ou nulle, donc une solution vérifie $x \leq 0$. Pour $x \leq 0$, les deux membres sont positifs, et l'équation équivaut à $4(1-x) = x^2$, soit $x^2 + 4x - 4 = 0$.

Résolution. Le discriminant vaut $16 + 16 = 32$ et $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$: les racines sont $-2 - 2\sqrt{2}$ et $-2 + 2\sqrt{2}$. Seule $-2 - 2\sqrt{2}$ est négative, car $2\sqrt{2} > 2$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ a pour unique solution $-2 - 2\sqrt{2}$: $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $-2 - 2\sqrt{2}$, environ $-4{,}83$.

8. 0,5 pts

Tracer la droite (D), la demi-tangente au point $(1,1)$ et $\mathcal{C}_f$.

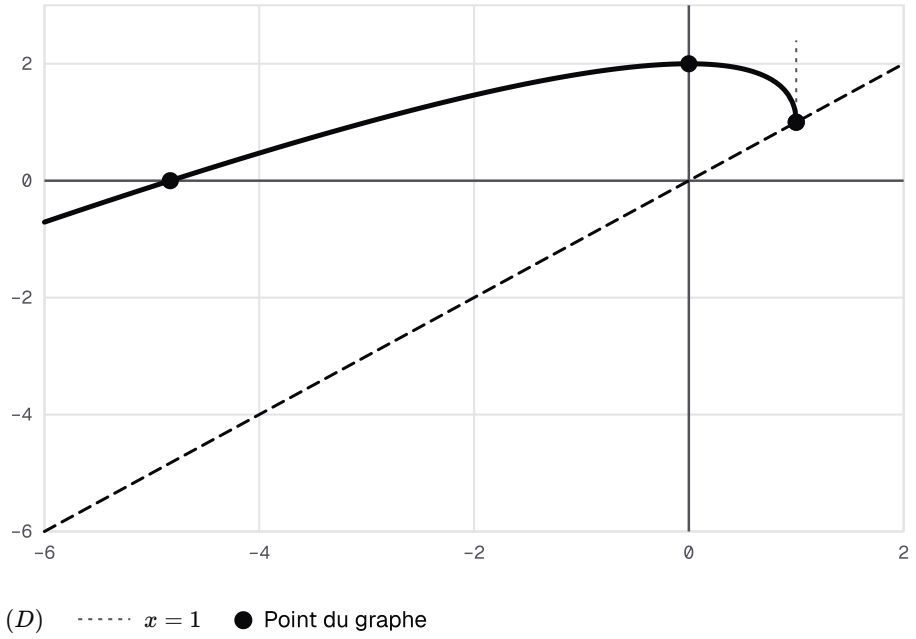
INDICE

Début : place les points $(0,2)$ et $(1,1)$, puis le point de l'axe des abscisses trouvé à la question 7. **Ensuite :** respecte la position de la question 2 et la concavité de la question 6.

CORRIGÉ

Repères. On trace la droite (D) d'équation $y = x$ et la demi-tangente verticale au point $(1,1)$. On place le maximum $(0,2)$ et le point d'abscisse $-2-2\sqrt{2} \approx -4{,}83$ sur l'axe des abscisses.

Courbe. Sur $]-\infty,1[$, la courbe est concave et au-dessus de (D) ; l'écart vertical $2\sqrt{1-x}$ diminue quand x augmente. Elle monte depuis $-\infty$ jusqu'à son maximum $(0,2)$, puis redescend jusqu'au point $(1,1)$, où elle rejoint (D) avec une demi-tangente verticale.



Courbe de f : x ↦ x + 2√(1 − x) sur]−∞, 1], au-dessus de la droite (D) d'équation y = x. Elle monte jusqu'à son maximum (0, 2), redescend jusqu'au point (1, 1), où sa demi-tangente est verticale, et coupe l'axe des abscisses vers −4,83.

Exercice 3 6 pts

Étude complète d'une fonction trigonométrique

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 1 pts

Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$. Vérifier que f est périodique de période 2π et impaire. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$, et dire comment compléter la courbe.

INDICE

Début : pour tout réel x, $\cos x \geq -1$; le sinus est impair, le cosinus est pair, et tous deux sont de période 2π. **Ensuite :** une fonction impaire de période T s'étudie sur $D_f \cap \left[0, \dfrac{T}{2}\right]$; ici $D_f = \mathbb{R}$.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Pour tout réel x, $\cos x \geq -1$, donc $2 + \cos x \geq 1 > 0$: le dénominateur ne s'annule jamais, et f est définie sur $\mathbb{R}$.

Période et parité. Soit x un réel. Le sinus et le cosinus sont de période 2π, donc $f(x + 2\pi) = f(x)$. De plus, $-x$ est un réel, $\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$, donc :

$$f(-x) = \frac{-\sin x}{2 + \cos x} = -f(x).$$

Ainsi f est périodique de période 2π et impaire.

Réduction. Par périodicité, on étudie f sur $[-\pi, \pi]$, de longueur 2π ; par imparité, il suffit de l'étudier sur $[0, \pi]$. On complète par la symétrie de centre O, ce qui donne la courbe sur $[-\pi, \pi]$, puis par les translations de vecteurs $2k\pi\,\vec{i}$, où k est un entier relatif.

2. 1 pts

Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}$.

INDICE

Début : dérive avec la règle de la dérivée d'un quotient. **Ensuite :** simplifie le numérateur avec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto 2 + \cos x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et la seconde ne s'annule pas. D'après la dérivée d'un quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R}$; pour tout réel x, $f'(x)$ a pour dénominateur $(2+\cos x)^2$ et pour numérateur $\cos x\,(2+\cos x) - \sin x \times (-\sin x)$.

Simplification. Comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$\begin{aligned}&\cos x\,(2+\cos x) + \sin^2 x\\ &= 2\cos x + \cos^2 x\\ &\quad + \sin^2 x\\ &= 2\cos x + 1.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}$.

3. 1,25 pts

Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0, \pi]$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.

INDICE

Début : le dénominateur est un carré non nul. **Ensuite :** sur $[0, \pi]$, $\cos x > -\dfrac{1}{2}$ équivaut à $x < \dfrac{2\pi}{3}$.

CORRIGÉ

Signe. Pour tout réel x, $(2+\cos x)^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $2\cos x + 1$. Sur $[0, \pi]$, le cosinus est strictement décroissant et $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$. Donc $2\cos x + 1 > 0$ sur $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right[$, $2\cos x + 1 = 0$ en $\dfrac{2\pi}{3}$, et $2\cos x + 1 < 0$ sur $\left]\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right]$.

Variations. f est croissante sur $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right]$. On a $f(0) = f(\pi) = 0$ et :

$$\begin{aligned}f\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

x	0		$\dfrac{2\pi}{3}$		π
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	0	croissante	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	décroissante	0

4. 0,75 pts

Écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ à l'origine, puis au point d'abscisse π.

INDICE

Début : calcule $f'(0)$ et $f'(\pi)$ avec la question 2.

CORRIGÉ

Tangente à l'origine. $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{2+1}{(2+1)^2} = \dfrac{1}{3}$. La tangente a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, soit $y = \dfrac{1}{3}x$.

Tangente au point d'abscisse π. $f(\pi) = 0$ et $f'(\pi) = \dfrac{-2+1}{(2-1)^2} = -1$. La tangente a pour équation $y = -(x - \pi)$, soit $y = -x + \pi$.

5. 0,75 pts

Résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans $[0, \pi]$, puis dans $[-\pi, \pi]$. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[-\pi, \pi]$.

INDICE

Début : un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul. **Ensuite :** le dénominateur est strictement positif ; utilise l'imparité pour $[-\pi, 0]$.

CORRIGÉ

Dans $[0, \pi]$. Le dénominateur ne s'annule pas : $f(x) = 0$ équivaut à $\sin x = 0$. Dans $[0, \pi]$, les solutions sont 0 et π.

Dans $[-\pi, \pi]$. f est impaire, donc $f(-x) = 0$ équivaut à $f(x) = 0$: les solutions dans $[-\pi, 0]$ sont les opposées de celles de $[0, \pi]$, soit $-\pi$ et 0. Dans $[-\pi, \pi]$, les solutions sont $-\pi$, 0 et π.

Signe. Sur $]0, \pi[$, $\sin x > 0$ et $2 + \cos x > 0$, donc $f(x) > 0$. Par imparité, $f(x) < 0$ sur $]-\pi, 0[$.

6. 1,25 pts

Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi, \pi]$. En déduire, par une lecture graphique, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ dans $[-\pi, \pi]$.

INDICE

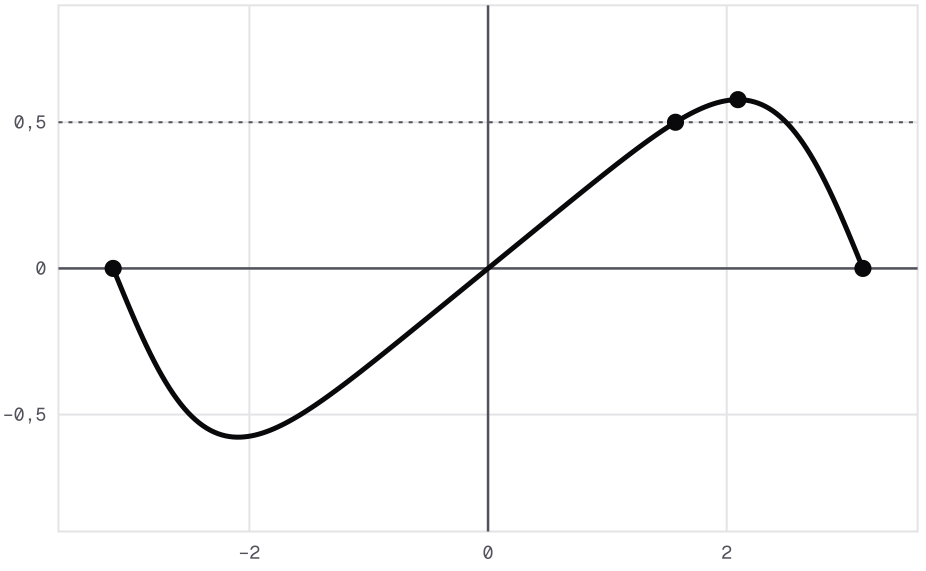
Début : compare $\dfrac{1}{2}$ au maximum $\dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58$. **Ensuite :** sur $[-\pi, 0]$, la question 5 donne le signe de f.

CORRIGÉ

Sur $[0, \pi]$**.** La courbe part de $(0, 0)$, monte jusqu'à son maximum $\dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58$ en $\dfrac{2\pi}{3}$, puis redescend jusqu'à $(\pi, 0)$. Comme $0 < \dfrac{1}{2} < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$ semble la couper deux fois : une fois avant $\dfrac{2\pi}{3}$, une fois après. Le calcul confirme la première : $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2 + 0} = \dfrac{1}{2}$.

Sur $[-\pi, 0]$**.** Cette partie est la symétrique de la précédente par rapport à O. D'après la question 5, $f(x) \leq 0$ sur $[-\pi, 0]$: la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$ n'y rencontre pas la courbe.

Conclusion. Graphiquement, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ semble avoir deux solutions dans $[-\pi, \pi]$.



Courbe de f : x ↦ sin x/(2 + cos x) sur [−π, π] et droite d'équation y = 1/2 : elle coupe la courbe deux fois, en π/2 puis après le maximum atteint en 2π/3, et jamais sur [−π, 0], où f est négative.

Exercice 4 6 pts

Étude complète d'une fonction polynôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32x$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, puis $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Début : pour $x \neq 0$, mets x^4 en facteur : $f(x) = x^4 \left(1 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{12}{x^2} + \dfrac{32}{x^3}\right)$. **Ensuite :** de même, $\dfrac{f(x)}{x} = x^3 \left(1 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{12}{x^2} + \dfrac{32}{x^3}\right)$.

CORRIGÉ

Limites de f. Pour tout réel $x \neq 0$, posons :

$$p(x) = 1 - \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{32}{x^3},$$

de sorte que $f(x) = x^4\, p(x)$. D'après la limite de l'inverse et d'une somme, $p(x)$ tend vers 1 en $+\infty$ et en $-\infty$. Comme x^4 tend vers $+\infty$ des deux côtés, la limite d'un produit donne $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Limites du quotient. Pour tout réel $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = x^3\, p(x)$, et x^3 tend vers $+\infty$ en $+\infty$, vers $-\infty$ en $-\infty$. D'après la limite d'un produit, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$.

Interprétation. $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2. 1 pts

Vérifier que, pour tout réel x :

$$f(x) = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 16).$$

Calculer $(2-x)^2 - 2(2-x)$, puis en déduire que la droite d'équation $x = 1$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Début : pose $u = x^2 - 2x$; le produit vaut $u(u-16) = u^2 - 16u$. **Ensuite :** compare $f(2-x)$ et $f(x)$; ici $a = 1$ et $2a - x = 2 - x$.

CORRIGÉ

Écriture factorisée. Soit x un réel. En développant :

$$\begin{aligned}
&(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 16) \\
&= (x^2 - 2x)^2 - 16(x^2 - 2x) \\
&= x^4 - 4x^3 + 4x^2 \\
&\quad - 16x^2 + 32x \\
&= x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32x.
\end{aligned}$$

On retrouve $f(x)$.

Calcul.

$$\begin{aligned}
&(2-x)^2 - 2(2-x) \\
&= 4 - 4x + x^2 - 4 + 2x \\
&= x^2 - 2x.
\end{aligned}$$

En remplaçant x par $2 - x$ dans l'écriture factorisée, on obtient donc $f(2-x) = f(x)$.

Axe. Pour tout réel x, $2 \times 1 - x$ appartient à $D_f = \mathbb{R}$ et $f(2 \times 1 - x) = f(x)$: la droite d'équation $x = 1$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

3. 0,75 pts

Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = 4(x-1)(x+2)(x-4)$. Étudier le signe de $f'(x)$.

INDICE

Début : dérive terme à terme, puis développe $(x+2)(x-4)$ et multiplie par $x-1$. **Ensuite :** dresse un tableau de signes des trois facteurs.

CORRIGÉ

Dérivée. f est une fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 24x + 32$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned} &4(x-1)(x+2)(x-4) \\ &= 4(x-1)(x^2-2x-8) \\ &= 4(x^3-3x^2-6x+8) \\ &= 4x^3-12x^2-24x+32. \end{aligned}$$

Donc $f'(x) = 4(x-1)(x+2)(x-4)$.

Signe. Les trois facteurs s'annulent en -2, 1 et 4. Un tableau de signes donne : $f'(x) < 0$ sur $]-\infty, -2[$ et sur $]1, 4[$, $f'(x) > 0$ sur $]-2, 1[$ et sur $]4, +\infty[$.

4. 0,75 pts

Dresser le tableau de variations de f. En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$ et le maximum local de f.

INDICE

Début : calcule $f(-2)$, $f(1)$ et $f(4)$ avec l'écriture de la question 2. **Ensuite :** l'axe de la question 2 explique l'égalité $f(-2) = f(4)$.

CORRIGÉ

Valeurs. On utilise l'écriture de la question 2. En -2 et en 4, $x^2 - 2x$ vaut 8, d'où $f(-2) = f(4) = 8 \times (-8) = -64$. En 1, il vaut -1, d'où $f(1) = (-1) \times (-17) = 17$. L'égalité $f(-2) = f(4)$ traduit la symétrie d'axe la droite d'équation $x = 1$, car $2 \times 1 - 4 = -2$.

Variations et extremums. D'après le signe de $f'(x)$, f est décroissante sur $]-\infty, -2]$, croissante sur $[-2, 1]$, décroissante sur $[1, 4]$ et croissante sur $[4, +\infty[$. Le tableau montre que $f(x) \geq -64$ pour tout réel x : le minimum de f sur $\mathbb{R}$ vaut -64, atteint en -2 et en 4. Enfin, f' s'annule en changeant de signe en 1 : f admet en 1 un maximum local égal à 17.

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	décroissante	-64	croissante	17	décroissante	-64	croissante	$+\infty$

5. 1 pts

Calculer $f''(x)$ et étudier son signe. En déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$ et ses points d'inflexion A et B, A étant celui dont l'abscisse est la plus petite.

INDICE

Début : dérive $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 24x + 32$, puis factorise par 12. **Ensuite :** le trinôme $x^2 - 2x - 2$ a pour discriminant 12 ; pour les ordonnées, remarque que $x^2 - 2x = 2$ en ses racines.

CORRIGÉ

Dérivée seconde. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12x^2 - 24x - 24 \\ &= 12(x^2 - 2x - 2). \end{aligned}$$

Le trinôme $x^2 - 2x - 2$ a pour discriminant $4 + 8 = 12$, et $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$: ses racines sont $1 - \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3}$.

Concavité. $f''(x) > 0$ sur $\left]-\infty, 1 - \sqrt{3}\right[$ et sur $\left]1 + \sqrt{3}, +\infty\right[$: $\mathcal{C}_f$ y est convexe. $f''(x) < 0$ sur $\left]1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right[$: $\mathcal{C}_f$ y est concave.

Points d'inflexion. f'' s'annule en changeant de signe en $1 - \sqrt{3}$ et en $1 + \sqrt{3}$. En ces réels, $x^2 - 2x - 2 = 0$, donc $x^2 - 2x = 2$ et $f(x) = 2 \times (2 - 16) = -28$: les points d'inflexion sont $A(1 - \sqrt{3}, -28)$ et $B(1 + \sqrt{3}, -28)$, symétriques par rapport à la droite d'équation $x = 1$.

6. 1 pts

Résoudre l'équation $f(x) = 0$. En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.

INDICE

Début : utilise l'écriture de la question 2 et la règle du produit nul. **Ensuite :** le trinôme $x^2 - 2x - 16$ a pour discriminant $68 = 4 \times 17$; dresse un tableau de signes de $x(x - 2)$ et de $x^2 - 2x - 16$.

CORRIGÉ

Équation. D'après la question 2 et la règle du produit nul, $f(x) = 0$ équivaut à $x^2 - 2x = 0$ ou $x^2 - 2x - 16 = 0$. D'une part, $x^2 - 2x = x(x - 2)$ s'annule en 0 et en 2. D'autre part, $x^2 - 2x - 16$ a pour discriminant $4 + 64 = 68 = 4 \times 17$; ses racines sont $1 - \sqrt{17}$ et $1 + \sqrt{17}$. Les solutions de $f(x) = 0$ sont $1 - \sqrt{17}$, 0, 2 et $1 + \sqrt{17}$, avec $\sqrt{17} \approx 4{,}12$.

Signe. $x(x - 2)$ est strictement négatif sur $]0, 2[$ et strictement positif en dehors de $[0, 2]$; $x^2 - 2x - 16$ est strictement négatif sur $\left]1 - \sqrt{17}, 1 + \sqrt{17}\right[$ et strictement positif en dehors de $\left[1 - \sqrt{17}, 1 + \sqrt{17}\right]$. Comme $1 - \sqrt{17} < 0 < 2 < 1 + \sqrt{17}$, un tableau de signes donne :

- $f(x) > 0$ sur $\left]-\infty, 1 - \sqrt{17}\right[$, sur $]0, 2[$ et sur $\left]1 + \sqrt{17}, +\infty\right[$;
- $f(x) < 0$ sur $\left]1 - \sqrt{17}, 0\right[$ et sur $\left]2, 1 + \sqrt{17}\right[$.

Position. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de l'axe des abscisses là où $f(x) > 0$ et au-dessous là où $f(x) < 0$; elle le coupe en quatre points, d'abscisses les quatre solutions.

7. 0,75 pts

Tracer la droite d'équation $x = 1$ et $\mathcal{C}_f$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, en choisissant des unités différentes sur les deux axes.

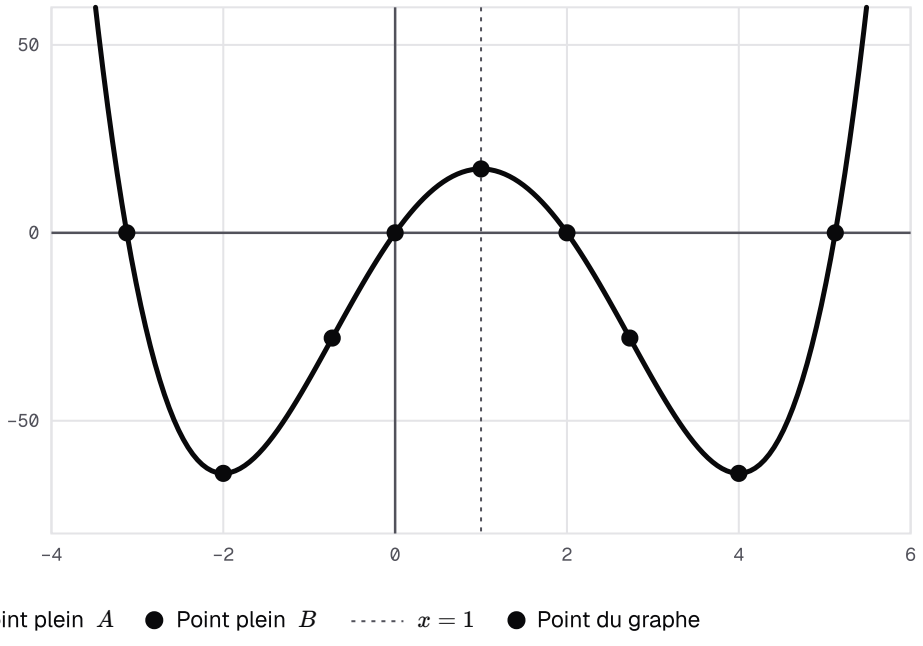
INDICE

Début : place les points des questions 4, 5 et 6. **Ensuite :** respecte la concavité de la question 5 et la symétrie de la question 2.

CORRIGÉ

Points. On trace en pointillé la droite d'équation $x = 1$. On place $(-2, -64)$, $(1, 17)$ et $(4, -64)$, les points d'inflexion A et B, d'ordonnée -28 et d'abscisses $1 - \sqrt{3} \approx -0{,}73$ et $1 + \sqrt{3} \approx 2{,}73$, puis les quatre points de l'axe des abscisses de la question 6.

Courbe. Convexe, elle descend de $+\infty$ jusqu'à $(-2, -64)$, puis remonte ; elle change de concavité en A et monte, concave, jusqu'à $(1, 17)$, où la tangente est horizontale. Elle redescend, change de concavité en B, atteint $(4, -64)$, puis remonte vers $+\infty$, convexe. Elle est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1$ et se termine par deux branches paraboliques de direction l'axe des ordonnées.



Courbe de f : x ↦ x⁴ − 4x³ − 12x² + 32x, avec des unités différentes sur les deux axes : symétrique par rapport à la droite d'équation x = 1, elle passe par (−2, −64), (1, 17) et (4, −64), et change de concavité en A et B, à la hauteur −28.

Exercice 5 6 pts

Étude complète d'une fonction rationnelle paire

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,75 pts

Déterminer D_f et vérifier que f est paire. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $D_f \cap [0, +\infty[$, et dire comment compléter la courbe.

INDICE

Début : $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. **Ensuite :** pour x dans D_f, $-x$ est dans D_f et $(-x)^2 = x^2$.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. $f(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 1 \neq 0$. Or $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ s'annule en -1 et en 1 : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Parité. Pour tout x de D_f, $-x$ appartient à D_f et, comme $(-x)^2 = x^2$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+3}{(-x)^2-1} = f(x).$$

La fonction f est donc paire.

Réduction. Il suffit d'étudier f sur $D_f \cap [0, +\infty[$, c'est-à-dire sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$, puis de compléter la courbe par la symétrie d'axe l'axe des ordonnées.

2. 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \to 1^-} f(x)$. Interpréter graphiquement, puis en déduire, par la question 1, une seconde asymptote verticale.

INDICE

Début : calcule la limite du numérateur en 1. **Ensuite :** près de 1, $x + 1 > 0$, donc $x^2 - 1$ a le signe de $x - 1$.

CORRIGÉ

Limites. Quand x tend vers 1, le numérateur tend vers $4 > 0$ et $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ tend vers 0. Près de 1, $x + 1 > 0$: $x^2 - 1$ a le signe de $x - 1$, positif à droite de 1 et négatif à gauche. D'après la limite d'un quotient, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.

Interprétation. La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$. Comme $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (question 1), la droite d'équation $x = -1$ l'est aussi.

3. 1 pts

Vérifier que, pour tout x de D_f :

$$f(x) = 1 + \frac{4}{x^2 - 1}.$$

En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et une asymptote (Δ) à $\mathcal{C}_f$, puis la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ) sur D_f.

INDICE

Début : écris $x^2 + 3 = (x^2 - 1) + 4$. **Ensuite :** le signe de $f(x) - 1$ est celui de $x^2 - 1$.

CORRIGÉ

Écriture. Pour tout x de D_f, $x^2 + 3 = (x^2 - 1) + 4$; en divisant par $x^2 - 1 \neq 0$, on obtient $f(x) = 1 + \frac{4}{x^2 - 1}$.

Limite et asymptote. En $+\infty$, $x^2 - 1$ tend vers $+\infty$; d'après la limite de l'inverse puis d'une somme, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Donc la droite (Δ) d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, et aussi en $-\infty$ par parité.

Position. $f(x) - 1 = \frac{4}{x^2 - 1}$ a le signe de $x^2 - 1$ et ne s'annule pas. Ainsi $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (Δ) sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$, et au-dessous sur $]-1, 1[$.

4. 1 pts

Justifier que f est dérivable sur D_f et vérifier que, pour tout x de D_f :

$$f'(x) = \frac{-8x}{(x^2-1)^2}.$$

En déduire le tableau de variations de f sur $[0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$ et l'extremum local de f.

INDICE

Début : dérive l'écriture de la question 3 avec la dérivée de l'inverse de $x \mapsto x^2-1$. **Ensuite :** le dénominateur de $f'(x)$ est strictement positif : $f'(x)$ a le signe de $-8x$, aussi sur $]-1,0[$, ce qui donne la nature de l'extremum en 0.

CORRIGÉ

Dérivée. Pour tout x de D_f, $x^2-1 \neq 0$, et la dérivée de $x \mapsto x^2-1$ est $x \mapsto 2x$. D'après la dérivée de l'inverse et d'une somme, f est dérivable sur D_f et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{-8x}{(x^2-1)^2}. \end{aligned}$$

Variations. Pour tout x de D_f, $(x^2-1)^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $-8x$. Donc $f'(0) = 0$, et $f'(x) < 0$ sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$: f est strictement décroissante sur $[0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

Extremum. Sur $]-1,0[$, $f'(x) > 0$: f' s'annule en changeant de signe en 0, et f admet en 0 un maximum local égal à $f(0) = \dfrac{3}{-1} = -3$.

x	0		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$	0	$-$	‖	$-$	
variations de f	-3	décroissante	$-\infty$ ‖ $+\infty$	décroissante	1

5. 0,75 pts

Vérifier que, pour tout x de D_f :

$$f''(x) = \frac{8(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}.$$

En déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$ sur $]-\infty,-1[$, sur $]-1,1[$ et sur $]1,+\infty[$. La courbe admet-elle un point d'inflexion ?

INDICE

Début : dérive le quotient $\frac{-8x}{(x^2-1)^2}$, sachant que la dérivée de $x \mapsto (x^2-1)^2$ est $x \mapsto 4x(x^2-1)$. **Ensuite :** simplifie par x^2-1 ; $(x^2-1)^3$ a le signe de x^2-1.

CORRIGÉ

Dérivée seconde. D'après la dérivée d'un quotient, avec $x \mapsto 4x(x^2-1)$ pour dérivée de $x \mapsto (x^2-1)^2$, $f''(x)$ a pour dénominateur $(x^2-1)^4$ et pour numérateur, factorisé par $8(x^2-1)$:

$$\begin{aligned} &-8(x^2-1)^2 \\ &\quad +8x \times 4x(x^2-1) \\ &= 8(x^2-1)(3x^2+1). \end{aligned}$$

En simplifiant par $x^2-1 \neq 0$, on obtient $f''(x) = \frac{8(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$ pour tout x de D_f.

Concavité. Pour tout réel x, $8(3x^2+1) > 0$, donc $f''(x)$ a le signe de $(x^2-1)^3$, c'est-à-dire de x^2-1. Ainsi $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$, et concave sur $]-1,1[$.

Point d'inflexion. f'' ne s'annule pas sur D_f : $\mathcal{C}_f$ n'a aucun point d'inflexion. La concavité change de part et d'autre de -1 et de 1, mais ces réels n'appartiennent pas à D_f.

6. 1 pts

Résoudre l'équation $f(x) = 3$.

Vérifier que, pour tout x de D_f :

$$f(x) + 3 = \frac{4x^2}{x^2 - 1}.$$

En déduire que, si $-3 < m \leq 1$, l'équation $f(x) = m$ n'a aucune solution. Préciser, par une lecture graphique, le nombre de solutions dans les autres cas.

INDICE

Début : pour x dans D_f, $f(x) = 3$ équivaut à $x^2 + 3 = 3(x^2 - 1)$. **Ensuite :** $f(x) + 3 \leq 0$ sur $]-1, 1[$ et, d'après la question 3, $f(x) > 1$ sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$.

CORRIGÉ

Équation. Soit x de D_f. En multipliant par $x^2 - 1 \neq 0$, $f(x) = 3$ équivaut à $x^2 + 3 = 3x^2 - 3$, soit $x^2 = 3$. Les solutions $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$ appartiennent à D_f : $\mathcal{C}_f$ coupe la droite d'équation $y = 3$ aux points $(-\sqrt{3}, 3)$ et $(\sqrt{3}, 3)$.

Encadrement. Pour tout x de D_f :

$$\begin{aligned} & f(x) + 3 \\ &= \frac{x^2 + 3 + 3(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \\ &= \frac{4x^2}{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

Sur $]-1, 1[$, $4x^2 \geq 0$ et $x^2 - 1 < 0$, donc $f(x) + 3 \leq 0$, soit $f(x) \leq -3$. Sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$, $f(x) > 1$ d'après la question 3.

Aucune solution. Si $-3 < m \leq 1$, aucun x de $]-1, 1[$ ne vérifie $f(x) = m$, car $f(x) \leq -3 < m$; aucun x de $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ non plus, car $f(x) > 1 \geq m$. Donc l'équation $f(x) = m$ n'a aucune solution.

Lecture graphique. Graphiquement, l'équation $f(x) = m$ semble avoir une seule solution, 0, si $m = -3$, et deux solutions opposées si $m < -3$ ou si $m > 1$. Pour $m = 3$, le calcul a confirmé ces deux solutions : $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

7. 0,75 pts

Tracer les asymptotes et $\mathcal{C}_f$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

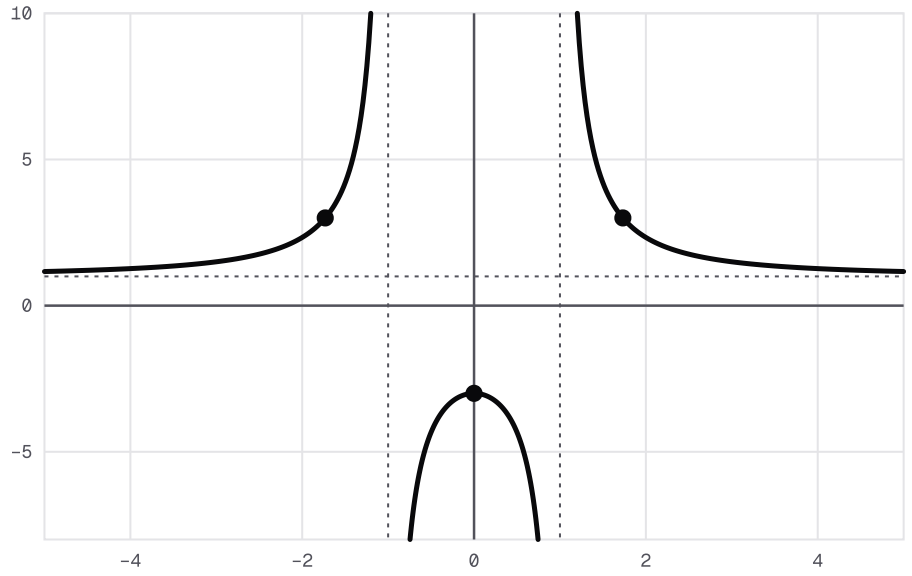
INDICE

Début : trace les trois asymptotes, puis place les points $(0, -3)$, $(-\sqrt{3}, 3)$ et $(\sqrt{3}, 3)$. **Ensuite :** respecte la position de la question 3, la concavité de la question 5 et la symétrie de la question 1.

CORRIGÉ

Repères. On trace les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$, et la droite (Δ) d'équation $y = 1$. On place $(0, -3)$, puis $(-\sqrt{3}, 3)$ et $(\sqrt{3}, 3)$, avec $\sqrt{3} \approx 1{,}73$. La courbe ne coupe pas l'axe des abscisses, car $x^2 + 3 > 0$.

Courbe. Sur $]1, +\infty[$, la branche est convexe et au-dessus de (Δ) : elle descend de $+\infty$ le long de la droite d'équation $x = 1$, passe par $(\sqrt{3}, 3)$, puis se rapproche de (Δ). Sur $]-1, 1[$, la branche est concave et au-dessous de (Δ) : elle monte de $-\infty$ jusqu'à $(0, -3)$, puis redescend vers $-\infty$. La branche sur $]-\infty, -1[$ est la symétrique de celle de $]1, +\infty[$ par rapport à l'axe des ordonnées.



Courbe de f : x ↦ (x² + 3)/(x² − 1) avec ses asymptotes x = −1, x = 1 et (Δ) : y = 1. Elle passe par (0, −3), (−√3, 3) et (√3, 3), et l'axe des ordonnées est axe de symétrie.