BURHAN

Étude et représentation des fonctions : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Étude et représentation des fonctions	Entraînement	7

Exercice 1

Chercher une asymptote oblique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

INDICE

Outil : pour $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{2x^3 - x^2 + 1}{x^3 + x}$; garde les termes de plus haut degré.

2.

Calculer $f(x) - 2x$, puis sa limite en $+\infty$. Que peut-on en déduire ? Le résultat change-t-il en $-\infty$?

INDICE

Outil : réduis au même dénominateur $x^2 + 1$; les termes en x^3 disparaissent.

3.

Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ).

INDICE

Outil : calcule $f(x) - (2x - 1)$ à partir de la question 2 ; le dénominateur est strictement positif.

Exercice 2

Les deux asymptotes d'une racine

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{9x^2 - 6x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Déterminer l'ensemble de définition D_f.

INDICE

Outil : factorise $9x^2 - 6x$ et étudie le signe de ce trinôme.

2.

Pour $x > \dfrac{2}{3}$, vérifier que :

$$f(x) - 3x = \frac{-6}{\sqrt{9 - \dfrac{6}{x}} + 3}.$$

En déduire une asymptote de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

INDICE

Outil : multiplie et divise par la quantité conjuguée $\sqrt{9x^2 - 6x} + 3x$, puis, pour $x > 0$, écris $\sqrt{9x^2 - 6x} = x\sqrt{9 - \dfrac{6}{x}}$.

3.

Pour $x < 0$, on admet que :

$$f(x) + 3x = \frac{6}{\sqrt{9 - \dfrac{6}{x}} + 3}.$$

En déduire une asymptote de $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

INDICE

Outil : cherche la limite de $f(x) + 3x$, puis écris $f(x) + 3x = f(x) - (-3x)$.

Exercice 3

Position par rapport à une asymptote

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = -x + 3 + \frac{2}{x-1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer les limites de f à droite et à gauche de 1. Interpréter.

INDICE

Outil : $-x+3$ tend vers 2 ; regarde le signe de $x-1$ de chaque côté.

2.

Justifier par un calcul de limite que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 3$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Outil : la différence $f(x) - (-x+3)$ se lit sur l'écriture de f.

3.

Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ).

INDICE

Outil : la différence de la question 2 a le signe de $x-1$.

4.

Calculer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

INDICE

Outil : pour $x \neq 1$, multiplie l'équation $f(x) = 0$ par $x-1$, puis calcule un discriminant.

Exercice 4

Inflexion d'une courbe trigonométrique

Soit f la fonction définie sur $I =]0, \pi[$ par $f(x) = 2x - \sin(2x)$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour x dans I.

INDICE

Outil : la dérivée de $x \mapsto \sin(2x)$ est $x \mapsto 2\cos(2x)$; celle de $x \mapsto \cos(2x)$ est $x \mapsto -2\sin(2x)$.

2.

Étudier le signe de $f''(x)$ sur I et en déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : pour x dans I, le réel $2x$ décrit $]0, 2\pi[$; le sinus est positif sur $]0, \pi[$ et négatif sur $]\pi, 2\pi[$.

3.

En déduire le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ et l'équation de la tangente en ce point.

INDICE

Outil : f'' s'annule en changeant de signe en $\dfrac{\pi}{2}$; calcule $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 5

Une courbe de degré 3 et son centre

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $f'(x)$, la factoriser, puis dresser le tableau de variations de f (sans les limites).

INDICE

Outil : $f'(x) = -3(x^2 - 2x - 3)$; cherche les racines du trinôme.

2.

Calculer $f''(x)$. En déduire le point d'inflexion Ω de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : f'' est affine ; cherche où elle s'annule et vérifie le changement de signe.

3.

Vérifier que $f(2 - x) + f(x) = 18$ pour tout réel x. Interpréter.

INDICE

Outil : développe $(2 - x)^3 = 8 - 12x + 6x^2 - x^3$ et $(2 - x)^2$.

Exercice 6

Une fonction trigonométrique sur un intervalle réduit

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - 4\cos x$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Vérifier que f est périodique de période 2π et paire. En déduire un intervalle d'étude.

INDICE

Outil : le cosinus est de période 2π et pair.

2.

Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = 4\sin x\,(1 - \cos x)$.

INDICE

Outil : dérive, puis remplace $\sin(2x)$ par $2\sin x\cos x$.

3.

Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0, \pi]$ et dresser le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$. En déduire le minimum et le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : sur $]0, \pi[$, $\sin x > 0$ et $\cos x < 1$; par parité et période, f prend sur $\mathbb{R}$ les valeurs qu'elle prend sur $[0, \pi]$.

4.

Expliquer comment obtenir $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}$ à partir de la partie tracée sur $[0, \pi]$.

INDICE

Outil : complète d'abord par la symétrie liée à la parité, puis translate d'une période.

Exercice 7

Résoudre graphiquement une équation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis dresser son tableau de variations.

INDICE

Outil : règle du terme de plus haut degré ; $f'(x)$ est un trinôme de racines -1 et 3.

2.

Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$. Selon le réel m, lire graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

INDICE

Outil : déplace la droite horizontale d'équation $y = m$; compare m au maximum local et au minimum local.

3.

Confirmer par le calcul le nombre de solutions lu pour $m = 0$.

INDICE

Outil : factorise $f(x)$ par $\dfrac{x}{3}$, puis calcule un discriminant.