BURHAN

Étude et représentation des fonctions : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Étude et représentation des fonctions	Entraînement	7

Exercice 1

Chercher une asymptote oblique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

INDICE

Outil : pour $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{2x^3 - x^2 + 1}{x^3 + x}$; garde les termes de plus haut degré.

CORRIGÉ

Écriture du quotient. Pour tout réel $x \neq 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^3 + x}.$$

Limite. En $+\infty$, le quotient a la même limite que $\dfrac{2x^3}{x^3} = 2$, par la règle du terme de plus haut degré.

Conclusion. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$.

2.

Calculer $f(x) - 2x$, puis sa limite en $+\infty$. Que peut-on en déduire ? Le résultat change-t-il en $-\infty$?

INDICE

Outil : réduis au même dénominateur $x^2 + 1$; les termes en x^3 disparaissent.

CORRIGÉ

Différence. Pour tout réel x, on réduit $f(x) - 2x$ au dénominateur $x^2 + 1$. Son numérateur vaut :

$$\begin{aligned} &2x^3 - x^2 + 1 \\ &\quad - 2x(x^2 + 1) \\ &= -x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

Donc :

$$f(x) - 2x = \frac{-x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}.$$

Limites. D'après la règle du terme de plus haut degré, cette différence a en $+\infty$ comme en $-\infty$ la même limite que $\dfrac{-x^2}{x^2} = -1$.

Conclusion. La différence $f(x) - (2x - 1)$, égale à $f(x) - 2x + 1$, tend vers 0 en $+\infty$: la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. Le résultat ne change pas en $-\infty$: (Δ) y est aussi asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$.

3.

Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ).

INDICE

Outil : calcule $f(x) - (2x - 1)$ à partir de la question 2 ; le dénominateur est strictement positif.

CORRIGÉ

Différence. D'après la question 2, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & f(x) - (2x - 1) \\ &= \frac{-x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} + 1 \\ &= \frac{2 - 2x}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Signe. Pour tout réel x, $x^2 + 1 > 0$: la différence a le signe de $2 - 2x$. Elle est strictement positive si $x < 1$, strictement négative si $x > 1$, et nulle si $x = 1$, où les deux ordonnées valent $2 \times 1 - 1 = 1$.

Position. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (Δ) sur $]-\infty, 1[$ et au-dessous sur $]1, +\infty[$. Elle la coupe au point $(1, 1)$.

Exercice 2

Les deux asymptotes d'une racine

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{9x^2 - 6x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Déterminer l'ensemble de définition D_f.

INDICE

Outil : factorise $9x^2 - 6x$ et étudie le signe de ce trinôme.

CORRIGÉ

Condition. $f(x)$ existe si et seulement si $9x^2 - 6x \geq 0$.

Signe du trinôme. $9x^2 - 6x = 3x(3x - 2)$ a pour racines 0 et $\dfrac{2}{3}$, et son coefficient de x^2 vaut $9 > 0$. Il est donc strictement négatif entre 0 et $\dfrac{2}{3}$, et positif ou nul partout ailleurs.

Conclusion.

$$D_f =]-\infty, 0] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[.$$

2.

Pour $x > \dfrac{2}{3}$, vérifier que :

$$f(x) - 3x = \frac{-6}{\sqrt{9 - \dfrac{6}{x}} + 3}.$$

En déduire une asymptote de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

INDICE

Outil : multiplie et divise par la quantité conjuguée $\sqrt{9x^2 - 6x} + 3x$, puis, pour $x > 0$, écris $\sqrt{9x^2 - 6x} = x\sqrt{9 - \dfrac{6}{x}}$.

CORRIGÉ

Quantité conjuguée. Soit $x > \dfrac{2}{3}$. Alors $\sqrt{9x^2 - 6x} + 3x > 0$, et :

$$\begin{aligned} & f(x) - 3x \\ &= \frac{9x^2 - 6x - 9x^2}{\sqrt{9x^2 - 6x} + 3x} \\ &= \frac{-6x}{\sqrt{9x^2 - 6x} + 3x}. \end{aligned}$$

Mise en facteur. Comme $x > 0$ et $9 - \dfrac{6}{x} > 0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{9x^2 - 6x} &= \sqrt{x^2}\sqrt{9 - \frac{6}{x}} \\ &= x\sqrt{9 - \frac{6}{x}}. \end{aligned}$$

En simplifiant par $x \neq 0$, on obtient l'égalité demandée.

Limite. En $+\infty$, $\dfrac{6}{x}$ tend vers 0. D'après la limite d'une racine puis d'un quotient, $f(x) - 3x$ tend vers $\dfrac{-6}{3 + 3} = -1$.

Conclusion. $f(x) - (3x - 1)$ tend vers 0 en $+\infty$: la droite d'équation $y = 3x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

3.

Pour $x < 0$, on admet que :

$$f(x) + 3x = \frac{6}{\sqrt{9 - \dfrac{6}{x}} + 3}.$$

En déduire une asymptote de $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

INDICE

Outil : cherche la limite de $f(x) + 3x$, puis écris $f(x) + 3x = f(x) - (-3x)$.

CORRIGÉ

Limite. En $-\infty$, $\dfrac{6}{x}$ tend vers 0. D'après la limite d'une racine puis d'un quotient, $f(x) + 3x$ tend vers $\dfrac{6}{3+3} = 1$.

Écart à la droite. Pour tout $x < 0$, $f(x) - (-3x + 1) = f(x) + 3x - 1$, qui tend donc vers 0 en $-\infty$.

Conclusion. Ainsi, la droite d'équation $y = -3x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$. La courbe a ainsi une asymptote oblique différente à chacune de ses bornes infinies.

Exercice 3

Position par rapport à une asymptote

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = -x + 3 + \frac{2}{x-1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer les limites de f à droite et à gauche de 1. Interpréter.

INDICE

Outil : $-x+3$ tend vers 2 ; regarde le signe de $x-1$ de chaque côté.

CORRIGÉ

Limites des termes. Quand x tend vers 1, $-x+3$ tend vers 2 et $x-1$ tend vers 0, en restant positif à droite de 1 et négatif à gauche. D'après la limite de l'inverse, $\frac{2}{x-1}$ tend vers $+\infty$ à droite de 1 et vers $-\infty$ à gauche.

Conclusion. D'après la limite d'une somme, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$. La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

2.

Justifier par un calcul de limite que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 3$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Outil : la différence $f(x) - (-x+3)$ se lit sur l'écriture de f.

CORRIGÉ

Différence. Pour tout $x \neq 1$:

$$f(x) - (-x+3) = \frac{2}{x-1}.$$

Limites. $x-1$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$. D'après la limite de l'inverse, $\frac{2}{x-1}$ tend vers 0 dans les deux cas.

Conclusion. La différence $f(x) - (-x+3)$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$: la droite (Δ) est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

3.

Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ).

INDICE

Outil : la différence de la question 2 a le signe de $x-1$.

CORRIGÉ

Signe de la différence. D'après la question 2, $f(x)-(-x+3)=\dfrac{2}{x-1}$ pour tout $x\neq 1$. Ce quotient a le signe de $x-1$: il est strictement positif pour $x>1$, strictement négatif pour $x<1$, et ne s'annule jamais.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (Δ) sur $]1,+\infty[$ et au-dessous sur $]-\infty,1[$; elle ne coupe pas (Δ).

4.

Calculer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

INDICE

Outil : pour $x\neq 1$, multiplie l'équation $f(x)=0$ par $x-1$, puis calcule un discriminant.

CORRIGÉ

Équation. Soit $x\neq 1$. En multipliant par $x-1$, non nul, l'équation $f(x)=0$ équivaut à $(-x+3)(x-1)+2=0$. Or :

$$\begin{aligned}&(-x+3)(x-1)+2\\&=-x^2+4x-3+2\\&=-x^2+4x-1.\end{aligned}$$

L'équation équivaut donc à $x^2-4x+1=0$.

Résolution. Le discriminant de x^2-4x+1 vaut $16-4=12>0$, et $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. Les racines $\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}$ se simplifient : les solutions sont $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$.

Conclusion. Ces deux réels sont différents de 1, car $\sqrt{3}\neq 1$. La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$.

Exercice 4

Inflexion d'une courbe trigonométrique

Soit f la fonction définie sur $I =]0, \pi[$ par $f(x) = 2x - \sin(2x)$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour x dans I.

INDICE

Outil : la dérivée de $x \mapsto \sin(2x)$ est $x \mapsto 2\cos(2x)$; celle de $x \mapsto \cos(2x)$ est $x \mapsto -2\sin(2x)$.

CORRIGÉ

Dérivée. D'après la dérivée d'une somme et la règle de dérivation de $x \mapsto u(ax+b)$, f est dérivable sur I et, pour tout x dans I :

$$f'(x) = 2 - 2\cos(2x).$$

Dérivée seconde. Par les mêmes règles, f' est dérivable sur I et, pour tout x dans I :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2 \times (-2\sin(2x)) \\ &= 4\sin(2x). \end{aligned}$$

2.

Étudier le signe de $f''(x)$ sur I et en déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : pour x dans I, le réel $2x$ décrit $]0, 2\pi[$; le sinus est positif sur $]0, \pi[$ et négatif sur $]\pi, 2\pi[$.

CORRIGÉ

Signe de $f''(x)$. Soit x dans I.

- Si $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, alors $0 < 2x < \pi$, donc $\sin(2x) > 0$ et $f''(x) > 0$.
- Si $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, alors $\pi < 2x < 2\pi$, donc $\sin(2x) < 0$ et $f''(x) < 0$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et concave sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$.

3.

En déduire le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ et l'équation de la tangente en ce point.

INDICE

Outil : f'' s'annule en changeant de signe en $\frac{\pi}{2}$; calcule $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

CORRIGÉ

Point d'inflexion. D'après la question 2, f'' s'annule en changeant de signe en $\frac{\pi}{2}$, et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - \sin\pi = \pi$. Le point $A\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ est donc point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Pente. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - 2\cos\pi = 2 + 2 = 4$.

Conclusion. La tangente en A a pour équation :

$$y = 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \pi,$$

soit $y = 4x - \pi$.

Exercice 5

Une courbe de degré 3 et son centre

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $f'(x)$, la factoriser, puis dresser le tableau de variations de f (sans les limites).

INDICE

Outil : $f'(x) = -3(x^2 - 2x - 3)$; cherche les racines du trinôme.

CORRIGÉ

Dérivée. f est une fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après la dérivée d'une somme, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 6x + 9 \\ &= -3(x^2 - 2x - 3) \\ &= -3(x+1)(x-3). \end{aligned}$$

Signe. Le trinôme $(x+1)(x-3)$ est strictement positif à l'extérieur de $[-1, 3]$ et strictement négatif sur $]-1, 3[$; le facteur -3 inverse ce signe. Donc $f'(x) < 0$ sur $]-\infty, -1[$ et sur $]3, +\infty[$, et $f'(x) > 0$ sur $]-1, 3[$.

Variations. f est décroissante sur $]-\infty, -1]$, croissante sur $[-1, 3]$ et décroissante sur $[3, +\infty[$. On calcule $f(-1) = 1 + 3 - 9 - 2 = -7$ et $f(3) = -27 + 27 + 27 - 2 = 25$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f		décroissante	-7	croissante	25	décroissante	

2.

Calculer $f''(x)$. En déduire le point d'inflexion Ω de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : f'' est affine ; cherche où elle s'annule et vérifie le changement de signe.

CORRIGÉ

Dérivée seconde. Pour tout réel x, $f''(x) = -6x + 6 = -6(x - 1)$. Elle est strictement positive pour $x < 1$ et strictement négative pour $x > 1$.

Point d'inflexion. f'' s'annule en changeant de signe en 1, et $f(1) = -1 + 3 + 9 - 2 = 9$.

Conclusion. Le point $\Omega(1, 9)$ est point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

3.

Vérifier que $f(2-x)+f(x)=18$ pour tout réel x. Interpréter.

INDICE

Outil : développe $(2-x)^3=8-12x+6x^2-x^3$ et $(2-x)^2$.

CORRIGÉ

Calcul de $f(2-x)$. Soit x un réel. On a $(2-x)^3=8-12x+6x^2-x^3$ et $(2-x)^2=4-4x+x^2$, donc :

$$\begin{aligned} &f(2-x)\\ &=-(8-12x+6x^2-x^3)\\ &\quad+3(4-4x+x^2)\\ &\quad+9(2-x)-2\\ &=x^3-3x^2-9x+20. \end{aligned}$$

Somme. En ajoutant $f(x)=-x^3+3x^2+9x-2$, les termes en x^3, x^2 et x s'éliminent : $f(2-x)+f(x)=20-2=18$.

Interprétation. Pour tout réel x, $2\times 1-x$ est réel et $f(2\times 1-x)+f(x)=2\times 9$: le point $\Omega(1,9)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. Le tableau le confirme : Ω est le milieu des points $(-1,-7)$ et $(3,25)$, car $\dfrac{-1+3}{2}=1$ et $\dfrac{-7+25}{2}=9$.

Exercice 6

Une fonction trigonométrique sur un intervalle réduit

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - 4\cos x$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Vérifier que f est périodique de période 2π et paire. En déduire un intervalle d'étude.

INDICE

Outil : le cosinus est de période 2π et pair.

CORRIGÉ

Période. Soit x un réel. Le cosinus est de période 2π, donc $\cos(2x + 4\pi) = \cos(2x)$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Ainsi $f(x + 2\pi) = f(x)$: f est périodique de période 2π.

Parité. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, et le cosinus est pair : $\cos(-2x) = \cos(2x)$ et $\cos(-x) = \cos x$. Donc $f(-x) = f(x)$: f est paire.

Intervalle d'étude. f est de période 2π : on peut l'étudier sur $[-\pi, \pi]$. Comme elle est paire, il suffit de l'étudier sur $[0, \pi]$.

2.

Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = 4\sin x\,(1 - \cos x)$.

INDICE

Outil : dérive, puis remplace $\sin(2x)$ par $2\sin x\cos x$.

CORRIGÉ

Dérivée. D'après la dérivée d'une somme et la règle de dérivation de $x \mapsto u(ax + b)$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$f'(x) = -2\sin(2x) + 4\sin x.$$

Factorisation. Comme $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4\sin x\cos x \\ &\quad + 4\sin x \\ &= 4\sin x\,(1 - \cos x). \end{aligned}$$

3.

Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0, \pi]$ et dresser le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$. En déduire le minimum et le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : sur $]0, \pi[$, $\sin x > 0$ et $\cos x < 1$; par parité et période, f prend sur $\mathbb{R}$ les valeurs qu'elle prend sur $[0, \pi]$.

CORRIGÉ

Signe. Pour tout x de $]0, \pi[$, $\sin x > 0$ et $\cos x < 1$, donc $1 - \cos x > 0$ et $f'(x) > 0$. En 0 et en π, $\sin x = 0$, donc f' s'annule.

Variations. f est strictement croissante sur $[0, \pi]$, avec $f(0) = 1 - 4 = -3$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos \pi - 0 = -1$ et $f(\pi) = 1 + 4 = 5$.

x	0		π
signe de $f'(x)$	0	$+$	0
variations de f	-3	croissante	5

Extremums sur $\mathbb{R}$. Par parité, f prend sur $[-\pi, 0]$ les mêmes valeurs que sur $[0, \pi]$; par périodicité, elle prend sur $\mathbb{R}$ les mêmes valeurs que sur $[-\pi, \pi]$. Ainsi, sur $\mathbb{R}$, son minimum vaut -3, atteint en 0, et son maximum vaut 5, atteint en π.

4.

Expliquer comment obtenir $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}$ à partir de la partie tracée sur $[0, \pi]$.

INDICE

Outil : complète d'abord par la symétrie liée à la parité, puis translate d'une période.

CORRIGÉ

Symétrie. f est paire : on complète la partie tracée sur $[0, \pi]$ par la symétrie d'axe l'axe des ordonnées. On obtient la courbe sur $[-\pi, \pi]$, intervalle de longueur 2π.

Translations. f est de période 2π : on complète ensuite par les translations de vecteurs $2k\pi\,\vec{i}$, où k est un entier relatif.

Exercice 7

Résoudre graphiquement une équation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis dresser son tableau de variations.

INDICE

Outil : règle du terme de plus haut degré ; $f'(x)$ est un trinôme de racines -1 et 3.

CORRIGÉ

Limites. D'après la règle du terme de plus haut degré, $f(x)$ a la même limite que $\dfrac{x^3}{3}$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Dérivée. D'après la dérivée d'une somme, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - 2x - 3 \\ &= (x+1)(x-3). \end{aligned}$$

Ce trinôme est strictement positif sur $]-\infty, -1[$ et sur $]3, +\infty[$, strictement négatif sur $]-1, 3[$.

Tableau. On calcule $f(-1) = -\dfrac{1}{3} - 1 + 3 = \dfrac{5}{3}$ et $f(3) = 9 - 9 - 9 = -9$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	croissante	$\dfrac{5}{3}$	décroissante	-9	croissante	$+\infty$

2.

Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$. Selon le réel m, lire graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

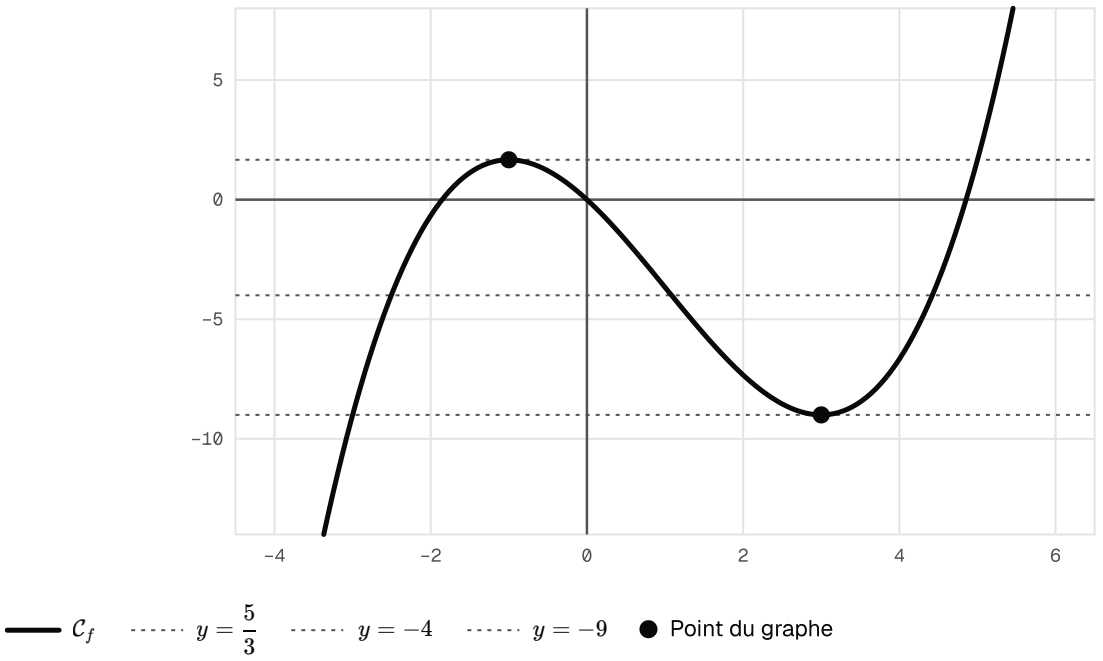
INDICE

Outil : déplace la droite horizontale d'équation $y = m$; compare m au maximum local et au minimum local.

CORRIGÉ

Lecture. Les solutions de $f(x) = m$ sont les abscisses des points communs à $\mathcal{C}_f$ et à la droite d'équation $y = m$. On compare m au maximum local $\dfrac{5}{3}$ et au minimum local -9.

Résultat. Graphiquement, l'équation semble avoir une solution si $m < -9$ ou $m > \dfrac{5}{3}$, deux solutions si $m = -9$ ou $m = \dfrac{5}{3}$, et trois solutions si $-9 < m < \dfrac{5}{3}$.



Allure de la courbe de f : x ↦ x³/3 − x² − 3x, avec son maximum local 5/3 en −1 et son minimum local −9 en 3. Les droites y = 5/3 et y = −9 la touchent une fois et la coupent une fois ; la droite y = −4, entre les deux, la coupe trois fois.

3.

Confirmer par le calcul le nombre de solutions lu pour $m = 0$.

INDICE

Outil : factorise $f(x)$ par $\frac{x}{3}$, puis calcule un discriminant.

CORRIGÉ

Factorisation. Pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{x}{3}(x^2 - 3x - 9).$$

D'après la règle du produit nul, $f(x) = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x^2 - 3x - 9 = 0$.

Trinôme. Son discriminant vaut $9 + 36 = 45 > 0$, et $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$: il a deux racines, $\frac{3 - 3\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}$.

Conclusion. Ces trois réels sont distincts, car 0 n'est pas racine de $x^2 - 3x - 9$. L'équation $f(x) = 0$ a bien trois solutions, comme le prévoit la lecture graphique, puisque $-9 < 0 < \frac{5}{3}$.