BURHAN

Étude et représentation des fonctions : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Étude et représentation des fonctions	Application	9

Exercice 1

Asymptotes lues sur des limites

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ par :

$$f(x) = \frac{2 - 4x}{x - 5}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $\lim_{x \to 5^+} f(x)$ et $\lim_{x \to 5^-} f(x)$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Outil : le numérateur tend vers un réel non nul ; étudie le signe de $x - 5$ de chaque côté de 5.

2.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Outil : garde le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

3.

La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe-t-elle la droite d'équation $y = -4$?

INDICE

Outil : résous l'équation $f(x) = -4$ pour $x \neq 5$, en multipliant par $x - 5$.

Exercice 2

Une asymptote oblique annoncée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 2}$$

On note (D) la droite d'équation $y = 3x + 1$.

1.

Vérifier que, pour tout $x \neq 2$:

$$f(x) = 3x + 1 + \frac{3}{x - 2}.$$

INDICE

Outil : réduis le membre de droite au même dénominateur $x - 2$, puis développe.

2.

En déduire que (D) est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Outil : écris $f(x) - (3x + 1)$ avec la question 1, puis cherche sa limite.

Exercice 3

Reconnaître une branche parabolique

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - 3x$. Étudier la branche infinie de sa courbe en $+\infty$.

INDICE

Outil : calcule la limite de $f(x)$, puis celle de $\dfrac{f(x)}{x}$.

2.

Soit g la fonction définie sur $\left[-\dfrac{7}{3}, +\infty\right[$ par $g(x) = \sqrt{3x + 7}$. Étudier la branche infinie de sa courbe en $+\infty$.

INDICE

Outil : pour $x > 0$, écris $\dfrac{g(x)}{x}$ sous une seule racine, en remarquant que $x = \sqrt{x^2}$.

Exercice 4

Courbe au-dessus ou au-dessous d'une droite

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - 1$, $\mathcal{C}_f$ sa courbe et (D) la droite d'équation $y = 2x + 3$.

1.

Vérifier que, pour tout réel x :

$$f(x) - (2x + 3) = \frac{(x - 4)(x + 2)}{2}.$$

INDICE

Outil : simplifie la différence, puis développe le membre de droite.

2.

En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D).

INDICE

Outil : un trinôme est du signe de son coefficient de x^2 à l'extérieur de ses racines.

3.

Donner les coordonnées des points communs à $\mathcal{C}_f$ et à (D).

INDICE

Outil : leurs abscisses annulent la différence ; calcule l'ordonnée sur la droite.

Exercice 5

Concavité par la dérivée seconde

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + x^2 - 5x$. Calculer $f''(x)$ et en déduire la concavité de sa courbe.

INDICE

Outil : dérive deux fois terme à terme.

2.

Soit g la fonction définie sur $]-\infty, 6]$ par $g(x) = \sqrt{6 - x}$. Calculer $g'(x)$ puis $g''(x)$ pour $x < 6$, et en déduire la concavité de sa courbe sur $]-\infty, 6[$.

INDICE

Outil : $g'(x)$ s'écrit $-\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{6 - x}}$; dérive ensuite l'inverse de $x \mapsto \sqrt{6 - x}$.

Exercice 6

Points d'inflexion d'un polynôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + x$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

INDICE

Outil : dérivée d'une somme et dérivée de $x \mapsto x^n$.

2.

Étudier le signe de $f''(x)$. En déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$ et ses points d'inflexion.

INDICE

Outil : le trinôme $x(x-2)$ a deux racines ; regarde si f'' change de signe en chacune.

3.

Écrire l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A.

INDICE

Outil : calcule $f'(2)$, puis utilise $y = f'(2)(x-2) + f(2)$.

Exercice 7

Un axe de symétrie

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 13}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal.

1.

Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : écris le trinôme sous la forme $(x+3)^2 + k$.

2.

Calculer $f(-6-x)$ pour tout réel x. En déduire un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ et un intervalle d'étude réduit.

INDICE

Outil : développe $(-6-x)^2 + 6(-6-x) + 13$. Ici $2a = -6$.

Exercice 8

Un centre de symétrie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x}{x - 2}$$

On note Ω le point de coordonnées $(2, 8)$.

1.

Vérifier que, si $x \neq 2$, alors $4 - x \neq 2$, puis calculer $f(4 - x)$.

INDICE

Outil : développe $3(4-x)^2 - 4(4-x)$ et simplifie le dénominateur $(4-x) - 2$.

2.

Calculer $f(4 - x) + f(x)$ pour $x \neq 2$. Conclure.

INDICE

Outil : les deux quotients ont le même dénominateur $x - 2$.

Exercice 9

Réduire par la période et la parité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$.

1.

Vérifier que f est périodique de période 8.

INDICE

Outil : calcule $\frac{\pi(x+8)}{4}$ et utilise la période 2π du cosinus.

2.

Étudier la parité de f.

INDICE

Outil : pour tout réel t, $\cos(-t) = \cos t$.

3.

En déduire un intervalle d'étude de longueur 4 et la façon de compléter la courbe.

INDICE

Outil : une fonction paire de période T s'étudie sur $\left[0, \frac{T}{2}\right]$.