BURHAN

Étude et représentation des fonctions : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Étude et représentation des fonctions	Application	9

Exercice 1

Asymptotes lues sur des limites

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ par :

$$f(x) = \frac{2 - 4x}{x - 5}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $\lim_{x \to 5^+} f(x)$ et $\lim_{x \to 5^-} f(x)$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Outil : le numérateur tend vers un réel non nul ; étudie le signe de $x - 5$ de chaque côté de 5.

CORRIGÉ

Numérateur. Quand x tend vers 5, $2 - 4x$ tend vers $2 - 20 = -18$, réel strictement négatif.

Dénominateur. $x - 5$ tend vers 0 ; il est strictement positif pour $x > 5$ et strictement négatif pour $x < 5$.

Conclusion. D'après la limite d'un quotient, $\lim_{x \to 5^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 5^-} f(x) = +\infty$. La droite d'équation $x = 5$ est donc asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

2.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Outil : garde le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

CORRIGÉ

Limites. D'après la règle du terme de plus haut degré, en $+\infty$ comme en $-\infty$, $f(x)$ a la même limite que :

$$\frac{-4x}{x} = -4.$$

Conclusion. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = -4$. La droite d'équation $y = -4$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

3.

La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe-t-elle la droite d'équation $y = -4$?

INDICE

Outil : résous l'équation $f(x) = -4$ pour $x \neq 5$, en multipliant par $x - 5$.

CORRIGÉ

Équation. Soit $x \neq 5$. En multipliant par $x - 5$, non nul, l'équation $f(x) = -4$ équivaut à :

$$2 - 4x = -4(x - 5),$$

soit $2 - 4x = -4x + 20$, soit $2 = 20$.

Conclusion. Cette égalité est fausse : l'équation $f(x) = -4$ n'a aucune solution. La courbe $\mathcal{C}_f$ ne coupe jamais son asymptote horizontale.

Exercice 2

Une asymptote oblique annoncée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 2}$$

On note (D) la droite d'équation $y = 3x + 1$.

1.

Vérifier que, pour tout $x \neq 2$:

$$f(x) = 3x + 1 + \frac{3}{x - 2}.$$

INDICE

Outil : réduis le membre de droite au même dénominateur $x - 2$, puis développe.

CORRIGÉ

Même dénominateur. Soit $x \neq 2$. On réduit le membre de droite au dénominateur $x - 2$:

$$\begin{aligned} &3x + 1 + \frac{3}{x - 2} \\ &= \frac{(3x + 1)(x - 2) + 3}{x - 2}. \end{aligned}$$

Numérateur. On développe :

$$\begin{aligned} &(3x + 1)(x - 2) + 3 \\ &= 3x^2 - 6x + x - 2 + 3 \\ &= 3x^2 - 5x + 1. \end{aligned}$$

Conclusion. On retrouve le numérateur de $f(x)$: pour tout $x \neq 2$, $f(x) = 3x + 1 + \frac{3}{x - 2}$.

2.

En déduire que (D) est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Outil : écris $f(x) - (3x + 1)$ avec la question 1, puis cherche sa limite.

CORRIGÉ

Différence. D'après la question 1, pour tout $x \neq 2$:

$$f(x) - (3x + 1) = \frac{3}{x - 2}.$$

Limites. $x - 2$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$. D'après la limite de l'inverse, $\frac{3}{x - 2}$ tend vers 0 dans les deux cas.

Conclusion. La différence $f(x) - (3x + 1)$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$: la droite (D) est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 3

Reconnaître une branche parabolique

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - 3x$. Étudier la branche infinie de sa courbe en $+\infty$.

INDICE

Outil : calcule la limite de $f(x)$, puis celle de $\dfrac{f(x)}{x}$.

CORRIGÉ

Limite de f. D'après la règle du terme de plus haut degré, $f(x)$ a en $+\infty$ la même limite que $\dfrac{x^2}{4}$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Limite du quotient. Pour tout réel $x \neq 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{4} - 3.$$

D'après la limite d'une somme, ce quotient tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Conclusion. La courbe de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2.

Soit g la fonction définie sur $\left[-\dfrac{7}{3}, +\infty\right[$ par $g(x) = \sqrt{3x+7}$. Étudier la branche infinie de sa courbe en $+\infty$.

INDICE

Outil : pour $x > 0$, écris $\dfrac{g(x)}{x}$ sous une seule racine, en remarquant que $x = \sqrt{x^2}$.

CORRIGÉ

Limite de g. Quand x tend vers $+\infty$, $3x+7$ tend vers $+\infty$. D'après la limite d'une racine, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Limite du quotient. Pour tout réel $x > 0$, $x = \sqrt{x^2}$, donc :

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{x} &= \sqrt{\frac{3x+7}{x^2}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}.\end{aligned}$$

En $+\infty$, $\dfrac{3}{x}$ et $\dfrac{7}{x^2}$ tendent vers 0. D'après la limite d'une somme puis d'une racine, $\dfrac{g(x)}{x}$ tend vers 0.

Conclusion. La courbe de g admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Exercice 4

Courbe au-dessus ou au-dessous d'une droite

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - 1$, $\mathcal{C}_f$ sa courbe et (D) la droite d'équation $y = 2x + 3$.

1.

Vérifier que, pour tout réel x :

$$f(x) - (2x+3) = \frac{(x-4)(x+2)}{2}.$$

INDICE

Outil : simplifie la différence, puis développe le membre de droite.

CORRIGÉ

Différence. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & f(x) - (2x+3) \\ &= \frac{x^2}{2} + x - 1 - 2x - 3 \\ &= \frac{x^2 - 2x - 8}{2}. \end{aligned}$$

Membre de droite. On développe :

$$\begin{aligned} & (x-4)(x+2) \\ &= x^2 + 2x - 4x - 8 \\ &= x^2 - 2x - 8. \end{aligned}$$

Conclusion. Les deux écritures sont égales : pour tout réel x, $f(x) - (2x+3) = \dfrac{(x-4)(x+2)}{2}$.

2.

En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D).

INDICE

Outil : un trinôme est du signe de son coefficient de x^2 à l'extérieur de ses racines.

CORRIGÉ

Signe de la différence. Le trinôme $(x-4)(x+2)$ a pour racines -2 et 4, et son coefficient de x^2 vaut $1 > 0$: il est strictement positif à l'extérieur des racines et strictement négatif entre elles. Le facteur $\dfrac{1}{2}$ ne change pas ce signe.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) sur $]-\infty, -2[$ et sur $]4, +\infty[$, au-dessous de (D) sur $]-2, 4[$. Elle rencontre (D) aux points d'abscisses -2 et 4.

3.

Donner les coordonnées des points communs à $\mathcal{C}_f$ et à (D).

INDICE

Outil : leurs abscisses annulent la différence ; calcule l'ordonnée sur la droite.

CORRIGÉ

Abscisses. Un point commun a une abscisse x telle que $f(x) - (2x + 3) = 0$. D'après la question 1, $x = -2$ ou $x = 4$.

Ordonnées. On les calcule sur (D) : $2 \times (-2) + 3 = -1$ et $2 \times 4 + 3 = 11$.

Conclusion. Les points communs sont $(-2, -1)$ et $(4, 11)$.

Exercice 5

Concavité par la dérivée seconde

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + x^2 - 5x$. Calculer $f''(x)$ et en déduire la concavité de sa courbe.

INDICE

Outil : dérive deux fois terme à terme.

CORRIGÉ

Dérivées. f est une fonction polynôme, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après la dérivée d'une somme, pour tout réel x :

$$f'(x) = x^3 + 2x - 5,$$
$$f''(x) = 3x^2 + 2.$$

Signe. Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$, donc $f''(x) \geq 2 > 0$.

Conclusion. La dérivée seconde est strictement positive sur $\mathbb{R}$: la courbe de f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2.

Soit g la fonction définie sur $]-\infty, 6]$ par $g(x) = \sqrt{6 - x}$. Calculer $g'(x)$ puis $g''(x)$ pour $x < 6$, et en déduire la concavité de sa courbe sur $]-\infty, 6[$.

INDICE

Outil : $g'(x)$ s'écrit $-\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{6 - x}}$; dérive ensuite l'inverse de $x \mapsto \sqrt{6 - x}$.

CORRIGÉ

Dérivée première. Pour tout $x < 6$, $6 - x > 0$. D'après la dérivée de la racine d'une fonction, g est dérivable sur $]-\infty, 6[$ et :

$$g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{6 - x}}.$$

Dérivée seconde. On écrit $g'(x) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{6 - x}}$. D'après la dérivée de l'inverse, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{6 - x}}$ a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2(6 - x)\sqrt{6 - x}}$. Donc, pour tout $x < 6$:

$$g''(x) = -\frac{1}{4(6 - x)\sqrt{6 - x}}.$$

Conclusion. Pour tout $x < 6$, $(6 - x)\sqrt{6 - x} > 0$, donc $g''(x) < 0$: la courbe de g est concave sur $]-\infty, 6[$.

Exercice 6

Points d'inflexion d'un polynôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + x$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

INDICE

Outil : dérivée d'une somme et dérivée de $x \mapsto x^n$.

CORRIGÉ

Dérivée. f est une fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après la dérivée d'une somme et celle de $x \mapsto x^n$, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 1.$$

Dérivée seconde. De même, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$f''(x) = x^2 - 2x = x(x-2).$$

2.

Étudier le signe de $f''(x)$. En déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$ et ses points d'inflexion.

INDICE

Outil : le trinôme $x(x-2)$ a deux racines ; regarde si f'' change de signe en chacune.

CORRIGÉ

Signe de $f''(x)$. Le trinôme $x(x-2)$ a pour racines 0 et 2, et son coefficient de x^2 vaut $1 > 0$. Donc $f''(x) > 0$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]2, +\infty[$, et $f''(x) < 0$ sur $]0, 2[$.

Concavité. $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-\infty, 0]$ et sur $[2, +\infty[$, concave sur $[0, 2]$.

Points d'inflexion. f'' s'annule en changeant de signe en 0 et en 2. On calcule $f(0) = 0$ et :

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{16}{12} - \frac{8}{3} + 2 \\ &= \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + \frac{6}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Conclusion. Les points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ sont $O(0,0)$ et $A\left(2, \frac{2}{3}\right)$.

3.

Écrire l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A.

INDICE

Outil : calcule $f'(2)$, puis utilise $y = f'(2)(x-2) + f(2)$.

CORRIGÉ

Pente. D'après la question 1, $f'(2) = \dfrac{8}{3} - 4 + 1 = -\dfrac{1}{3}$.

Tangente. La tangente en A a pour équation $y = f'(2)(x-2) + f(2)$, c'est-à-dire :

$$y = -\frac{1}{3}(x-2) + \frac{2}{3},$$

soit $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$.

Exercice 7

Un axe de symétrie

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 13}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal.

1.

Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : écris le trinôme sous la forme $(x+3)^2 + k$.

CORRIGÉ

Forme canonique. Pour tout réel x :

$$x^2 + 6x + 13 = (x+3)^2 + 4.$$

Signe. Un carré est positif ou nul, donc $(x+3)^2 + 4 \geq 4 > 0$ pour tout réel x.

Conclusion. La racine $\sqrt{x^2 + 6x + 13}$ existe pour tout réel x : $D_f = \mathbb{R}$.

2.

Calculer $f(-6 - x)$ pour tout réel x. En déduire un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ et un intervalle d'étude réduit.

INDICE

Outil : développe $(-6-x)^2 + 6(-6-x) + 13$. Ici $2a = -6$.

CORRIGÉ

Calcul de $f(-6-x)$. Soit x un réel ; $-6 - x$ est aussi un réel, et :

$$\begin{aligned}(-6-x)^2 + 6(-6-x) + 13 \\ = 36 + 12x + x^2 \\ \quad - 36 - 6x + 13 \\ = x^2 + 6x + 13.\end{aligned}$$

Donc $f(-6-x) = f(x)$.

Axe de symétrie. On a $-6 = 2 \times (-3)$: pour tout réel x, $2 \times (-3) - x$ appartient à $D_f = \mathbb{R}$ et $f(2 \times (-3) - x) = f(x)$. Donc la droite d'équation $x = -3$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Domaine d'étude réduit. Il suffit d'étudier f sur $[-3, +\infty[$, puis de compléter la courbe par la symétrie d'axe la droite d'équation $x = -3$.

Exercice 8

Un centre de symétrie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x}{x - 2}$$

On note Ω le point de coordonnées $(2, 8)$.

1.

Vérifier que, si $x \neq 2$, alors $4 - x \neq 2$, puis calculer $f(4 - x)$.

INDICE

Outil : développe $3(4-x)^2 - 4(4-x)$ et simplifie le dénominateur $(4-x) - 2$.

CORRIGÉ

Domaine. Soit $x \neq 2$. Si l'on avait $4 - x = 2$, on aurait $x = 2$: donc $4 - x \neq 2$, et $f(4 - x)$ existe.

Numérateur. On développe :

$$\begin{aligned} &3(4-x)^2 - 4(4-x) \\ &= 48 - 24x + 3x^2 \\ &\quad - 16 + 4x \\ &= 3x^2 - 20x + 32. \end{aligned}$$

Dénominateur. $(4 - x) - 2 = 2 - x$.

Conclusion. Pour tout $x \neq 2$:

$$\begin{aligned} f(4-x) &= \frac{3x^2 - 20x + 32}{2 - x} \\ &= -\frac{3x^2 - 20x + 32}{x - 2}. \end{aligned}$$

2.

Calculer $f(4-x)+f(x)$ pour $x \neq 2$. Conclure.

INDICE

Outil : les deux quotients ont le même dénominateur $x-2$.

CORRIGÉ

Numérateur commun. Soit $x \neq 2$. D'après la question 1, $f(4-x)$ et $f(x)$ s'écrivent avec le dénominateur $x-2$. La somme de leurs numérateurs vaut :

$$\begin{aligned}&(3x^2-4x)\\&\quad-(3x^2-20x+32)\\&=16x-32.\end{aligned}$$

Somme. Donc :

$$\begin{aligned}&f(4-x)+f(x)\\&=\frac{16x-32}{x-2}=16.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \neq 2$, $4-x \neq 2$ et $f(2\times 2-x)+f(x)=2\times 8$: le point $\Omega(2,8)$ est centre de symétrie de la courbe de f.

Exercice 9

Réduire par la période et la parité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$.

1.

Vérifier que f est périodique de période 8.

INDICE

Outil : calcule $\dfrac{\pi(x+8)}{4}$ et utilise la période 2π du cosinus.

CORRIGÉ

Calcul. Soit x un réel. Alors $x + 8$ est un réel et :

$$\frac{\pi(x+8)}{4} = \frac{\pi x}{4} + 2\pi.$$

Période du cosinus. Le cosinus est de période 2π, donc :

$$\begin{aligned} &f(x+8) \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi x}{4} + 2\pi\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) = f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x+8) = f(x)$: f est périodique de période 8.

2.

Étudier la parité de f.

INDICE

Outil : pour tout réel t, $\cos(-t) = \cos t$.

CORRIGÉ

Domaine. Pour tout réel x, $-x$ est un réel : $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.

Calcul. Soit x un réel. Comme $\cos(-t) = \cos t$ pour tout réel t :

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2\cos\left(-\frac{\pi x}{4}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) = f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. f est paire.

3.

En déduire un intervalle d'étude de longueur 4 et la façon de compléter la courbe.

INDICE

Outil : une fonction paire de période T s'étudie sur $\left[0, \frac{T}{2}\right]$.

CORRIGÉ

Intervalle d'étude. f est de période 8 : il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur 8, par exemple $[-4, 4]$. Comme f est paire, on l'étudie sur $[0, 4]$.

Construction de la courbe. On trace la courbe sur $[0, 4]$, puis on la complète par la symétrie d'axe l'axe des ordonnées : on obtient la courbe sur $[-4, 4]$. On applique enfin les translations de vecteurs $8k\,\vec{i}$, où k est un entier relatif.