BURHAN

Étude et représentation des fonctions

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/cours

Chapitre	Semestre
Étude et représentation des fonctions	Semestre 2

Que devient une courbe très loin ?

Prends la fonction h définie pour $x \neq 1$ par :

$$h(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1}.$$

Avec la calculatrice, calcule $h(x)$ pour de grandes valeurs de x :

x	10	100	1000
$h(x)$	$12{,}1111$	$102{,}0101$	$1002{,}0010$

Les valeurs de $h(x)$ sont arrondies à 10^{-4} près. Compare chacune avec la valeur de x qui lui correspond.

Devine : Une courbe qui colle à une droite ?

Place sur la courbe de h les points d'abscisses 10, 100 et 1000. Au loin, de quelle droite la courbe semble-t-elle se rapprocher ?

A. De la droite d'équation $y = 2$.

Faux.

Les valeurs de $h(x)$ grandissent sans fin : elles ne restent pas près de 2.

B. De la droite d'équation $y = x + 2$.

Juste.

Juste : l'écart $h(x) - (x+2)$ devient très petit.

C. De la droite d'équation $y = x$.

Faux.

L'écart $h(x) - x$ reste proche de 2 : il ne devient pas petit.

D. D'aucune droite : la courbe monte trop vite.

Faux.

Elle monte, mais au même rythme que x : l'écart $h(x) - x$ reste voisin de 2.

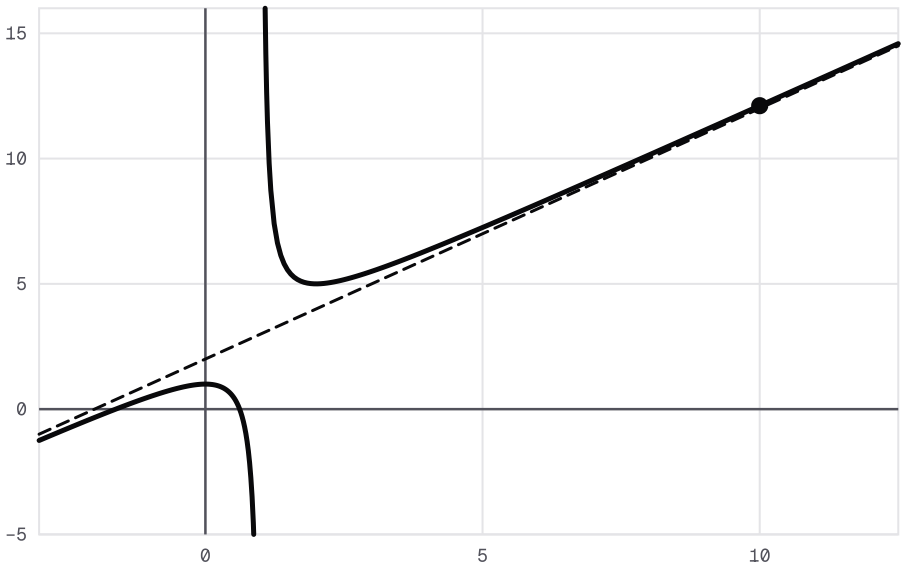
Correction

Pour $x \neq 1$, on mesure l'écart vertical entre la courbe et la droite :

$$h(x) - (x+2) = \frac{1}{x-1}.$$

Quand x tend vers $+\infty$, $x-1$ tend vers $+\infty$. D'après la limite de l'inverse, cet écart tend vers 0.

Au loin, la courbe de h se confond presque avec la droite d'équation $y = x + 2$. Une telle droite s'appellera une asymptote oblique.



La courbe de h : x ↦ x + 2 + 1/(x − 1) et la droite d'équation y = x + 2, en pointillés. Déjà au point d'abscisse 10, la courbe est presque sur la droite ; aux abscisses 100 et 1000, hors du cadre, l'écart est encore plus petit.

Dans ce chapitre, tu apprends à décrire l'allure d'une courbe très loin de l'origine. Tu situes une courbe par rapport à une droite. La dérivée seconde te dit dans quel sens tourne la courbe. Les symétries réduisent le travail. Enfin, tu mènes une étude complète, du calcul jusqu'au tracé.

Rappels : limites, dérivée, symétries

Rappel. Deux outils du chapitre « Limite d'une fonction numérique » servent sans cesse ici.

À l'infini, pour une fonction rationnelle, on ne garde que le terme de plus haut degré du numérateur et celui du dénominateur. Ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

En un réel, si le numérateur tend vers un réel non nul et le dénominateur vers 0 en gardant un signe, le quotient a une limite infinie. Son signe dépend du côté :

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x - 2} = +\infty,$$
$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty.$$

Dans ce chapitre, chaque calcul cite sa règle par son nom : limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de l'inverse, d'une racine, ou règle du terme de plus haut degré.

Vérifie : Le terme de plus haut degré

Quelle est la limite de $\dfrac{1-4x}{2x+5}$ quand x tend vers $+\infty$?

A. $\dfrac{1}{5}$

Faux.

C'est la valeur du quotient en 0, pas sa limite en $+\infty$.

B. -2

Juste.

Juste : $\dfrac{-4x}{2x} = -2$.

C. 2

Faux.

Le signe moins de $-4x$ a disparu.

D. $-\infty$

Faux.

En haut comme en bas, le degré vaut 1 : la limite cherchée est réelle.

Correction

D'après la règle du terme de plus haut degré, la limite cherchée est celle de $\dfrac{-4x}{2x}$. Ce quotient vaut -2 pour tout $x \neq 0$. Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1-4x}{2x+5} = -2.$$

Rappel. Au chapitre « Dérivabilité », un théorème admis relie le signe de la dérivée aux variations sur un intervalle I.

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I, alors f est croissante sur I.
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I, alors f est décroissante sur I.

Si de plus f' ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de I, la monotonie est stricte. Par exemple, si $f'(x) > 0$ pour tout x de I sauf en un nombre fini de réels où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I.

Un extremum local apparaît là où f' s'annule en changeant de signe.

Rappel. Quatre outils du chapitre « Dérivabilité » servent tout au long de ce chapitre.

- La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
- Sur un intervalle où u est dérivable et ne s'annule pas, $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

- Sur un intervalle où u est dérivable et strictement positive, $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- Si u est dérivable sur un intervalle contenant les réels $ax+b$, la dérivée de $x \mapsto u(ax+b)$ est $x \mapsto au'(ax+b)$.

Enfin, du chapitre « Généralités sur les fonctions numériques » : un trinôme qui a deux racines est du signe de son coefficient de x^2 à l'extérieur de ses racines, et du signe contraire entre elles. Sans racine, il garde le signe de ce coefficient.

Vérifie : L'équation d'une tangente

Au point d'abscisse 1, quelle droite est tangente à la courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{2x-1}$?

A. $y = -2x + 3$

Juste.

Juste : la valeur en 1 est 1 et le nombre dérivé -2.

B. $y = -x + 2$

Faux.

La dérivée de $2x-1$ vaut 2 : ce facteur manque dans le nombre dérivé.

C. $y = 2x - 1$

Faux.

La dérivée de l'inverse porte un signe moins.

D. $y = -2x$

Faux.

Cette droite ne passe pas par le point $(1, 1)$ de la courbe.

Correction

Sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, d'après la dérivée de l'inverse, la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{2x-1}$ est $x \mapsto -\dfrac{2}{(2x-1)^2}$.

En 1, la valeur est 1 et le nombre dérivé -2. La tangente a pour équation $y = -2(x-1)+1$, c'est-à-dire :

$$y = -2x + 3.$$

Rappel. Au chapitre « Généralités sur les fonctions numériques », tu as caractérisé les symétries d'une courbe. On suppose que, pour tout x de D_f, le réel $2a - x$ appartient aussi à D_f.

- Si $f(2a-x) = f(x)$ pour tout x de D_f, alors $\mathcal{C}_f$ admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = a$.
- Si $f(2a-x) + f(x) = 2b$ pour tout x de D_f, alors le point $\Omega(a, b)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Asymptotes verticales et horizontales

Une courbe qui file vers l'infini

En clair. Considère la fonction $k : x \mapsto \dfrac{3x-1}{x+2}$, définie pour $x \neq -2$.

Près de -2, son dénominateur devient minuscule. La courbe file alors vers le haut ou vers le bas, le long d'une droite verticale qu'elle ne touche jamais.

Très loin à droite ou à gauche, au contraire, $k(x)$ se stabilise près d'une hauteur fixe.

Devine : Tout près de -2, par la droite

On calcule $k(-1{,}9) = -67$, puis $k(-1{,}99) = -697$, puis $k(-1{,}999) = -6997$. Que devient $k(x)$ quand x s'approche de -2 par la droite ?

A. Il se rapproche de -7, la limite du numérateur.

Faux.
Le numérateur tend bien vers -7, mais on le divise par un nombre minuscule.

B. Il se rapproche de 3.

Faux.
3 décrit $k(x)$ très loin, pas près de -2.

C. Il devient négatif, et grand en valeur absolue.

Juste.
Juste : les valeurs plongent vers $-\infty$.

D. Il devient positif et de plus en plus grand.

Faux.
Les trois valeurs calculées sont négatives.

Correction
Quand x tend vers -2 à droite, $3x-1$ tend vers -7 et $x+2$ tend vers 0 en restant positif. D'après la limite d'un quotient :

$$\lim_{x \to -2^+} k(x) = -\infty.$$

La courbe plonge le long de la droite d'équation $x = -2$.

Asymptote verticale

Définition : Asymptote verticale

Soit f une fonction, a un réel et r un réel strictement positif, avec f définie sur $]a, a+r[$ ou sur $]a-r, a[$. Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand x tend vers a à droite, ou à gauche, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exemple : les deux côtés de -2

Pour x proche de -2, le numérateur $3x-1$ tend vers -7, un réel négatif.

- À droite de -2, $x+2>0$: d'après la limite d'un quotient, $\lim_{x\to -2^+} k(x) = -\infty$.
- À gauche de -2, $x+2<0$: d'après la même règle, $\lim_{x\to -2^-} k(x) = +\infty$.

Une seule de ces deux limites suffirait. La droite d'équation $x=-2$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_k$.

Asymptote horizontale

Définition : Asymptote horizontale

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]\alpha, +\infty[$ et b un réel. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, on dit que la droite d'équation $y=b$ est une **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$. On définit de même une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$, pour une fonction définie sur un intervalle $]-\infty, \alpha[$.

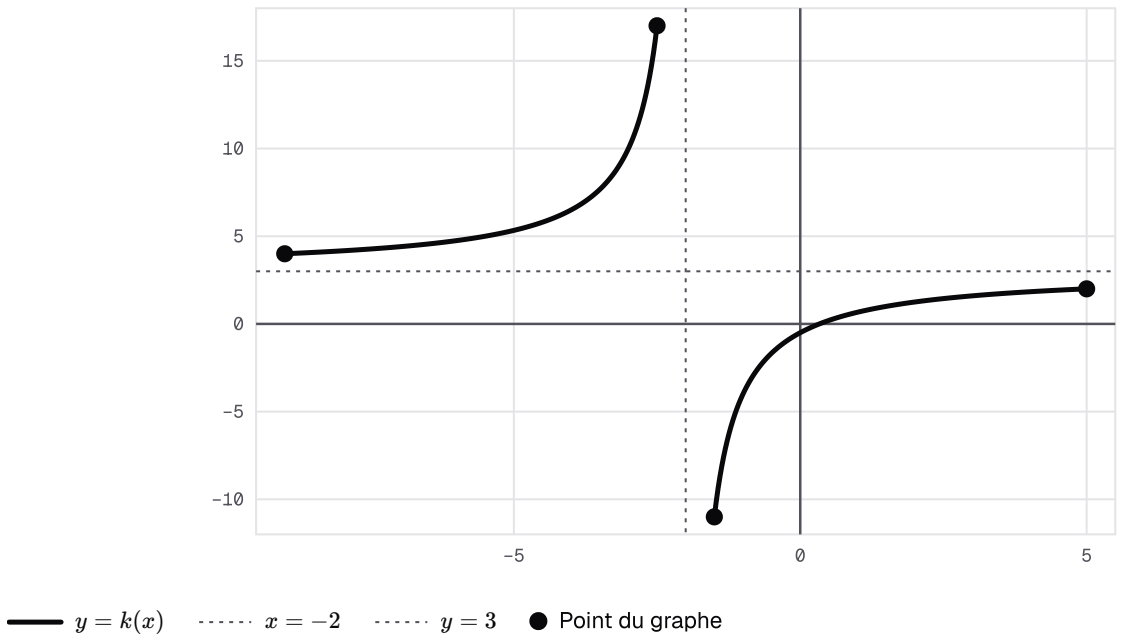
Exemple : très loin à droite et à gauche

D'après la règle du terme de plus haut degré :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} k(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x} \\ &= 3.\end{aligned}$$

De même, $\lim_{x\to-\infty} k(x) = 3$. La droite d'équation $y=3$ est donc une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_k$, au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Autre lecture : pour $x \neq -2$, $k(x) = 3 - \dfrac{7}{x+2}$, et le terme $\dfrac{7}{x+2}$ tend vers 0 des deux côtés.



La courbe de k avec ses deux asymptotes : la droite verticale d'équation x = −2 et la droite horizontale d'équation y = 3.

Un piège, puis à toi

Attention : une courbe peut couper son asymptote

✗ « Une courbe ne touche jamais son asymptote horizontale. »

✓ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 + x}{x^2 + 1}$. D'après la règle du terme de plus haut degré, f tend vers 2 en $+\infty$ et en $-\infty$: la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale.

Comme $x^2 + 1 > 0$, l'équation $f(x) = 2$ équivaut à $2x^2 + x = 2x^2 + 2$, c'est-à-dire à $x = 2$. La courbe rencontre donc son asymptote au point $(2, 2)$.

Une asymptote décrit la courbe **au loin** seulement.

À toi : Deux asymptotes à trouver

Soit $v(x) = \dfrac{5 - 2x}{x - 4}$, pour $x \neq 4$. Détermine les asymptotes de la courbe de v, en calculant les limites utiles. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Cherche les limites de v à droite et à gauche de 4, puis en $+\infty$ et en $-\infty$.
Indice 2
En 4, le numérateur tend vers -3 : regarde le signe de $x - 4$ de chaque côté.
Indice 3
Point délicat : à l'infini, garde les termes de plus haut degré, $\dfrac{-2x}{x}$, sans perdre le signe moins.

Réponse

Asymptote verticale. Quand x tend vers 4, $5 - 2x$ tend vers -3.

- À droite de 4, $x - 4 > 0$: d'après la limite d'un quotient, $\lim_{x \to 4^+} v(x) = -\infty$.
- À gauche de 4, $x - 4 < 0$: de même, $\lim_{x \to 4^-} v(x) = +\infty$.

La droite d'équation $x = 4$ est donc une asymptote verticale.

Asymptote horizontale. D'après la règle du terme de plus haut degré, la limite de v en $+\infty$ et en $-\infty$ est celle de $\dfrac{-2x}{x}$, soit -2.

Conclusion. La courbe de v admet l'asymptote verticale d'équation $x = 4$ et, des deux côtés, l'asymptote horizontale d'équation $y = -2$.

Asymptote oblique

Un zoom arrière

En clair. Trace la courbe de h à la calculatrice, puis fais un zoom arrière. Plus la fenêtre est grande, plus la courbe ressemble à une droite inclinée.

On ne demande pas à la courbe de devenir une droite. On demande que l'écart vertical entre les deux tende vers 0.

Devine : Quelle courbe suit la droite y = 2x ?

Au voisinage de $+\infty$, laquelle de ces fonctions a une courbe qui se rapproche de la droite d'équation $y = 2x$?

A. $x \mapsto 2x + 1$

Faux.

L'écart avec $2x$ vaut toujours 1 : il ne tend pas vers 0.

B. $x \mapsto 2x + \sqrt{x}$

Faux.

L'écart $\sqrt{x}$ grandit sans fin.

C. $x \mapsto 2x^2$

Faux.

L'écart $2x^2 - 2x$ tend vers $+\infty$.

D. $x \mapsto 2x + \dfrac{3}{x}$

Juste.

Juste : l'écart $\dfrac{3}{x}$ tend vers 0.

Correction

Pour chaque fonction, on calcule l'écart avec $2x$. Seul l'écart $\dfrac{3}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$, d'après la limite de l'inverse.

Pour $x \mapsto 2x+1$, la courbe reste à la distance verticale 1 de la droite : elle suit en fait la droite d'équation $y = 2x+1$.

La définition et la méthode

Définition : Asymptote oblique

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]\alpha, +\infty[$, et a et b deux réels avec $a \neq 0$. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0.$$

On définit de même une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$, pour une fonction définie sur un intervalle $]-\infty, \alpha[$.

Exemple : la fonction h de l'entrée

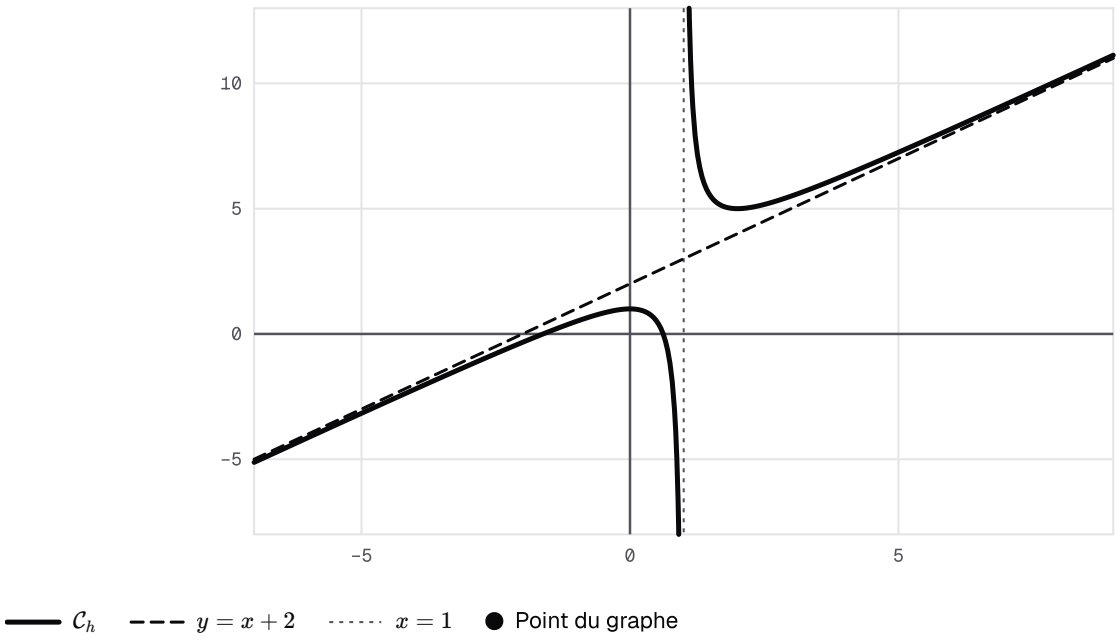
Comme à l'entrée, pour $x \neq 1$:

$$h(x) - (x+2) = \frac{1}{x-1}.$$

Quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $x-1$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. D'après la limite de l'inverse, l'écart tend vers 0.

La droite d'équation $y = x+2$ est donc une asymptote oblique à $\mathcal{C}_h$, au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Réduite au même dénominateur, $h(x)$ s'écrit $\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$. C'est la forme $x+2+\dfrac{1}{x-1}$ qui rend l'asymptote visible.



La courbe de h avec ses deux asymptotes : la droite d'équation x = 1, verticale, et l'asymptote oblique d'équation y = x + 2, en pointillés, dont la courbe se rapproche en +∞ comme en −∞.

Méthode : vérifier qu'une droite donnée est asymptote oblique

1. **Forme** la différence $f(x) - (ax + b)$ et simplifie-la : même dénominateur, ou quantité conjuguée.
2. **Cherche** sa limite en $+\infty$ ou en $-\infty$, en nommant la règle employée.
3. **Conclus** : une limite nulle fait de la droite une asymptote. Si $f(x)$ s'écrit déjà $ax + b + r(x)$, il suffit que $r(x)$ tende vers 0.
4. **Garde** cette différence : son signe dira plus tard de quel côté se place la courbe.

Trouver a, puis b

En clair. Parfois, la droite n'est pas donnée. Si la courbe suit la droite d'équation $y = ax + b$, alors $f(x)$ ressemble à ax pour x grand. Le quotient $\dfrac{f(x)}{x}$ révèle donc a. Il reste à mesurer le décalage $f(x) - ax$, qui révèle b.

Propriété : Recherche d'une asymptote oblique

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]\alpha, +\infty[$, avec $\alpha \geq 0$, et a et b deux réels avec $a \neq 0$. La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b.$$

L'énoncé est le même au voisinage de $-\infty$, pour une fonction définie sur un intervalle $]-\infty, \alpha[$ avec $\alpha \leq 0$.

Démonstration

Étape 1. Pour $x > \alpha$, on pose $g(x) = f(x) - (ax + b)$. Par définition d'une asymptote oblique, la droite est asymptote si et seulement si $g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Étape 2. Supposons que $g(x)$ tende vers 0. D'après la limite d'une somme, $f(x) - ax = b + g(x)$ tend vers b. Pour $x > \alpha$, on a $x > 0$ et $\dfrac{f(x)}{x} = a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{g(x)}{x}$; comme $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0, les limites d'un produit et d'une somme donnent $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$.

Étape 3. Réciproquement, si $f(x) - ax$ tend vers b, alors $g(x) = [f(x) - ax] - b$ tend vers 0, d'après la limite d'une somme : la droite est asymptote. La limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ sert à trouver a avant de chercher b.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve appelle g l'écart entre $f(x)$ et $ax + b$; il tend vers 0 quand la droite est asymptote. Elle divise ensuite par x : le quotient $\dfrac{f(x)}{x}$ s'écrit a plus deux termes qui tendent vers 0. Le quotient donne donc a. La différence $f(x) - ax = b + g(x)$ donne b.

Vérifie : L'idée de la preuve sur des nombres

Soit $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{5}{x}$, pour $x > 0$. On note a la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$, et b celle de $f(x) - ax$. Que valent a et b ?

A. $a = 2$ et $b = 5$

Faux.

Le terme $\dfrac{5}{x}$ tend vers 0 : il ne compte pas dans b.

B. $a = 2$ et $b = 3$

Juste.

Juste : les termes en $\dfrac{1}{x}$ disparaissent à la limite.

C. $a = 3$ et $b = 2$

Faux.

Le quotient $\dfrac{f(x)}{x}$ garde le coefficient de x, soit 2.

D. $a = 5$ et $b = 3$

Faux.

$\dfrac{5}{x^2}$ tend vers 0 : il ne donne pas a.

Correction

Pour $x > 0$, on divise chaque terme par x :

$$\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}.$$

D'après la limite d'une somme, ce quotient tend vers 2. Ensuite, $f(x) - 2x = 3 + \dfrac{5}{x}$ tend vers 3.

On retrouve l'idée de la preuve : le quotient fournit $a = 2$, la différence fournit $b = 3$. La droite d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote en $+\infty$.

Exemple : la racine d'un trinôme en +∞

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$. Pour tout réel x, $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 > 0$, donc $D_f = \mathbb{R}$.

Coefficient a. Pour $x > 0$, $\sqrt{x^2} = x$, donc :

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}.$$

Sous la racine, la somme tend vers 1. D'après la limite d'une racine, le quotient tend aussi vers 1.

Ordonnée b. Avec la quantité conjuguée, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{2x + 5}{\sqrt{x^2 + 2x + 5} + x} \\ &= \frac{2 + \dfrac{5}{x}}{\sqrt{1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^2}} + 1}. \end{aligned}$$

D'après les limites d'une somme et d'un quotient, $f(x) - x$ tend vers 1.

Conclusion. D'après la recherche d'une asymptote oblique, la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$. En $-\infty$, où $\sqrt{x^2} = -x$, le même calcul donne la droite d'équation $y = -x - 1$.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Trouver une asymptote oblique

Soit $w(x) = \dfrac{2x^2 + x - 4}{x + 2}$, pour $x \neq -2$. Calcule les limites de $\dfrac{w(x)}{x}$ et de $w(x) - 2x$ en $+\infty$, puis conclus. Contrôle enfin que $w(x) = 2x - 3 + \dfrac{2}{x+2}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris $\dfrac{w(x)}{x} = \dfrac{2x^2+x-4}{x^2+2x}$, puis applique la règle du terme de plus haut degré.

Indice 2

Réduis $w(x) - 2x$ au même dénominateur : tu obtiens $\dfrac{-3x-4}{x+2}$.

Indice 3

Point délicat : pour le contrôle, développe $(2x-3)(x+2)$ avant d'ajouter 2.

Réponse

Coefficient a. Pour $x \neq 0$ et $x \neq -2$:

$$\frac{w(x)}{x} = \frac{2x^2+x-4}{x^2+2x}.$$

La règle du terme de plus haut degré donne sa limite en $+\infty$: 2.

Ordonnée b. Pour $x \neq -2$:

$$\begin{aligned} & w(x) - 2x \\ & \quad 2x^2+x-4 \\ &= \frac{-2x^2-4x}{x+2} \\ &= \frac{-3x-4}{x+2}. \end{aligned}$$

D'après la même règle, cette différence tend vers -3.

Conclusion. D'après la recherche d'une asymptote oblique, la droite d'équation $y = 2x-3$ est asymptote à la courbe de w au voisinage de $+\infty$.

Contrôle. Pour tout réel x, $(2x-3)(x+2)+2 = 2x^2+x-4$. En divisant par $x+2$, on retrouve l'écriture annoncée de $w(x)$, pour $x \neq -2$.

Remarque : Coin devoir : rédiger une asymptote oblique

En devoir, écris la différence, sa limite avec la règle, puis la conclusion. Par exemple : « Pour $x \neq 1$, $h(x) - (x+2) = \dfrac{1}{x-1}$. D'après la limite de l'inverse, $\lim_{x\to+\infty}[h(x)-(x+2)] = 0$. Donc la droite d'équation $y = x+2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_h$ au voisinage de $+\infty$. »

Branches paraboliques

Monter sans suivre une droite

En clair. Certaines courbes montent sans fin sans suivre aucune droite.

Une parabole se redresse de plus en plus : elle finit par monter presque à la verticale. La courbe d'une racine carrée, elle, monte de moins en moins vite et s'aplatit.

Le quotient $\dfrac{f(x)}{x}$, coefficient directeur de la droite (OM) qui joint l'origine au point $M(x, f(x))$, distingue ces deux allures.

Devine : Une racine qui s'aplatit

Pour $x = 100$, puis $10\,000$, puis $1\,000\,000$, le quotient $\dfrac{\sqrt{2x+1}}{x}$ vaut environ $0{,}1418$, puis $0{,}0141$, puis $0{,}0014$. De quel réel se rapproche-t-il ?

A. De 2.

Faux.

2 est le coefficient de x sous la racine ; le quotient devient bien plus petit.

B. De $\sqrt{2}$.

Faux.

Les valeurs sont déjà bien inférieures à $\sqrt{2}$, et diminuent encore.

C. De 0.

Juste.

Juste : le quotient est divisé par 10 environ à chaque fois.

D. D'aucun réel : il grandit.

Faux.

Les valeurs calculées diminuent.

Correction

Pour $x > 0$, on a $x = \sqrt{x^2}$, donc :

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{2x+1}}{x}\\&= \sqrt{\frac{2x+1}{x^2}}\\&= \sqrt{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}.\end{aligned}$$

Sous la racine, la somme tend vers 0, d'après la limite d'une somme. D'après la limite d'une racine, le quotient tend donc vers 0.

La courbe monte sans fin, mais de plus en plus à plat.

Trois directions

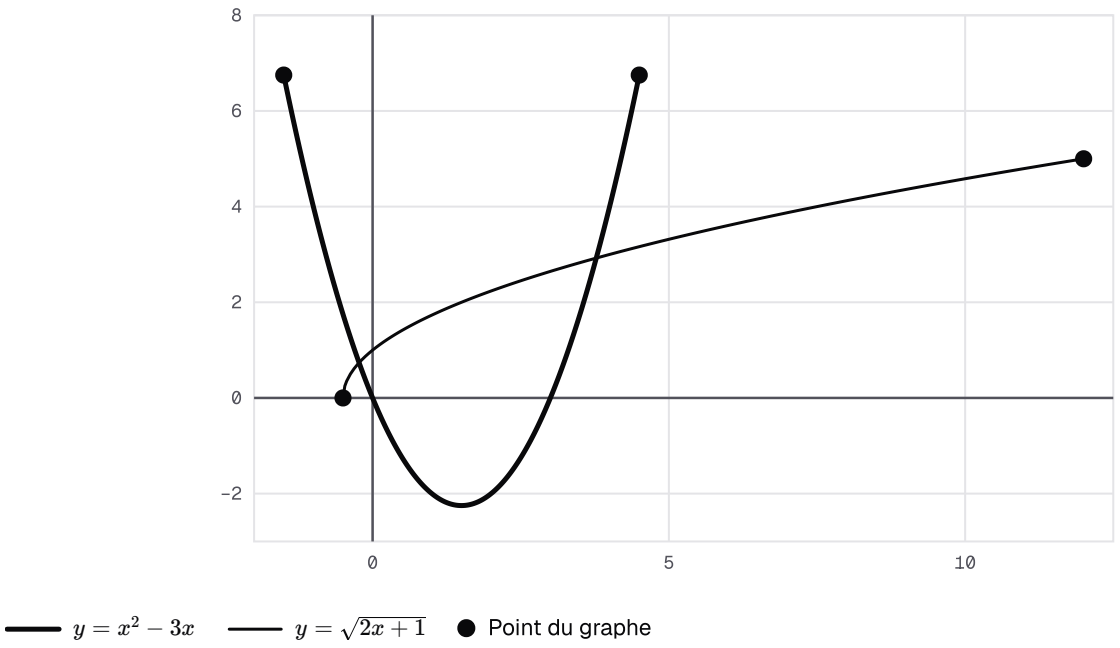
Définition : Branches paraboliques

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]\alpha, +\infty[$, avec $\alpha \geq 0$, telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

- Si $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.

- Si $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 0, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.
- Si $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers un réel $a \neq 0$ et si $f(x) - ax$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = ax$.

On définit de même ces branches au voisinage de $-\infty$.



Deux branches paraboliques : la parabole d'équation y = x² − 3x se redresse, la courbe d'équation y = √(2x + 1) s'aplatit.

Exemple : les deux branches de la figure

- Pour $x \mapsto x^2 - 3x$, la règle du terme de plus haut degré donne une limite $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Pour $x \neq 0$, $\dfrac{x^2 - 3x}{x} = x - 3$, qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$. Des deux côtés, la courbe admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
- Pour $x \mapsto \sqrt{2x+1}$, définie sur $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, la limite d'une racine donne $+\infty$ en $+\infty$. L'activité a montré que le quotient par x tend vers 0 : branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Attention : la limite de f(x)/x ne suffit pas

✗ « Pour $f : x \mapsto x + \sqrt{x}$, $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 1, donc la courbe a une asymptote oblique. »

✓ Sur $]0, +\infty[$, $\dfrac{f(x)}{x} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend bien vers 1. Mais $f(x) - x = \sqrt{x}$ tend vers $+\infty$.

Aucune asymptote oblique ici : on a affaire à une branche parabolique, dirigée par la droite d'équation $y = x$. Calcule toujours aussi la limite de $f(x) - ax$.

L'arbre de décision

Méthode : étudier une branche infinie

1. **Repère** les bornes ouvertes de D_f : réels où f n'est pas définie, $+\infty$, $-\infty$.
2. **En un réel** a : une limite infinie, à droite ou à gauche, donne l'asymptote verticale d'équation $x = a$.
3. **En l'infini** : une limite réelle b donne l'asymptote horizontale d'équation $y = b$. Une limite infinie conduit à la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$: infinie, direction l'axe des ordonnées ; nulle, direction l'axe des abscisses ; réelle $a \neq 0$, point suivant.
4. **Calcule** alors la limite de $f(x) - ax$: un réel b donne l'asymptote d'équation $y = ax + b$; une limite infinie, une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.

Exemple : Exemple guidé : suivre l'arbre

Soit q la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $q(x) = 2x + 1 - \sqrt{x}$.

Limite. Pour $x > 0$:

$$q(x) = x\left(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

D'après les limites d'une somme et d'un produit, q tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Quotient. Pour $x > 0$, $\dfrac{q(x)}{x} = 2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, qui tend vers 2 d'après la limite d'une somme.

Différence. La différence $q(x) - 2x = 1 - \sqrt{x}$ tend vers $-\infty$.

Conclusion. La courbe de q admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = 2x$.

Un piège, puis à toi

Attention : deux infinis, deux asymptotes

✗ « Pour $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 4x}$, la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote en $+\infty$, donc aussi en $-\infty$. »

✓ La fonction f est définie sur $]-\infty, -4] \cup [0, +\infty[$. Pour $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$, et non x.

En $-\infty$, la recherche d'une asymptote oblique donne $\dfrac{f(x)}{x}$ de limite -1, et $f(x)+x$ de limite -2. L'asymptote y est la droite d'équation $y=-x-2$.

Chaque infini se traite à part.

À toi : Deux branches à identifier

Étudie la branche infinie de la courbe de $m(x)=3x-\sqrt{x+1}$ au voisinage de $+\infty$, puis celle de $n(x)=1-x^2$ au voisinage de $-\infty$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour m, mets x en facteur pour trouver la limite, puis calcule $\dfrac{m(x)}{x}$ et $m(x)-3x$.

Indice 2

Pour n, la règle du terme de plus haut degré donne la limite ; simplifie ensuite $\dfrac{n(x)}{x}$.

Indice 3

Point délicat : en $-\infty$, $\dfrac{n(x)}{x}=\dfrac{1}{x}-x$ tend vers $+\infty$, car $-x$ y est positif.

Réponse

Fonction m. Pour $x>0$:

$$\frac{\sqrt{x+1}}{x}=\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

D'après la limite d'une racine, ce quotient tend vers 0 en $+\infty$. Comme $m(x)=x\left(3-\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}\right)$, la limite d'un produit donne $\lim_{x\to+\infty} m(x)=+\infty$.

Ensuite, $\dfrac{m(x)}{x}=3-\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ tend vers 3, et $m(x)-3x=-\sqrt{x+1}$ tend vers $-\infty$. La courbe de m admet donc une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=3x$.

Fonction n. D'après la règle du terme de plus haut degré, n tend vers $-\infty$ en $-\infty$. Pour $x\neq 0$, $\dfrac{n(x)}{x}=\dfrac{1}{x}-x$, qui tend vers $+\infty$ d'après la limite d'une somme. La courbe de n admet donc une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Position relative d'une courbe et d'une droite

Au-dessus ou au-dessous ?

En clair. Pour comparer une courbe et une droite, place-toi à une abscisse x fixée. Regarde le point de la courbe et le point de la droite situés à la verticale l'un de l'autre.

Le plus haut des deux a la plus grande ordonnée. Tout se joue donc sur le signe d'une différence.

Devine : Un point de la courbe de h

On a $h(3) = 5{,}5$, et la droite d'équation $y = x + 2$ passe par le point $(3, 5)$. Où est le point de $\mathcal{C}_h$ d'abscisse 3 ?

A. Au-dessous de la droite.

Faux.

Son ordonnée $5{,}5$ dépasse 5.

B. Sur la droite.

Faux.

Il faudrait $h(3) = 5$.

C. Au-dessus de la droite.

Juste.

Juste : $5{,}5 > 5$.

D. On ne peut pas savoir sans la courbe.

Faux.

Comparer les deux ordonnées suffit.

Correction

À l'abscisse 3, la courbe a pour ordonnée $h(3) = 5 + \dfrac{1}{2} = 5{,}5$, et la droite a pour ordonnée $3 + 2 = 5$.

La différence $5{,}5 - 5 = 0{,}5$ est positive : le point de la courbe est au-dessus de la droite.

La propriété et son idée

Propriété : Position relative d'une courbe et d'une droite

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère et (D) la droite d'équation $y = mx + p$.

- Si $f(x) - (mx + p) > 0$ pour tout x de I, alors $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de (D) sur I.
- Si $f(x) - (mx + p) < 0$ pour tout x de I, alors $\mathcal{C}_f$ est **au-dessous** de (D) sur I.
- Les points communs à $\mathcal{C}_f$ et à (D) ont pour abscisses les solutions de l'équation $f(x) = mx + p$.

Démonstration

Étape 1. Soit x un réel de I. Le point $M(x, f(x))$ de $\mathcal{C}_f$ et le point $P(x, mx + p)$ de (D) ont la même abscisse : ils sont sur une même droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Étape 2. Sur cette droite, M est au-dessus de P si et seulement si son ordonnée est la plus grande, c'est-à-dire si $f(x) - (mx + p) > 0$; il est au-dessous si cette différence est strictement négative, et $M = P$ si elle est nulle.

Étape 3. Si la différence est strictement positive pour tout x de I, chaque point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse dans I est au-dessus du point de (D) de même abscisse : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) sur I. Le deuxième cas se traite de même ; le troisième traduit $M = P$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Toute la preuve tient sur une verticale. Les points $M(x, f(x))$ et $P(x, mx + p)$ ont la même abscisse. Le signe de $f(x) - (mx + p)$ dit lequel est le plus haut. Si ce signe ne change pas sur I, la courbe reste du même côté de (D) sur tout I.

Vérifie : Le signe de la différence

Pour une fonction f et la droite (D) d'équation $y = mx + p$, on sait que $f(x) - (mx + p) = \dfrac{3 - x}{x^2 + 1}$. Sur $]3, +\infty[$, où est $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D) ?

A. Au-dessus de (D).

Faux.

Pour $x > 3$, le numérateur $3 - x$ est négatif.

B. Sur (D).

Faux.

La différence ne s'annule qu'en 3.

C. On ne peut pas savoir sans m et p.

Faux.

Le signe de la différence suffit : c'est l'idée de la preuve.

D. Au-dessous de (D).

Juste.

Juste : la différence est strictement négative.

Correction

Le dénominateur $x^2 + 1$ est strictement positif. Sur $]3, +\infty[$, $3 - x < 0$: la différence est strictement négative.

D'après la position relative d'une courbe et d'une droite, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (D) sur cet intervalle. Comme dans la preuve, tout se lit sur le signe de la différence, à abscisse fixée.

Exemple : la courbe de h et son asymptote

Pour $x \neq 1$:

$$h(x) - (x + 2) = \frac{1}{x - 1}.$$

- Sur $]1, +\infty[$, $x - 1 > 0$: la différence est strictement positive.
- Sur $]-\infty, 1[$, $x - 1 < 0$: la différence est strictement négative.

D'après la position relative d'une courbe et d'une droite, $\mathcal{C}_h$ est au-dessus de son asymptote sur $]1, +\infty[$ et au-dessous sur $]-\infty, 1[$.

Un quotient de numérateur 1 n'est jamais nul : l'équation $h(x) - (x + 2) = 0$ n'a aucune solution, et la courbe ne rencontre jamais cette asymptote.

Une courbe et sa tangente

Méthode : placer une courbe par rapport à une droite

1. **Écris** la différence $d(x) = f(x) - (mx + p)$, pour x dans D_f.
2. **Transforme** cette différence pour lire son signe : factorise, ou réduis au même dénominateur.
3. **Étudie** son signe, à l'aide d'un tableau de signes si besoin.
4. **Conclus** intervalle par intervalle : $d(x) > 0$, courbe au-dessus ; $d(x) < 0$, courbe au-dessous ; $d(x) = 0$, point commun.

Exemple : la fonction inverse et une tangente

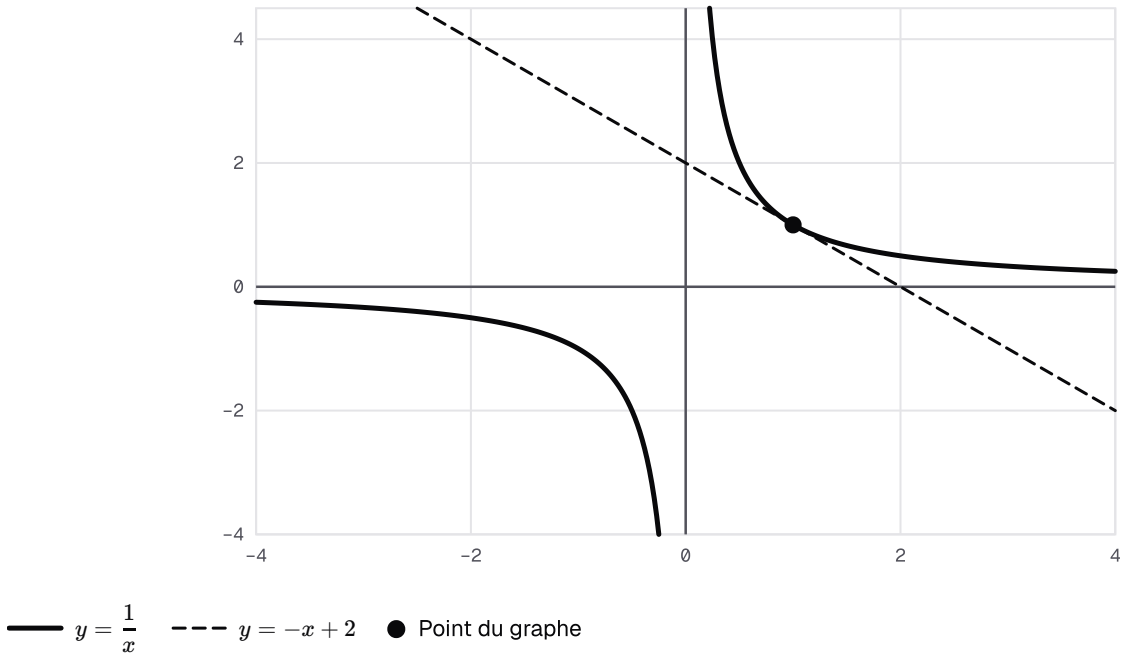
Pour tout $x \neq 0$, d'après les dérivées des fonctions usuelles, la fonction inverse a pour dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$. En 1, sa valeur est 1 et son nombre dérivé -1.

La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -(x - 1) + 1$, soit $y = -x + 2$. Pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - (-x + 2) &= \frac{1 + x^2 - 2x}{x} \\ &= \frac{(x - 1)^2}{x}. \end{aligned}$$

Sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, cette différence est strictement positive : la courbe est au-dessus de sa tangente. Elle la touche au point $(1, 1)$.

Sur $]-\infty, 0[$, la différence est strictement négative : la courbe est au-dessous.



L'hyperbole de la fonction inverse et sa tangente d'équation y = −x + 2 au point (1, 1). Sur]0, +∞[, la courbe reste au-dessus de la tangente et ne la touche qu'en ce point ; sur]−∞, 0[, elle est au-dessous.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Une position à étudier

Reprends $w(x) = \dfrac{2x^2 + x - 4}{x + 2}$, dont la courbe a pour asymptote la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 3$ en $+\infty$. Étudie la position de la courbe de w par rapport à (Δ). Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Utilise l'écriture $w(x) = 2x - 3 + \dfrac{2}{x + 2}$.

Indice 2

La différence $w(x) - (2x - 3)$ est un quotient de numérateur constant : son signe est celui du dénominateur.

Indice 3

Point délicat : w n'est pas définie en -2 ; étudie séparément $]-2, +\infty[$ et $]-\infty, -2[$.

Réponse

Pour $x \neq -2$, l'écriture de l'énoncé donne :

$$w(x) - (2x - 3) = \frac{2}{x + 2}.$$

- Sur $]-2, +\infty[$, $x + 2 > 0$: la différence est strictement positive, et la courbe est au-dessus de (Δ).

- Sur $]-\infty, -2[$, $x + 2 < 0$: la différence est strictement négative, et la courbe est au-dessous de (Δ).

La différence ne s'annule jamais. D'après la position relative d'une courbe et d'une droite, la courbe de w et (Δ) n'ont aucun point commun.

Remarque : Coin devoir : rédiger une position relative

En devoir, le signe de la différence et l'intervalle figurent dans la même phrase. Écris : « Pour tout x de $]1, +\infty[$, $h(x) - (x + 2) = \dfrac{1}{x - 1} > 0$. Donc $\mathcal{C}_h$ est au-dessus de la droite d'équation $y = x + 2$ sur $]1, +\infty[$. » Fais de même sur chaque intervalle.

Dérivée seconde et concavité

Une route qui tourne

En clair. Roule le long d'une courbe, de gauche à droite.

Sur certains arcs, la route tourne vers la gauche : la courbe reste au-dessus de ses tangentes, comme un bol. Sur d'autres, elle tourne vers la droite : la courbe reste au-dessous, comme un dôme.

La dérivée seconde va dire de quel côté tourne la route.

Devine : La parabole et ses tangentes

La tangente à la courbe de $x \mapsto x^2$ au point d'abscisse a a pour équation $y = 2ax - a^2$. Où est la courbe par rapport à cette tangente ?

A. Au-dessous, sauf au point de contact.
Faux.
Prends $a = 0$: la tangente est l'axe des abscisses, et $x^2 \geq 0$.

B. Au-dessus, sauf au point de contact.
Juste.
Juste : la différence vaut $(x - a)^2$.

C. Elle la traverse au point de contact.
Faux.
La différence est un carré : elle ne change pas de signe.

D. Cela dépend du signe de a.
Faux.
Le calcul ne dépend pas du signe de a.

Correction
Pour tout réel x :

$$x^2 - (2ax - a^2) = (x - a)^2.$$

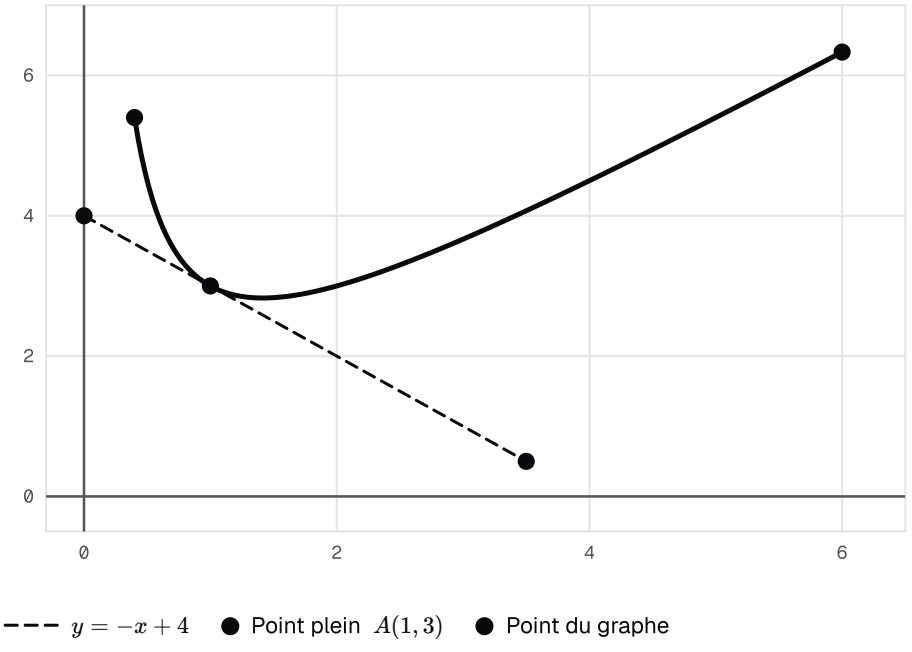
Ce carré est positif ou nul : chaque tangente reste sous la courbe et ne la touche qu'au point de contact. On dira que la courbe est convexe sur $\mathbb{R}$.

Convexe ou concave

Définition : Courbe convexe, courbe concave

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

- On dit que $\mathcal{C}_f$ est **convexe** sur I si, sur I, elle est située au-dessus de chacune de ses tangentes en un point d'abscisse dans I : pour tous réels a et x de I, $f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$.
- On dit que $\mathcal{C}_f$ est **concave** sur I si, sur I, elle est située au-dessous de chacune de ces tangentes : pour tous réels a et x de I, $f(x) \leq f'(a)(x - a) + f(a)$.



La courbe de x ↦ x + 2/x sur]0, +∞[et sa tangente au point A(1, 3). La courbe reste au-dessus de la tangente.

Le signe de la dérivée seconde

En clair. Sur un bol, la pente des tangentes augmente de gauche à droite : f' est croissante. Or c'est le signe de la dérivée de f', c'est-à-dire de f'', qui dit si f' croît. D'où l'idée : une dérivée seconde positive devrait donner une courbe convexe.

Propriété : Signe de la dérivée seconde et concavité

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- Si $f''(x) \geq 0$ pour tout x de I, alors $\mathcal{C}_f$ est convexe sur I.
- Si $f''(x) \leq 0$ pour tout x de I, alors $\mathcal{C}_f$ est concave sur I.

Démonstration

Étape 1. Premier cas. La dérivée de f' est f'', positive ou nulle sur I : d'après le théorème qui relie le signe de la dérivée aux variations, f' est croissante sur I.

Étape 2. Soit a un réel de I. Pour x dans I, on pose $g(x) = f(x) - [f'(a)(x-a) + f(a)]$. D'après la dérivée d'une somme, $g'(x) = f'(x) - f'(a)$. Comme f' est croissante, $g'(x) \leq 0$ pour $x \leq a$ et $g'(x) \geq 0$ pour $x \geq a$.

Étape 3. Par le même théorème, g est décroissante sur l'intervalle $I \cap]-\infty, a]$ et croissante sur l'intervalle $I \cap [a, +\infty[$: $g(x) \geq g(a) = 0$ pour tout x de I. La courbe est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse a, et ceci pour tout a de I : elle est convexe. Le second cas se traite de même, en renversant les inégalités.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le lien entre signe de la dérivée et variations sert à deux reprises. D'abord pour f' : comme $f'' \geq 0$, f' est croissante. Puis à l'écart g entre la courbe et la tangente en a : $g'(x) = f'(x) - f'(a)$ est négative avant a et positive après. Donc g atteint en a sa plus petite valeur, $g(a) = 0$.

Vérifie : L'écart à la tangente

Pour $f(x) = x^4 + 2x$, on a $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$. La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 6x - 3$. Quel est le signe de $f(x) - (6x - 3)$?

A. Positif ou nul pour tout réel x.

Juste.

Juste : la courbe est au-dessus de sa tangente.

B. Négatif ou nul pour tout réel x.

Faux.

En $x = 0$, l'écart vaut 3, qui est positif.

C. Positif seulement pour $x > 1$.

Faux.

En $x = 0$, l'écart vaut 3 : il est aussi positif avant 1.

D. Il change de signe en 1.

Faux.

La courbe est convexe sur $\mathbb{R}$: elle reste d'un seul côté de ses tangentes.

Correction

D'après le lien entre le signe de la dérivée seconde et la concavité, la courbe est convexe sur $\mathbb{R}$: elle reste au-dessus de chacune de ses tangentes. Donc, pour tout réel x, $f(x) - (6x - 3) \geq 0$.

Le calcul le confirme. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &f(x) - (6x - 3) \\ &= x^4 - 4x + 3 \\ &= (x - 1)^2(x^2 + 2x + 3), \end{aligned}$$

et $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0$.

Remarque : Une preuve qui s'appuie sur un théorème admis

Cette preuve repose sur un résultat du chapitre « Dérivabilité » : le signe de la dérivée donne le sens de variation. Ce résultat y a été admis.

Un exemple, puis à toi

Exemple : la courbe de la figure

Soit c la fonction définie pour $x \neq 0$ par $c(x) = x + \dfrac{2}{x}$.

Dérivées. D'après les dérivées usuelles, la dérivée de l'inverse et celle d'une somme, pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} c'(x) &= 1 - \frac{2}{x^2}, \\ c''(x) &= \frac{4}{x^3}. \end{aligned}$$

Concavité. Sur $]0, +\infty[$, $x^3 > 0$, donc $c''(x) > 0$: d'après le lien entre le signe de la dérivée seconde et la concavité, la courbe est convexe sur $]0, +\infty[$. Sur $]-\infty, 0[$, $c''(x) < 0$: elle y est concave.

Contrôle. On a $c(1) = 3$ et $c'(1) = -1$: la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -x + 4$. Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} c(x) - (-x + 4) &= 2x + \frac{2}{x} - 4 \\ &= \frac{2(x - 1)^2}{x}. \end{aligned}$$

Cette différence est positive ou nulle : sur $]0, +\infty[$, la courbe est bien au-dessus de cette tangente, comme sur la figure.

À toi : Deux concavités

Étudie la concavité de la courbe de la fonction racine carrée sur $]0, +\infty[$, puis celle de la courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule les dérivées avec les dérivées usuelles, puis dérive une seconde fois.

Indice 2

Pour la racine, la dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$: dérive cet inverse avec la règle de l'inverse.

Indice 3

Point délicat : $\dfrac{6}{x^4}$ est positif des deux côtés de 0, car $x^4 > 0$ pour $x \neq 0$.

Réponse

Racine carrée. Sur $]0, +\infty[$, la racine carrée a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. D'après la dérivée de l'inverse, sa dérivée seconde est $x \mapsto -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$, strictement négative : la courbe est concave sur $]0, +\infty[$.

Inverse du carré. Pour $x \neq 0$, d'après la dérivée de l'inverse, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ a pour dérivée $x \mapsto -\dfrac{2}{x^3}$ et pour dérivée seconde $x \mapsto \dfrac{6}{x^4}$, strictement positive. D'après le lien entre le signe de la dérivée seconde et la concavité, cette courbe est convexe sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

Points d'inflexion

Un virage qui change de sens

En clair. Sur une route en S, tu tournes d'abord à droite, puis à gauche. À un instant, le volant est droit : le virage change de sens.

Sur une courbe, c'est un point où elle passe de concave à convexe, ou l'inverse. En ce point, la courbe traverse sa tangente.

Devine : La courbe du cube et sa tangente en O

La tangente à la courbe de $x \mapsto x^3$ en l'origine O est l'axe des abscisses. Où est la courbe par rapport à cette tangente ?

A. Au-dessus, des deux côtés de O.

Faux.

Pour $x < 0$, $x^3 < 0$: la courbe passe sous l'axe.

B. Au-dessous, des deux côtés de O.

Faux.

Pour $x > 0$, $x^3 > 0$.

C. Confondue avec elle près de O.

Faux.

Seul O est commun : $x^3 = 0$ seulement pour $x = 0$.

D. Dessous à gauche de O, dessus à droite.
Juste.
Juste : x^3 a le signe de x.

Correction
La dérivée de $x \mapsto x^3$ est $x \mapsto 3x^2$, nulle en 0 : la tangente en O a pour équation $y = 0$.

Or x^3 a le signe de x : la courbe est au-dessous de l'axe à gauche de O, au-dessus à droite. Elle traverse sa tangente en O.

La définition

Définition : Point d'inflexion

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I. On dit que le point $A(a, f(a))$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ si la courbe **change de concavité** en A : il existe un réel $r > 0$, avec $]a - r, a + r[$ inclus dans I, tel que $\mathcal{C}_f$ soit convexe sur $]a - r, a]$ et concave sur $[a, a + r[$, ou concave sur $]a - r, a]$ et convexe sur $[a, a + r[$.

Exemple : l'origine, point d'inflexion du cube

Pour tout réel x, d'après les dérivées usuelles, la dérivée seconde de $x \mapsto x^3$ est $x \mapsto 6x$.

- Sur $]-\infty, 0]$, $6x \leq 0$: la courbe y est concave.
- Sur $[0, +\infty[$, $6x \geq 0$: la courbe y est convexe.

Ces deux conclusions viennent du lien entre le signe de la dérivée seconde et la concavité. La courbe change de concavité en O : par définition, O est un point d'inflexion.

Remarque : Le cas d'une droite

Une droite est à la fois convexe et concave ; on n'appelle pas point d'inflexion un point d'un morceau de droite. En un point d'inflexion, la courbe **traverse** sa tangente.

Un critère par la dérivée seconde

En clair. Pour repérer un point d'inflexion sans tracer la courbe, on cherche les réels où f'' s'annule **et** change de signe. Le critère qui suit le justifie.

Propriété : Dérivée seconde qui s'annule en changeant de signe

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I, a un réel de I et r un réel strictement positif tel que $]a-r, a+r[$ soit inclus dans I. Si $f''(a)=0$, et si $f''(x)>0$ pour tout x de $]a-r, a[$ et $f''(x)<0$ pour tout x de $]a, a+r[$, ou l'inverse, alors le point $A(a, f(a))$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$.

Démonstration

Étape 1. Premier cas. Sur l'intervalle $]a-r, a]$, on a $f''(x)\geq 0$: f'' est strictement positive avant a et nulle en a. D'après le lien entre le signe de la dérivée seconde et la concavité, $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]a-r, a]$.

Étape 2. Sur l'intervalle $[a, a+r[$, on a $f''(x)\leq 0$; d'après le même lien, $\mathcal{C}_f$ est concave sur $[a, a+r[$.

Étape 3. La courbe change donc de concavité en A : par définition d'un point d'inflexion, A en est un. Le second cas se traite de même, en échangeant « convexe » et « concave ».

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve découpe le voisinage de a en deux morceaux. À gauche de a, f'' garde un signe ; à droite, le signe contraire. Le lien entre le signe de f'' et la concavité donne alors une concavité de chaque côté. Elles sont opposées : la courbe change de concavité en A.

Vérifie : Où change la concavité ?

Pour une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $f''(x)=(x+1)^2(x-3)$. En quels réels la courbe change-t-elle de concavité ?

A. En -1 et en 3.

Faux.

En -1, f'' s'annule sans changer de signe.

B. En 3 seulement.

Juste.

Juste : seul ce zéro de f'' fait changer son signe.

C. En -1 seulement.

Faux.

Le facteur $(x+1)^2$ ne change jamais de signe.

D. Nulle part.

Faux.

Le facteur $x-3$ change de signe en 3.

Correction

Le facteur $(x+1)^2$ est positif ou nul : $f''(x)$ a le signe de $x-3$, et s'annule aussi en -1.

- Sur $]-\infty, 3]$, $f''(x) \leq 0$.
- Sur $[3, +\infty[$, $f''(x) \geq 0$.

D'après le lien entre le signe de f'' et la concavité, la courbe est concave sur $]-\infty, 3]$ et convexe sur $[3, +\infty[$.

Comme dans la preuve, f'' s'annule en changeant de signe en 3 : le point d'abscisse 3 est un point d'inflexion. En -1, f'' s'annule sans changer de signe, et la concavité ne change pas.

Exemple : deux points d'inflexion

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^3$.

Dérivées. D'après les dérivées usuelles et la dérivée d'une somme, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 6x^2, \\ f''(x) &= 12x^2 - 12x \\ &= 12x(x-1). \end{aligned}$$

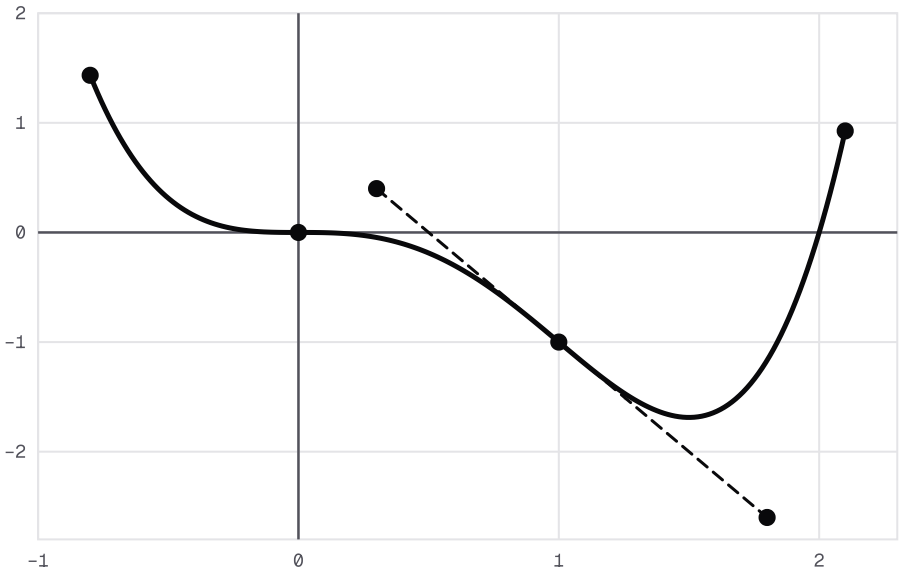
Points d'inflexion. Le tableau de signes qui suit donne le signe de $f''(x)$: f'' s'annule en 0 et en 1 en changeant de signe. D'après le critère du changement de signe de f'', énoncé plus haut, $O(0,0)$ et $A(1,-1)$ sont des points d'inflexion.

Tangentes. En O, $f'(0) = 0$: la tangente est horizontale. En A, $f'(1) = -2$: la tangente a pour équation $y = -2(x-1) - 1$, soit $y = -2x + 1$.

Le tableau, la courbe, un piège, la méthode

Signe de f''(x) = 12x(x − 1)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	+	



La courbe de f(x) = x⁴ − 2x³, ses deux points d'inflexion O et A, et la tangente en A.

Attention : une dérivée seconde nulle ne suffit pas

✗ « Pour $f(x) = x^4 + x$, $f''(0) = 0$, donc le point $(0,0)$ est un point d'inflexion. »

✓ Ici, pour tout réel x, $f''(x) = 12x^2$: f'' s'annule en 0 seulement et ne change pas de signe. La courbe est convexe sur $\mathbb{R}$.

La tangente en $(0,0)$ a pour équation $y = x$ et, pour tout $x \neq 0$, $f(x) - x = x^4 > 0$. La courbe reste strictement au-dessus de cette tangente des deux côtés de 0. Elle n'est donc concave sur aucun intervalle $]-r, 0]$ ni $[0, r[$, et le point $(0,0)$ n'est pas un point d'inflexion.

Vérifie toujours le **changement de signe** de f''.

Méthode : concavité et points d'inflexion

1. **Calcule** $f''(x)$ en précisant l'intervalle et les règles de dérivation.
2. **Étudie** le signe de $f''(x)$, avec un tableau de signes si besoin.
3. **Conclus** sur chaque intervalle : f'' positive, courbe convexe ; f'' négative, courbe concave.
4. **Repère** les réels où f'' s'annule en changeant de signe : chacun donne un point d'inflexion, dont tu calcules l'ordonnée et, au besoin, la tangente.

À toi, puis le coin devoir

> **À toi : Deux points d'inflexion et une tangente**

Soit $s(x) = x^4 - 6x^2 + 1$, sur $\mathbb{R}$. Étudie la concavité de sa courbe, trouve ses points d'inflexion, puis la tangente en celui d'abscisse positive. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule $s'(x)$, puis $s''(x)$, avec les dérivées usuelles.
Indice 2
Factorise $s''(x) = 12x^2 - 12$ et dresse son tableau de signes.
Indice 3
Point délicat : l'ordonnée du point d'abscisse 1 est $s(1) = -4$; ne la confonds pas avec $s'(1)$.

Réponse
Dérivées. D'après les dérivées usuelles et la dérivée d'une somme, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} s'(x) &= 4x^3 - 12x, \\ s''(x) &= 12x^2 - 12 \\ &= 12(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

Concavité.

- $s''(x) > 0$ sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$: la courbe y est convexe.
- $s''(x) < 0$ sur $]-1, 1[$: elle y est concave.

Points d'inflexion. En -1 et en 1, s'' s'annule et change de signe ; de plus, $s(-1) = s(1) = -4$. D'après le critère du changement de signe de s'', les points $(-1, -4)$ et $(1, -4)$ sont des points d'inflexion.

Tangente. On a $s'(1) = 4 - 12 = -8$: la tangente en $(1, -4)$ a pour équation $y = -8(x-1) - 4$, soit $y = -8x + 4$.

Remarque **: Coin devoir : rédiger un point d'inflexion**

En devoir, cite les deux faits : f'' s'annule, et elle change de signe. Écris : « $f''(x) = 12x(x-1)$ s'annule en 1. Elle est strictement négative sur $]0, 1[$ et strictement positive sur $]1, +\infty[$. Donc f'' s'annule en changeant de signe en 1, et $A(1, -1)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$. »

Éléments de symétrie et réduction du domaine d'étude

Un miroir sur la courbe

En clair. Plie la feuille le long d'une droite verticale : si les deux moitiés de la courbe se superposent, cette droite est un axe de symétrie.

Fais tourner la feuille d'un demi-tour autour d'un point : si la courbe retombe sur elle-même, ce point est un centre de symétrie.

Dans les deux cas, tracer une moitié suffit.

Devine : Une moitié suffit

La droite d'équation $x = 3$ est un axe de symétrie de la courbe d'une fonction f. On sait que $f(5) = \dfrac{1}{5}$. Quelle autre valeur connaît-on aussitôt ?

A. $f(-5) = \dfrac{1}{5}$

Faux.

-5 est le symétrique de 5 par rapport à 0, pas par rapport à 3.

B. $f(1) = \dfrac{1}{5}$

Juste.

Juste : 1 et 5 sont symétriques par rapport à 3.

C. $f(3) = \dfrac{1}{5}$

Faux.

3 est sur l'axe : il est son propre symétrique.

D. $f(1) = -\dfrac{1}{5}$

Faux.

Un axe vertical conserve les ordonnées.

Correction

Le symétrique de 5 par rapport à 3 est $2 \times 3 - 5 = 1$. L'axe conserve les ordonnées : $f(1) = f(5) = \dfrac{1}{5}$.

Axe et centre

Propriété : Symétrie et réduction du domaine d'étude

Le plan est muni d'un repère orthogonal. Soit f une fonction, et a et b deux réels tels que $2a - x$ appartienne à D_f pour tout x de D_f.

- Si $f(2a - x) = f(x)$ pour tout x de D_f, la droite d'équation $x = a$ est un **axe de symétrie** de $\mathcal{C}_f$: on étudie f sur $D_f \cap [a, +\infty[$, puis on complète par la symétrie d'axe cette droite. Les variations sont **inversées** de part et d'autre de a.
- Si $f(2a - x) + f(x) = 2b$ pour tout x de D_f, le point $\Omega(a, b)$ est un **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f$: on étudie f sur $D_f \cap [a, +\infty[$, puis on complète par la symétrie de centre Ω. Les variations sont **conservées**.
- Pour $a = 0$, on retrouve les fonctions paires (axe des ordonnées) ; pour $a = 0$ et $b = 0$, les fonctions impaires (origine).

Démonstration

Idée de la preuve. Le symétrique de $M(x, f(x))$ par rapport à la droite d'équation $x = a$ est $M'(2a - x, f(x))$; l'égalité $f(2a - x) = f(x)$ dit que M' est sur $\mathcal{C}_f$, vu au chapitre « Généralités sur les fonctions numériques ». Par rapport à Ω, le symétrique de M est $M'(2a - x, 2b - f(x))$, et $f(2a - x) = 2b - f(x)$. Pour les variations dans le cas de l'axe, supposons f croissante sur $D_f \cap [a, +\infty[$ et prenons $u < v \leq a$ dans D_f : alors $a \leq 2a - v < 2a - u$, donc $f(2a - v) \leq f(2a - u)$, c'est-à-dire $f(v) \leq f(u)$; f est décroissante à gauche de a. Enfin, si x est un réel de D_f inférieur à a, le réel $2a - x$ appartient à $D_f \cap]a, +\infty[$: chaque point de la courbe à gauche de a est le symétrique d'un point étudié. Le cas du centre et celui d'une fonction décroissante ne sont pas détaillés.

Exemple : un axe de symétrie

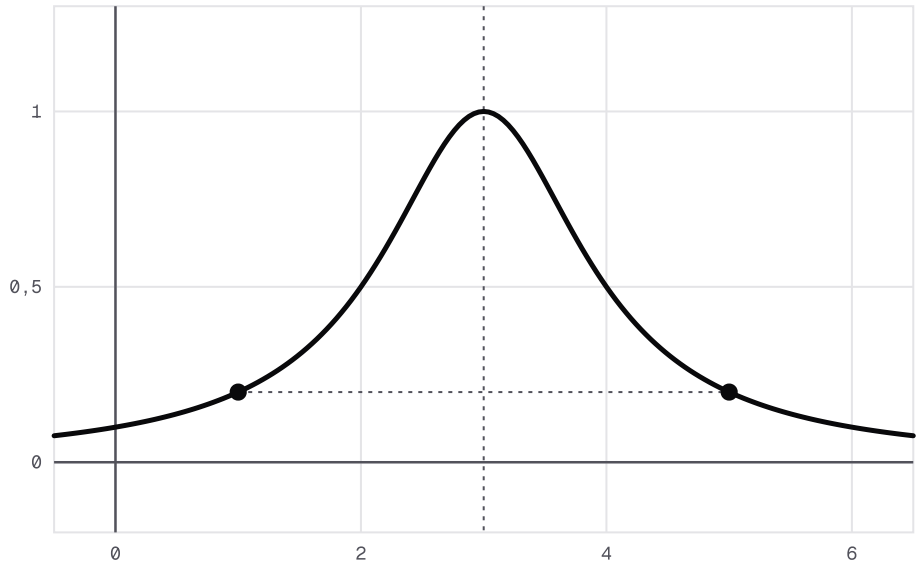
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 10}$. Pour tout réel x, $x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1 > 0$: donc $D_f = \mathbb{R}$, et $6 - x$ appartient à D_f pour tout réel x.

Pour tout réel x, en développant :

$$\begin{aligned} &(6 - x)^2 - 6(6 - x) + 10 \\ &= 36 - 12x + x^2 - 36 + 6x + 10 \\ &= x^2 - 6x + 10. \end{aligned}$$

Donc $f(6 - x) = f(x)$. D'après la propriété de symétrie et de réduction du domaine, avec $a = 3$, la droite d'équation $x = 3$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

On étudie f sur $[3, +\infty[$; les variations sont inversées à gauche de 3.



Courbe de f : x ↦ 1/(x² − 6x + 10), symétrique par rapport à la droite d'équation x = 3. Les points d'abscisses 1 et 5, symétriques par rapport à 3, sont à la même hauteur 1/5.

Exemple : un centre de symétrie

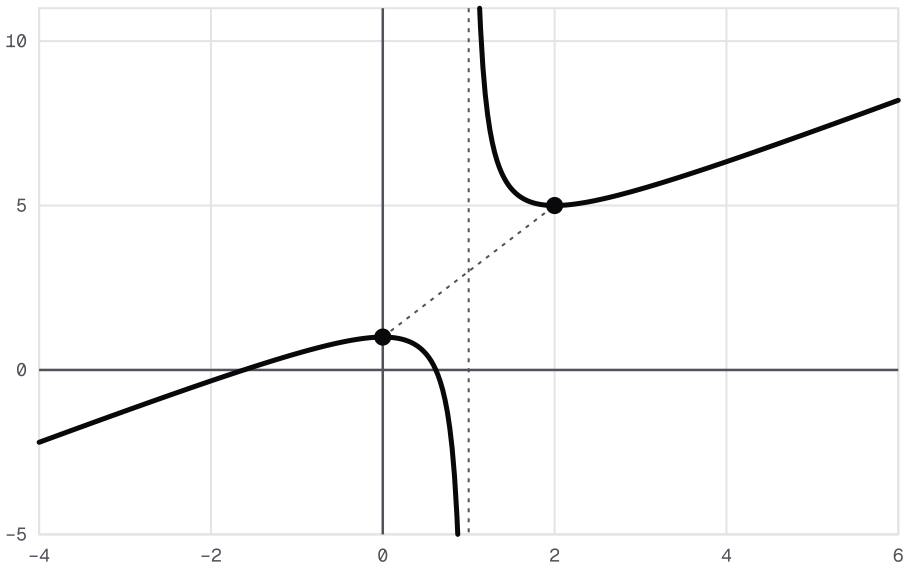
Reprenons h, définie sur $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Si $x \neq 1$, alors $2 - x \neq 1$: $2 - x$ appartient à D_h.

Pour $x \neq 1$:

$$\begin{aligned} h(2-x) &= 4 - x + \frac{1}{1-x} \\ &= 4 - x - \frac{1}{x-1}. \end{aligned}$$

En ajoutant $h(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x-1}$, on obtient $h(2-x) + h(x) = 6 = 2 \times 3$.

D'après la même propriété, $\Omega(1, 3)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_h$. On étudie h sur $D_h \cap [1, +\infty[$, c'est-à-dire sur $]1, +\infty[$, car 1 n'appartient pas à D_h ; les variations sont conservées.



Courbe de h, de centre de symétrie Ω(1, 3) : les points (0, 1) et (2, 5), d'abscisses 0 et 2 symétriques par rapport à 1, ont pour milieu Ω. Étudier h sur]1, +∞[suffit.

Une période

En clair. Le graphe d'une fonction périodique est un motif qui se répète. Si $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour tout réel x et $f(\pi) = 3$, alors $f(3\pi) = 3$, puis $f(5\pi) = 3$. On n'étudie donc qu'une période, puis on recopie le motif.

Propriété : Fonction périodique et réduction du domaine d'étude

Soit f une fonction périodique de période $T > 0$ et α un réel.

- On étudie f sur $D_f \cap [\alpha, \alpha + T]$; la courbe $\mathcal{C}_f$ s'obtient à partir de la partie tracée sur cet intervalle par les translations de vecteurs $kT\vec{i}$, où k est un entier relatif.
- Si de plus f est paire ou impaire, on étudie f sur $D_f \cap \left[0, \frac{T}{2}\right]$, on complète par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées ou à l'origine pour obtenir la courbe sur $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, puis par les translations.

Démonstration

Idée de la preuve. Si $M(x, f(x))$ est sur $\mathcal{C}_f$ et si k est un entier relatif, alors $x + kT$ appartient à D_f et $f(x + kT) = f(x)$, par la définition d'une fonction périodique appliquée $|k|$ fois : le point de coordonnées $(x + kT, f(x))$, image de M par la translation de vecteur $kT\vec{i}$, est aussi sur $\mathcal{C}_f$. Tout réel de D_f s'écrit $x + kT$ avec x dans $[\alpha, \alpha + T[$, en lui retranchant un multiple entier convenable de T

(l'existence de cet entier est admise) ; ce réel x appartient à D_f, d'après la définition d'une fonction périodique : la partie tracée suffit. Le cas d'une fonction paire ou impaire combine ce résultat et la symétrie ; ces vérifications ne sont pas détaillées.

Exemple : une fonction paire et périodique

Soit c la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $c(x) = \cos(2x) - 2\cos x$.

Parité. Le cosinus est pair. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} c(-x) &= \cos(-2x) - 2\cos(-x) \\ &= c(x). \end{aligned}$$

La fonction c est donc paire.

Période. Le cosinus est de période 2π : pour tout réel x, $\cos(2x + 4\pi) = \cos(2x)$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Donc $c(x + 2\pi) = c(x)$.

Réduction. D'après la propriété des fonctions périodiques, avec $T = 2\pi$, on étudie c sur $[0, \pi]$. On complète par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, puis par les translations de vecteurs $2k\pi\,\vec{i}$, où k est un entier relatif.

Attention : la symétrie d'abord, les translations ensuite

✗ « Une fonction paire de période 2π est étudiée sur $[0, \pi]$. On translate cette partie de π pour obtenir la courbe sur $[\pi, 2\pi]$. »

✓ π n'est pas une période : cette translation est fausse. Avec le cosinus, elle donnerait une courbe décroissante sur $[\pi, 2\pi]$, alors que le cosinus y croît.

On complète d'abord par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, sur $[-\pi, \pi]$. On translate ensuite le tout de $2k\pi$, pour tout entier relatif k.

La méthode, puis à toi

Méthode : réduire le domaine d'étude

1. **Vérifie** la condition sur D_f : pour tout x de D_f, $-x$, ou $2a - x$, ou $x + T$ et $x - T$ appartiennent à D_f.
2. **Calcule** $f(-x)$, $f(2a - x)$ ou $f(x + T)$, puis compare avec $f(x)$.
3. **Choisis** l'intervalle : $D_f \cap [0, +\infty[$, $D_f \cap [a, +\infty[$, une période, ou $D_f \cap \left[0, \dfrac{T}{2}\right]$ si f est de plus paire ou impaire.

4. **Complète** la courbe à la fin : la symétrie d'abord, les translations ensuite.

Vérifie : Une valeur par le centre

La courbe d'une fonction f admet pour centre de symétrie le point $\Omega(2,1)$, et $f(5)=4$. Que vaut $f(-1)$?

A. -2

Juste.
Juste : $f(-1)=2\times 1-f(5)=-2$.

B. 4

Faux.
L'égalité $f(-1)=f(5)$ traduirait un axe de symétrie, pas un centre.

C. -4

Faux.
Ce serait vrai pour un centre d'ordonnée 0 ; ici $b=1$.

D. 2

Faux.
Reprends $f(2a-x)+f(x)=2b$ avec $a=2$, $b=1$ et $x=5$.

Correction
Le symétrique de 5 par rapport à 2 est $2\times 2-5=-1$. La relation $f(2a-x)+f(x)=2b$ donne $f(-1)+f(5)=2$, donc $f(-1)=2-4=-2$.

À toi : Un centre à vérifier

Soit $j(x)=\dfrac{4x-3}{x-1}$, pour $x\neq 1$. Montre que le point $\Omega(1,4)$ est un centre de symétrie de sa courbe, puis donne l'intervalle d'étude. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Vérifie d'abord que $2-x$ appartient à D_j dès que x y appartient.
Indice 2
Calcule $j(2-x)$, puis écris-le avec le dénominateur $x-1$.
Indice 3
Point délicat : $\dfrac{5-4x}{1-x}=\dfrac{4x-5}{x-1}$; change les deux signes à la fois.

Réponse
Domaine. Si $x\neq 1$, alors $2-x\neq 1$: $2-x$ appartient à D_j.

Calcul. Pour $x\neq 1$:

$$\begin{aligned} j(2-x) &= \frac{8-4x-3}{1-x} \\ &= \frac{4x-5}{x-1}. \end{aligned}$$

En ajoutant $j(x)$:

$$\begin{aligned} & j(2-x)+j(x) \\ &= \frac{8x-8}{x-1} \\ &= 8 = 2\times 4. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après la propriété de symétrie et de réduction du domaine, $\Omega(1,4)$ est un centre de symétrie de la courbe de j. On étudie j sur $D_j \cap [1,+\infty[=]1,+\infty[$.

Remarque : Coin devoir : rédiger une symétrie

En devoir, la condition sur le domaine vient avant le calcul. Écris : « Pour tout réel x, $6-x$ est réel, et $f(6-x)=f(x)$. Donc la droite d'équation $x=3$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. » Oublier la condition sur le domaine rend la réponse incomplète.

Courbe d'une fonction polynôme de degré 3

Une courbe en S

En clair. La courbe d'un polynôme de degré 3 peut ressembler à un S couché : une bosse, puis un creux. Entre les deux, la courbe change de sens de virage.

Ce point semble aussi être le milieu de la courbe : un demi-tour autour de lui la laisse en place.

Devine : Le milieu d'un S

Soit $f(x)=x^3+3x^2-2$. Elle admet un maximum local 2 en -2 et un minimum local -2 en 0. Quel point semble être le centre de sa courbe ?

A. $(0,0)$
Faux.
L'origine n'est pas sur la courbe : $f(0)=-2$.

B. $(-2,2)$
Faux.
C'est le haut de la bosse, pas le milieu.

C. $(-1,0)$
Juste.
Juste : c'est le milieu de $(-2,2)$ et de $(0,-2)$.

D. $(-1,2)$
Faux.

Ce point n'est pas sur la courbe : $f(-1) = 0$.

Correction
Le milieu des points $(-2, 2)$ et $(0, -2)$ est $(-1, 0)$. Et $f(-1) = -1 + 3 - 2 = 0$: ce point est sur la courbe. La propriété qui suit confirme qu'il en est le centre.

La propriété

Propriété : Courbe d'une fonction polynôme de degré 3

Soit a, b, c et d des réels, avec $a \neq 0$, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. On pose $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet un **unique** point d'inflexion, $\Omega(x_0, f(x_0))$, et ce point est un **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f$.

Démonstration
Idée de la preuve. On a $f''(x) = 6ax + 2b$: c'est une fonction affine, nulle seulement en x_0, et elle change de signe en x_0. D'après la propriété de la dérivée seconde qui s'annule en changeant de signe, Ω est un point d'inflexion. Ailleurs, f'' ne s'annule pas : en un réel $t \neq x_0$, f'' garde un signe strict au voisinage de t et la courbe reste strictement d'un même côté de sa tangente au point d'abscisse t, donc ce point n'est pas d'inflexion ; cette vérification n'est pas détaillée. Pour le centre, on vérifie en développant que $f(2x_0 - x) + f(x) = 2f(x_0)$ pour tout réel x, puis on applique la caractérisation d'un centre de symétrie ; ce calcul n'est pas détaillé ici.

Exemple : le centre du S

Pour $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$, on a $a = 1$ et $b = 3$, donc $x_0 = -\dfrac{3}{3} = -1$, et $f(-1) = 0$.

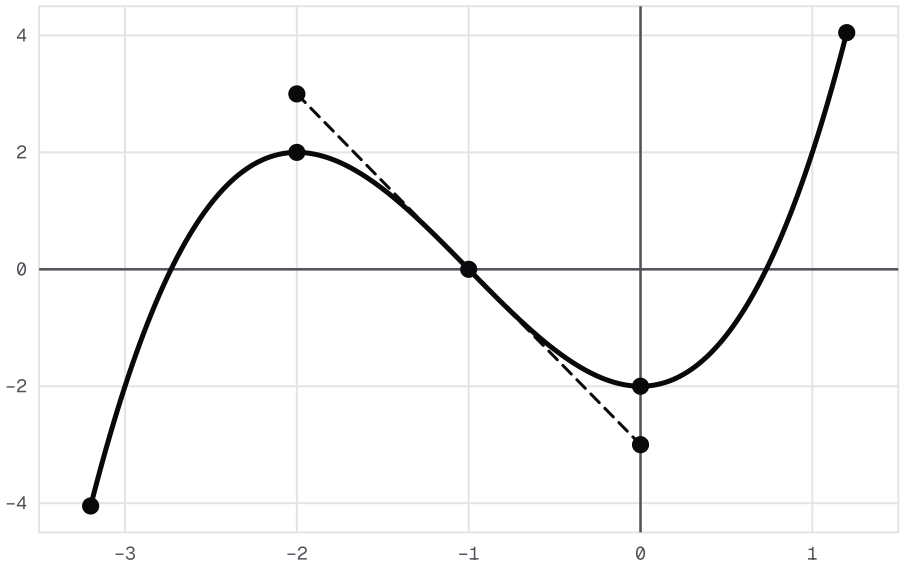
D'après les dérivées usuelles et la dérivée d'une somme, pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 + 6x,$$
$$f''(x) = 6x + 6.$$

La dérivée seconde s'annule en -1 en changeant de signe. D'après la propriété de la courbe d'un polynôme de degré 3, $\Omega(-1, 0)$ est son unique point d'inflexion et un centre de symétrie.

Contrôle. Pour tout réel x, $f(-2 - x) = -x^3 - 3x^2 + 2$, donc $f(-2 - x) + f(x) = 0$.

La courbe, puis à toi



$y = f(x)$ $y = -3x - 3$ Point plein $\Omega(-1, 0)$ Point plein $(-2, 2)$ Point plein $(0, -2)$ Point du graphe

La courbe de f(x) = x³ + 3x² − 2, son centre Ω(−1, 0) et la tangente en Ω.

À toi : Un autre S

Soit $u(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$, sur $\mathbb{R}$. Détermine le point d'inflexion de sa courbe, vérifie que c'est un centre de symétrie, puis écris la tangente en ce point. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$ avec $a = -1$ et $b = 3$.

Indice 2

Pour le centre, calcule $u(2 - x) + u(x)$ en développant.

Indice 3

Point délicat : $a = -1$ est négatif, donc $x_0 = -\dfrac{3}{-3} = 1$.

Réponse

Point d'inflexion. Ici $a = -1$ et $b = 3$, donc $x_0 = 1$ et $u(1) = -1 + 3 + 1 = 3$. D'après les dérivées usuelles et la dérivée d'une somme, pour tout réel x :

$$u'(x) = -3x^2 + 6x,$$
$$u''(x) = -6x + 6.$$

La dérivée seconde s'annule en 1 en changeant de signe : $\Omega(1, 3)$ est le point d'inflexion.

Centre. En développant, pour tout réel x, $u(2 - x) = x^3 - 3x^2 + 5$. Donc $u(2 - x) + u(x) = 6 = 2 \times 3$: Ω est un centre de symétrie.

Tangente. On a $u'(1) = 3$: la tangente en Ω a pour équation $y = 3(x - 1) + 3$, soit $y = 3x$.

Plan d'étude : une fonction rationnelle

Le plan d'étude

Devine : Par où commencer ?

Tu dois étudier $g(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x-2}$ et tracer sa courbe. Quelle question poses-tu en premier ?

A. Pour quels réels $g(x)$ existe-t-il ?

Juste.

Juste : tout le reste se fait sur l'ensemble de définition.

B. Quelle est la dérivée de g ?

Faux.

La dérivée n'a de sens que là où g est définie : il faut le savoir d'abord.

C. Quelle allure a la courbe à l'écran ?

Faux.

Utile pour contrôler, mais une étude commence par le calcul.

D. Où sont les points d'inflexion ?

Faux.

C'est un complément, qui vient après les variations.

Correction

Le quotient $\dfrac{4}{x-2}$ n'existe que pour $x \neq 2$. Donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$: limites, dérivée et tracé se font sur cet ensemble.

La méthode qui suit donne l'ordre complet.

Méthode : le plan d'étude d'une fonction

1. **Détermine** D_f, puis réduis le domaine d'étude grâce à une parité, une période ou une symétrie.
2. **Calcule** les limites aux bornes de l'intervalle d'étude, et interprète les branches infinies.
3. **Dérive**, étudie le signe de $f'(x)$ et dresse le tableau de variations.
4. **Complète** selon les questions : concavité, points d'inflexion, position par rapport à une asymptote, tangentes utiles.
5. **Trace** la courbe.

Domaine, limites, asymptotes

Exemple : Exemple guidé : domaine et limites

Soit g la fonction définie sur $D_g =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$ par $g(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x-2}$. Réduite au même dénominateur :

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}.$$

- **En** $+\infty$, $x - 1$ tend vers $+\infty$ et $\dfrac{4}{x-2}$ vers 0. D'après la limite d'une somme, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. De même, $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.
- **En** 2, $x - 1$ tend vers 1. D'après la limite d'un quotient, $\dfrac{4}{x-2}$ tend vers $+\infty$ à droite et vers $-\infty$ à gauche. Donc $\lim_{x \to 2^+} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 2^-} g(x) = -\infty$.

Exemple : Exemple guidé : asymptotes et position

Asymptote verticale. D'après les limites en 2, la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale.

Asymptote oblique. Pour $x \neq 2$, $g(x) - (x - 1) = \dfrac{4}{x-2}$, qui tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$, d'après la limite de l'inverse. La droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est donc asymptote oblique des deux côtés.

Position. Le signe de $\dfrac{4}{x-2}$ donne la position : $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de (Δ) sur $]2, +\infty[$, au-dessous sur $]-\infty, 2[$.

Dérivée et variations

Exemple : Exemple guidé : dérivée et variations

Sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$, d'après la dérivée de l'inverse et la dérivée d'une somme :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{4}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(x-2)^2 - 4}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Le dénominateur est strictement positif : $g'(x)$ a le signe de $x(x-4)$.

- $g'(x) > 0$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]4, +\infty[$: g y est strictement croissante.
- $g'(x) < 0$ sur $]0, 2[$ et sur $]2, 4[$: g y est strictement décroissante.

Ainsi $g(0) = -3$ est un maximum local, et $g(4) = 5$ un minimum local.

Variations de g sur]−∞, 2[

x	$-\infty$		0		2
$g'(x)$		+	0	−	‖
$g(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$‖

Variations de g sur]2, +∞[

x	2		4		$+\infty$
$g'(x)$	‖	−	0	+	
$g(x)$	$+\infty$‖	↘	5	↗	$+\infty$

Concavité, centre et courbe

Exemple : Exemple guidé : concavité et centre

Concavité. Sur chacun des deux intervalles, d'après la dérivée de l'inverse :

$$g''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}.$$

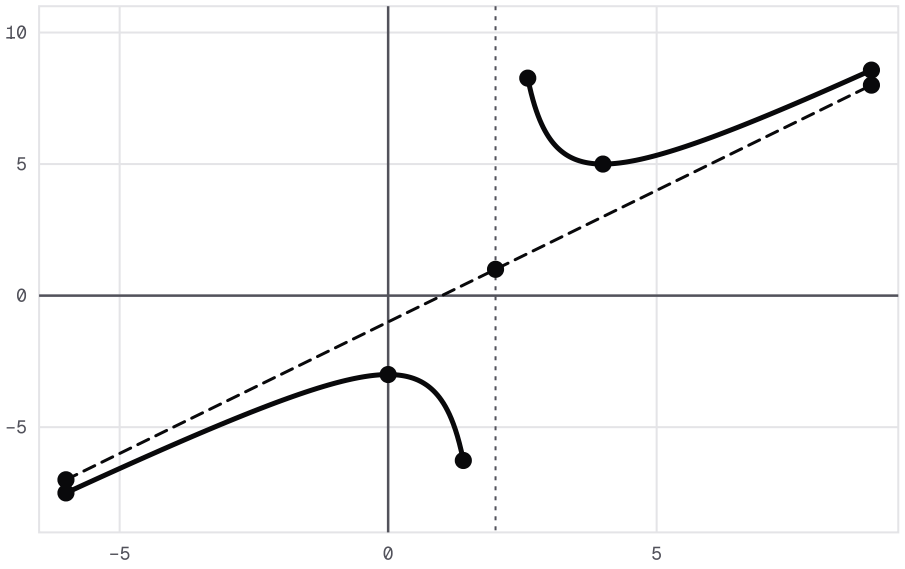
- Sur $]2, +\infty[$, $g''(x) > 0$: $\mathcal{C}_g$ est convexe.
- Sur $]-\infty, 2[$, $g''(x) < 0$: $\mathcal{C}_g$ est concave.

Sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$, g'' garde un signe strict : la courbe n'y change pas de concavité et n'a aucun point d'inflexion. Le changement de concavité a lieu de part et d'autre de l'asymptote d'équation $x = 2$; le réel 2 n'appartient pas à D_g.

Symétrie. Si $x \neq 2$, alors $4 - x \neq 2$, et :

$$g(4-x) = 3 - x - \frac{4}{x-2}.$$

Donc $g(4-x) + g(x) = 2 = 2 \times 1$: d'après la propriété de symétrie et de réduction du domaine, le point $\Omega(2, 1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$.



$y = g(x)$ $y = x - 1$ Point plein $(0, -3)$ Point plein $(4, 5)$ Point plein $\Omega(2, 1)$ $x = 2$ Point du graphe

La courbe de g, son asymptote verticale x = 2, son asymptote oblique y = x − 1 et son centre Ω(2, 1).

Vérifie : La courbe et l'axe des abscisses

Combien de points communs la courbe de g a-t-elle avec l'axe des abscisses ?

A. Un seul.

Faux.

Sur $]-\infty, 2[$, le maximum de g vaut -3 : $g(x) < 0$ partout.

B. Deux.

Faux.

Sur $]2, +\infty[$, le minimum vaut 5 : $g(x) > 0$ partout.

C. Aucun.

Juste.

Juste : $g(x)$ n'est jamais nul.

D. Trois.

Faux.

Une équation du second degré a au plus deux solutions.

Correction

D'après les tableaux, le maximum de g sur $]-\infty, 2[$ vaut -3, donc $g(x) < 0$ sur cet intervalle. Sur $]2, +\infty[$, le minimum vaut 5, donc $g(x) > 0$.

La courbe ne rencontre pas l'axe des abscisses. Le calcul le confirme : le discriminant de $x^2 - 3x + 6$ vaut $9 - 24 = -15$, qui est strictement négatif.

Tracer, puis à toi

Méthode : tracer une courbe

1. **Choisis** le repère et les unités d'après le tableau de variations.
2. **Trace** d'abord les asymptotes, puis les tangentes utiles : horizontales aux extremums, tangentes aux points d'inflexion.
3. **Place** les points connus : extremums, points d'inflexion, points sur les axes, quelques points calculés.
4. **Dessine** la courbe en respectant variations, concavité et position par rapport aux asymptotes ; complète par symétrie si tu as réduit le domaine.

À toi : Une étude courte

Soit $\ell(x) = x + 1 - \dfrac{1}{x+2}$, pour $x \neq -2$. Détermine les asymptotes de sa courbe, sa position par rapport à l'asymptote oblique, et le sens de variation de ℓ. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule les limites en -2, à droite et à gauche, puis la différence $\ell(x) - (x+1)$.

Indice 2

Dérive ℓ sur chacun des intervalles $]-\infty, -2[$ et $]-2, +\infty[$: la dérivée de $x \mapsto -\dfrac{1}{x+2}$ est positive.

Indice 3

Point délicat : $-\dfrac{1}{x+2}$ est négatif pour $x > -2$: la courbe y est au-dessous de l'asymptote oblique.

Réponse

Asymptote verticale. Quand x tend vers -2, $x+1$ tend vers -1. D'après la limite d'un quotient, $-\dfrac{1}{x+2}$ tend vers $-\infty$ à droite de -2 et vers $+\infty$ à gauche. D'après la limite d'une somme :

$$\lim_{x \to -2^+} \ell(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to -2^-} \ell(x) = +\infty.$$

La droite d'équation $x = -2$ est donc asymptote verticale.

Asymptote oblique. Pour $x \neq -2$, $\ell(x) - (x+1) = -\dfrac{1}{x+2}$, qui tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$, d'après la limite de l'inverse. La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique.

Position. Cette différence est strictement négative sur $]-2, +\infty[$ et strictement positive sur $]-\infty, -2[$. La courbe est donc au-dessous de cette droite sur $]-2, +\infty[$ et au-dessus sur $]-\infty, -2[$.

Variations. Sur chacun des intervalles $]-\infty, -2[$ et $]-2, +\infty[$, d'après la dérivée de l'inverse :

$$\ell'(x) = 1 + \frac{1}{(x+2)^2}.$$

Donc $\ell'(x) > 0$: ℓ est strictement croissante sur $]-\infty, -2[$ et sur $]-2, +\infty[$.

Remarque : Coin devoir : présenter une étude

En devoir, chaque question reprend un point du plan. Annonce le résultat, puis justifie-le. Par exemple : « $g'(4) = 0$ et $g'(x) > 0$ sur $]4, +\infty[$, donc g est strictement croissante sur $[4, +\infty[$. »

Dresse le tableau complet avant le tracé : il guide la courbe. Tu peux dresser un seul tableau avec une double barre à la valeur interdite, ou un tableau par intervalle ; indique les limites de chaque côté.

Une fonction trigonométrique, une fonction irrationnelle

Réduire avant d'étudier

Devine : Un intervalle d'étude

La fonction $c : x \mapsto \cos(2x) - 2\cos x$ est paire et de période 2π. Sur quel intervalle suffit-il de l'étudier ?

A. $[0, 2\pi]$

Faux.

C'est une période entière ; la parité permet d'en garder la moitié.

B. $[-\pi, \pi]$

Faux.

La parité permet de garder seulement $[0, \pi]$, puis de compléter par symétrie.

C. $[0, \pi]$

Juste.

Juste : c'est $\left[0, \frac{T}{2}\right]$, avec $T = 2\pi$.

D. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Faux.

Ce serait la moitié d'une période égale à π ; ici la période vaut 2π.

Correction

D'après la propriété des fonctions périodiques, une fonction paire de période T s'étudie sur $D_f \cap \left[0, \frac{T}{2}\right]$. Ici $D_c = \mathbb{R}$ et $T = 2\pi$: on étudie c sur $[0, \pi]$.

Exemple : Exemple guidé : variations sur [0, π]

D'après la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$ et la dérivée d'une somme, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} c'(x) &= -2\sin(2x) + 2\sin x \\ &= -4\sin x\cos x + 2\sin x \\ &= 2\sin x\,(1 - 2\cos x). \end{aligned}$$

La deuxième ligne utilise $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

Signe. Sur $]0,\pi[$, $\sin x > 0$: $c'(x)$ a le signe de $1 - 2\cos x$. Ce facteur est strictement négatif sur $\left]0, \dfrac{\pi}{3}\right[$ et strictement positif sur $\left]\dfrac{\pi}{3}, \pi\right[$.

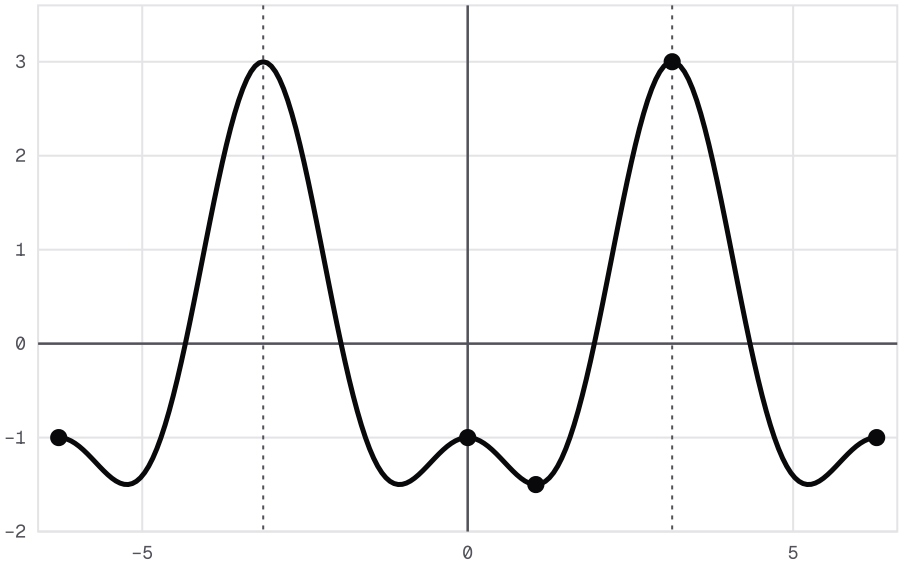
Variations. Donc c est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$.

Valeurs. On calcule $c(0) = -1$, $c\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{3}{2}$ et $c(\pi) = 3$.

Le tableau et la courbe

Variations de c sur [0, π]

x	0		$\dfrac{\pi}{3}$		π
$c'(x)$	0	−	0	+	0
$c(x)$	-1	↘	$-\dfrac{3}{2}$	↗	3



$y = c(x)$ ● Point plein $(0,-1)$ ● Point plein $\left(\dfrac{\pi}{3}, -\dfrac{3}{2}\right)$ ● Point plein $(\pi, 3)$ ····· $x = -\pi$ ····· $x = \pi$ ● Point du graphe

La courbe de c sur [−2π, 2π] : la partie étudiée sur [0, π], son reflet par rapport à l'axe des ordonnées, puis les translations de 2π.

Une fonction irrationnelle

Rappel. Au chapitre « Dérivabilité », f est dérivable à gauche en a quand le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite réelle lorsque x tend vers a à gauche ; de même à droite.

Si ce taux tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, f n'est pas dérivable de ce côté. La courbe admet alors au point $(a, f(a))$ une demi-tangente verticale.

Exemple : demi-tangentes aux bornes

Soit r la fonction définie sur $[-2,2]$ par $r(x)=x+\sqrt{4-x^2}$; sur cet intervalle, $4-x^2\geq 0$. On a $r(2)=2$.

En 2. Pour $-2<x<2$, on a $x-2=-\left(\sqrt{2-x}\right)^2$, donc :

$$\begin{aligned}\frac{r(x)-r(2)}{x-2}&=1+\frac{\sqrt{(2-x)(2+x)}}{x-2}\\&=1-\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}.\end{aligned}$$

Quand x tend vers 2 à gauche, $\sqrt{2-x}$ tend vers 0 en restant positif. D'après la limite d'un quotient, ce taux tend vers $-\infty$: r n'est pas dérivable à gauche en 2. La courbe admet au point $(2,2)$ une demi-tangente verticale.

En -2. Le même calcul donne une demi-tangente verticale au point $(-2,-2)$.

Exemple : variations et maximum

D'après la dérivée d'une racine carrée et la dérivée d'une somme, pour tout x de $]-2,2[$:

$$\begin{aligned}r'(x)&=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\\&=\frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}.\end{aligned}$$

Signe du numérateur. Pour $-2<x\leq 0$, le numérateur est strictement positif. Pour $0<x<2$, les deux membres de l'inégalité $\sqrt{4-x^2}>x$ sont positifs : elle équivaut à $4-x^2>x^2$, soit $x<\sqrt{2}$.

Variations. Donc $r'(x)>0$ sur $\left]-2,\sqrt{2}\right[$ et $r'(x)<0$ sur $\left]\sqrt{2},2\right[$. Ainsi r est strictement croissante sur $\left]-2,\sqrt{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\sqrt{2},2\right[$.

Maximum. Sur $]-2,2[$, la plus grande valeur de r est donc $r(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$. Aux bornes, $r(2)=2$, et la valeur de r en -2 vaut -2, car la racine carrée s'y annule. Ces deux valeurs sont inférieures à $2\sqrt{2}$: le maximum de r sur $[-2,2]$ est $r(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$.

Vérifie : Le minimum de r

Quelle est la plus petite valeur de r sur $[-2, 2]$, et où est-elle atteinte ?

A. 2, atteinte en 0.

Faux.

$r(0) = 2$, mais $r(-1) = -1 + \sqrt{3}$ est plus petit.

B. 2, atteinte en 2.

Faux.

$r(2) = 2$, mais $r(-2)$ est plus petit.

C. -2, atteinte en -2.

Juste.

Juste : $r(-2) = -2 + 0 = -2$.

D. $2\sqrt{2}$, atteinte en $\sqrt{2}$.

Faux.

C'est la plus grande valeur, pas la plus petite.

Correction

D'après la positivité de la racine carrée, $\sqrt{4 - x^2} \geq 0$ pour tout x de $[-2, 2]$. Donc $r(x) \geq x \geq -2$, et l'égalité $r(x) = -2$ impose $x = -2$.

La plus petite valeur de r sur $[-2, 2]$ est donc $r(-2) = -2$, atteinte en -2 seulement.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Une fonction impaire

Soit $t(x) = \sin(2x) + 2\sin x$, sur $\mathbb{R}$. Montre que t est impaire et de période 2π, puis étudie ses variations sur $[0, \pi]$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule $t(-x)$ et $t(x + 2\pi)$ avec la parité et la période du sinus.

Indice 2

Dérive, puis utilise $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ pour factoriser $t'(x)$.

Indice 3

Point délicat : $t'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$ et $\cos x + 1 \geq 0$; seul $2\cos x - 1$ change de signe sur $[0, \pi]$.

Réponse

Parité et période. Pour tout réel x, $t(-x) = -\sin(2x) - 2\sin x = -t(x)$: t est impaire. Le sinus est de période 2π, donc $t(x + 2\pi) = t(x)$.

Dérivée. D'après la dérivée de $x \mapsto f(ax + b)$ et la dérivée d'une somme, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & t'(x) \\ & = 2\cos(2x) + 2\cos x \\ & = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2 \\ & = 2(2\cos x - 1) \\ & \quad \times (\cos x + 1). \end{aligned}$$

La deuxième égalité utilise $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.

Variations. Sur $]0, \pi[$, $\cos x + 1 > 0$: $t'(x)$ a le signe de $2\cos x - 1$. Sur $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$, $t'(x) > 0$: t est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. Sur $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right[$, $t'(x) < 0$: t est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

Maximum. Le maximum de t sur $[0, \pi]$ est $t\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Remarque : Coin devoir : justifier une réduction

En devoir, la réduction se justifie avant toute dérivée. Écris : « Pour tout réel x, $c(-x) = c(x)$ et $c(x + 2\pi) = c(x)$. Donc c est paire et de période 2π : on l'étudie sur $[0, \pi]$. » Termine en disant comment tu complètes la courbe.

Résoudre graphiquement

Lire des solutions

En clair. Résoudre $g(x) = m$, c'est chercher les abscisses des points de la courbe situés à la hauteur m.

Trace la droite horizontale d'équation $y = m$ et fais-la glisser de bas en haut. Le nombre de points communs change quand la droite passe par un extremum.

Devine : Une droite à la hauteur 6

Reprends $g(x) = x - 1 + \frac{4}{x - 2}$: maximum local -3 en 0, minimum local 5 en 4, asymptote verticale d'équation $x = 2$. Combien de solutions l'équation $g(x) = 6$ semble-t-elle avoir ?

A. Aucune.

Faux.
Sur $]2, +\infty[$, la courbe monte bien au-dessus de la hauteur 6 : elle y rencontre la droite.

B. Une seule.

Faux.
La droite d'équation $y = 6$ coupe les deux côtés du creux, autour de 4.

C. Trois.

Faux.
Sur $]-\infty, 2[$, $g(x) \leq -3$: aucune solution là.

D. Deux.

Juste.
Juste : une de chaque côté de 4, dans $]2, +\infty[$.

Correction
Sur $]-\infty, 2[$, $g(x) \leq -3$: la droite d'équation $y = 6$ n'y rencontre pas la courbe.

Sur $]2, +\infty[$, g descend de $+\infty$ à 5, puis remonte vers $+\infty$. La droite coupe donc la courbe deux fois : l'équation semble avoir deux solutions.

Le calcul le confirme : pour $x \neq 2$, $g(x) = 6$ équivaut à $x^2 - 9x + 18 = 0$, dont les solutions sont 3 et 6.

La méthode et un exemple

Méthode : résoudre graphiquement

1. **Écris** l'équation sous la forme $f(x) = m$, ou égale $f(x)$ à une autre expression $\varphi(x)$, avec des courbes que tu connais.
2. **Lis** les abscisses des points communs à $\mathcal{C}_f$ et à la droite d'équation $y = m$, ou à l'autre courbe.
3. **Pour une inéquation** $f(x) > \varphi(x)$, lis les abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de l'autre courbe.
4. **Présente** le résultat comme une lecture graphique, avec des valeurs approchées ; confirme-le par le calcul quand c'est possible.

Exemple : le nombre de solutions selon m

On lit sur la courbe de g le nombre de solutions de $g(x) = m$:

- si $m < -3$: deux solutions, toutes deux dans $]-\infty, 2[$;
- si $m = -3$ ou $m = 5$: une seule, 0 ou 4 ;
- si $-3 < m < 5$: aucune ;
- si $m > 5$: deux solutions, toutes deux dans $]2, +\infty[$.

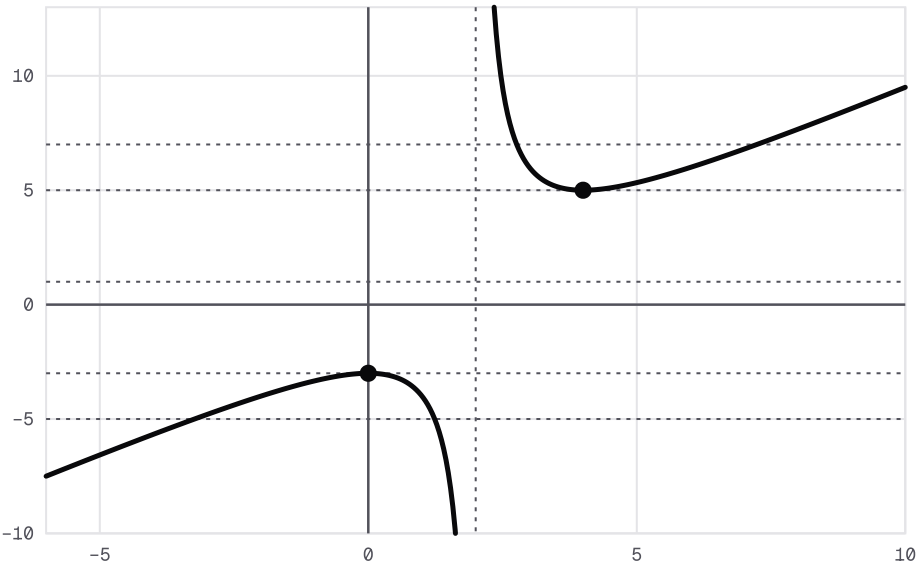
Ce n'est qu'une lecture. Le calcul la confirme : pour $x \neq 2$, $g(x) = m$ équivaut à

$$x^2 - (m+3)x + 2m + 6 = 0.$$

Ce trinôme a pour discriminant :

$$\begin{aligned}&(m+3)^2 - 4(2m+6)\\ &= (m+3)(m-5).\end{aligned}$$

Le réel 2 n'en est jamais racine, car le trinôme y prend la valeur 4.



Courbe de g : x ↦ x − 1 + 4/(x − 2) coupée par cinq droites horizontales : y = −5 la rencontre deux fois, y = −3 une fois, y = 1 jamais, y = 5 une fois, y = 7 deux fois.

Une inéquation, puis à toi

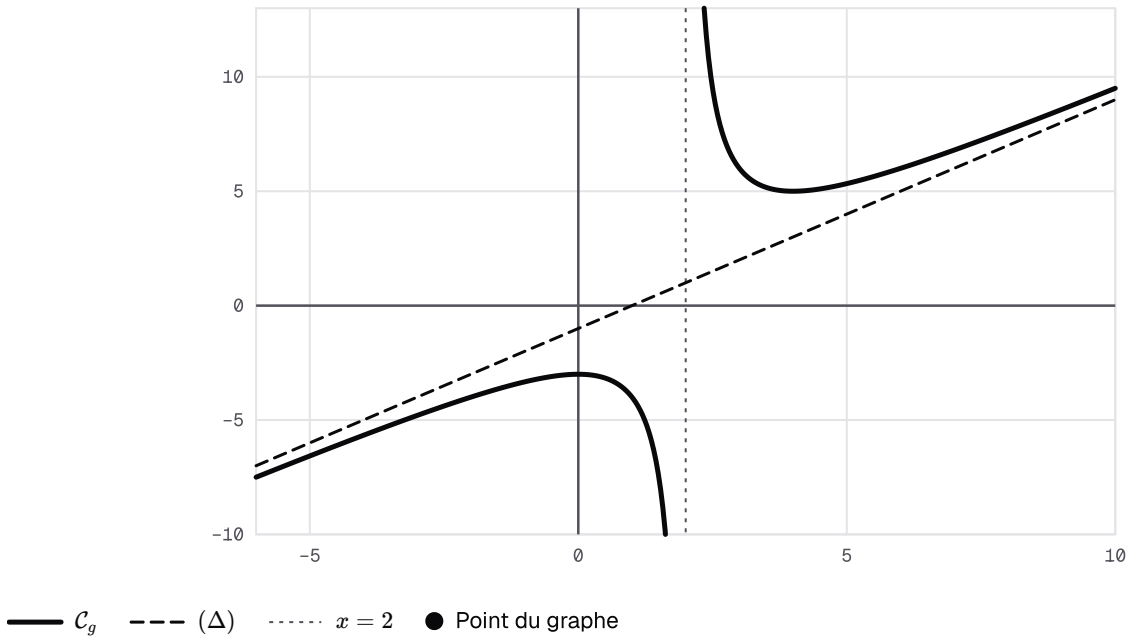
Exemple : une inéquation

Résolvons dans D_g l'inéquation $g(x) > x - 1$.

Lecture. On cherche les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ situés au-dessus de l'asymptote oblique (Δ) d'équation $y = x - 1$. La courbe est au-dessus de (Δ) à droite de l'asymptote verticale : on lit $]2, +\infty[$.

Calcul. Pour $x \neq 2$, $g(x) - (x - 1) = \dfrac{4}{x - 2}$, qui est strictement positif exactement quand $x > 2$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S =]2, +\infty[$.



Courbe de g et asymptote oblique (Δ) d'équation y = x − 1 : la courbe passe au-dessus de (Δ) exactement à droite de la droite d'équation x = 2, d'où l'ensemble des solutions]2, +∞[.

À toi : Le nombre de solutions selon m

Reprends $h(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x-1}$. Étudie ses variations, puis lis le nombre de solutions de l'équation $h(x) = m$ selon le réel m. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Dérive h sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, puis factorise $h'(x)$.

Indice 2

Tu dois trouver un maximum local $h(0) = 1$ et un minimum local $h(2) = 5$.

Indice 3

Point délicat : la lecture se confirme par le calcul ; $h(x) = m$ conduit au discriminant $(m-1)(m-5)$.

Réponse

Dérivée. D'après la dérivée de l'inverse et la dérivée d'une somme, pour $x \neq 1$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 - \frac{1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Variations.

- $h'(x) > 0$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]2, +\infty[$: h y est strictement croissante.
- $h'(x) < 0$ sur $]0, 1[$ et sur $]1, 2[$: h y est strictement décroissante.

Le maximum local est $h(0) = 1$, le minimum local $h(2) = 5$.

Lecture. On lit :

- deux solutions si $m < 1$ ou $m > 5$;
- une seule si $m = 1$ ou $m = 5$;
- aucune si $1 < m < 5$.

Confirmation. Pour $x \neq 1$, $h(x) = m$ équivaut à $x^2 + (1-m)x + m - 1 = 0$, de discriminant $(m-1)(m-5)$; le réel 1 n'est jamais racine de ce trinôme.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle méthode pour quelle question

- **Limite infinie en un réel** a : asymptote verticale d'équation $x = a$.
- **Limite réelle** b **à l'infini** : asymptote horizontale d'équation $y = b$.
- **Limite infinie à l'infini** : la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$, puis celle de $f(x) - ax$; asymptote oblique ou branche parabolique.
- **Position d'une courbe et d'une droite** : le signe de $f(x) - (mx + p)$.
- **Concavité** : le signe de f'' ; **point d'inflexion** : f'' s'annule en changeant de signe.
- **Symétrie** : $f(2a - x) = f(x)$ ou $f(2a - x) + f(x) = 2b$; **période** : $f(x + T) = f(x)$.
- **Étude complète** : domaine, limites, dérivée, variations, compléments, tracé.
- **Nombre de solutions** : une lecture graphique, confirmée par le calcul quand c'est possible.

Le mot du prof. Une étude de fonction enchaîne de petits calculs, chacun avec sa règle. Écris toujours la règle et l'intervalle.

Le tableau de variations, les asymptotes et la concavité se retrouvent ensuite sur ta courbe. Ces outils te serviront chaque fois que tu rencontreras une nouvelle fonction.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Étude et représentation des fonctions » (1bac · sciences-experimentales · mathematiques)