BURHAN

Devoir surveillé n° 2, semestre 2

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/devoirs/devoir-2-semestre-2

Semestre	Durée	Barème
Semestre 2	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Une calculatrice non programmable est permise. Toute réponse doit être justifiée ; la rigueur des raisonnements, la clarté de la rédaction et le soin de la copie et des tracés entrent dans l'appréciation.

Exercice 1 8 pts

Étude et représentation d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $D =]2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 7}{x - 2}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to 2^+} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat.

2 1 pts

a) Vérifier que, pour tout x de D, $f(x) = x + 1 + \dfrac{9}{x - 2}$.

b) En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

3 1 pts

Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$, puis étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (Δ) sur D.

4 1,25 pts

Montrer que, pour tout x de D, $f'(x) = \dfrac{(x + 1)(x - 5)}{(x - 2)^2}$.

5 1,5 pts

Étudier le signe de $f'(x)$ sur D, puis dresser le tableau de variations de f. En déduire que, pour tout x de D, $f(x) \geq 9$.

6 1 pts

Déduire de la question 2 que, pour tout x de D, $f'(x) = 1 - \dfrac{9}{(x - 2)^2}$. En dérivant cette écriture, montrer que $f''(x) = \dfrac{18}{(x - 2)^3}$, puis en déduire la convexité de $\mathcal{C}_f$.

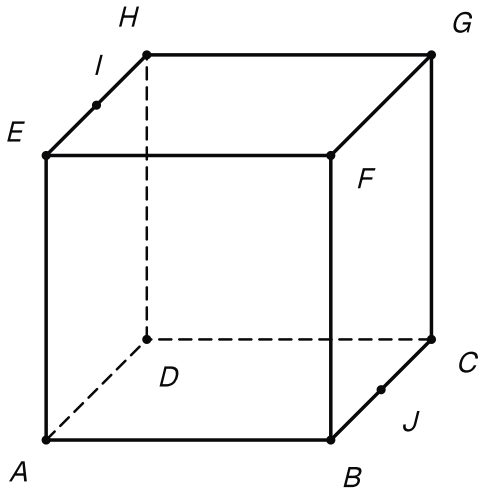
7 1,5 pts

On donne $f(3) = f(11) = 13$. Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité 1 cm (abscisses de 0 à 12, ordonnées de 0 à 14), tracer les deux asymptotes de $\mathcal{C}_f$, puis la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2 — 4 pts

Vecteurs de l'espace

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$ sont des arêtes. On note I le milieu de l'arête $[EH]$ et J le milieu de l'arête $[BC]$ (voir la figure).



Le cube ABCDEFGH, le milieu I de [EH] et le milieu J de [BC].

1 — 1 pts

Montrer que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et que $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

2 — 0,75 pts

Montrer que $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AG}$.

3 — 1 pts

En déduire que le quadrilatère $AJGI$ est un parallélogramme et que les points A, I, G et J sont coplanaires.

4 — 1,25 pts

Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EB}$. En déduire que la droite (IJ) est strictement parallèle au plan (ABF).

Exercice 3 — 4 pts

Plan et droite dans un repère de l'espace

L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1, 0, 2)$, $B(2, 1, 1)$, $C(1, -1, 0)$ et $D(2, -1, 3)$, ainsi que le vecteur $\vec{u}(2, 1, 2)$.

1 — 0,5 pts

Vérifier que $\overrightarrow{AB}(1, 1, -1)$ et $\overrightarrow{AC}(0, -1, -2)$, puis que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2 — 1,25 pts

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. En utilisant $\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $3x - 2y + z - 5 = 0$.

3 — 0,75 pts

Calculer $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

4 — 0,5 pts

On note (Δ) la droite qui contient le point D et dont $\vec{u}$ est un vecteur directeur. Écrire une représentation paramétrique de (Δ).

5 — 1 pts

Montrer que la droite (Δ) coupe le plan (ABC) en un point H dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 4 — 4 pts

Positions relatives de droites et de plans

L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les droites (D_1) et (D_2) de représentations paramétriques :

$$(D_1) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3t \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (D_2) : \begin{cases} x = 3 + s \\ y = -1 - 2s \quad (s \in \mathbb{R}), \\ z = 2 - s \end{cases}$$

ainsi que les plans $(R) : 7x + 4y - z - 15 = 0$ et $(S) : x - z + 1 = 0$.

1 — 1,5 pts

Montrer que les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas parallèles, puis qu'elles sont sécantes en un point K dont on déterminera les coordonnées.

INDICE

Écrire l'égalité des coordonnées d'un point de (D_1) et d'un point de (D_2) : trois équations d'inconnues t et s ; résoudre avec deux d'entre elles et vérifier la troisième.

2 — 1 pts

Soit (D_3) la droite passant par $N(1, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{w}(0, 1, 4)$. Montrer que (D_3) est strictement parallèle au plan (R).

3 — 0,5 pts

Montrer que les plans (R) et (S) sont sécants.

4 — 1 pts

On note (Δ) la droite d'intersection des plans (R) et (S). Déterminer une représentation paramétrique de (Δ) (on pourra poser $x = 2t$), puis vérifier que K appartient à (Δ).

INDICE

Exprimer z en fonction de x avec l'équation de (S), puis reporter dans celle de (R).

SOURCES

BURHAN