BURHAN

Devoir surveillé n° 2, semestre 1

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/devoirs/devoir-2-semestre-1

Semestre	Durée	Barème
Semestre 1	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être abordés dans n'importe quel ordre. Une calculatrice non programmable est permise. Toute réponse doit être justifiée ; la rigueur des raisonnements, la qualité de la rédaction et la présentation de la copie seront prises en compte.

Exercice 1 5 pts

Barycentre dans le plan

Soit ABC un triangle. On considère le point G défini par :

$$G = \mathrm{Bar}\{(A,3);(B,-1);(C,2)\}.$$

1 0,75 pts

Justifier l'existence du point G, puis montrer que $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

2 0,75 pts

En déduire les coordonnées de G dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, puis construire le point G.

3 1 pts

Soit $F = \mathrm{Bar}\{(B,-1);(C,2)\}$. Montrer que $G = \mathrm{Bar}\{(A,3);(F,1)\}$, puis en déduire que les points A, G et F sont alignés.

4 0,5 pts

Montrer que, pour tout point M du plan :

$$3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}.$$

5 1 pts

En déduire l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que :

$$\left\| 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = 2 \left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \right\|,$$

puis construire (Γ_1).

6 1 pts

Soit I le milieu du segment $[AB]$. Déterminer et construire l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que :

$$\left\| 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = 2 \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right\|.$$

Exercice 2 — 6,5 pts

Calcul trigonométrique

Les parties A et B sont indépendantes. Dans la partie B, on pose, pour tout réel x :

$$f(x) = \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x.$$

A.1 — 1 pts

En remarquant que $\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$, calculer $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

A.2 — 1 pts

Calculer $\tan\dfrac{7\pi}{12}$ et l'écrire sous la forme $a + b\sqrt{3}$, avec a et b entiers.

B.1 — 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

B.2 — 1,25 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = \sqrt{2}$, puis donner ses solutions qui appartiennent à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

B.3 — 1 pts

On pose $t = 2x + \dfrac{\pi}{3}$. Montrer que $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow \cos t \geq \dfrac{1}{2}$, puis déterminer l'intervalle décrit par t lorsque x décrit $[0, \pi]$.

B.4 — 1,5 pts

En déduire les solutions dans l'intervalle $[0, \pi]$ de l'inéquation $f(x) \geq 1$.

INDICE

Lire sur le cercle trigonométrique les réels t de l'intervalle trouvé en B.3 tels que $\cos t \geq \dfrac{1}{2}$; attention au premier arc, qui n'a qu'un point en commun avec cet intervalle.

Exercice 3 — 3,5 pts

Produit scalaire : droites et distance

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on place les points $A(1,1)$, $B(5,3)$ et $C(3,-3)$.

1 — 1 pts

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis les distances AB et AC. En déduire la nature du triangle ABC.

2 — 0,5 pts

Montrer que $3x - y - 12 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (BC).

3 — 0,75 pts

Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire à (BC).

4 — 1,25 pts

Calculer la distance du point A à la droite (BC), puis l'aire du triangle ABC.

Exercice 4 — 5 pts

Cercle et droites

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points $M(x,y)$ tels que $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$, et la droite (D) d'équation $x - 2y + 5 = 0$.

1 — 0,75 pts

Montrer que $(\mathcal{C})$ est un cercle ; donner son centre Ω et son rayon r.

2 — 1,25 pts

Vérifier que le point $A(4,2)$ appartient à $(\mathcal{C})$, puis déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point A.

3 — 0,75 pts

Calculer la distance du point Ω à la droite (D) et en déduire la position relative de (D) et de $(\mathcal{C})$.

4 — 1,25 pts

Déterminer les coordonnées des points d'intersection E et F de (D) et de $(\mathcal{C})$ (on notera E celui qui a la plus petite abscisse).

5 — 1 pts

Montrer que l'ensemble (Γ) des points $M(x,y)$ tels que $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$ a pour équation $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$. Préciser son centre K et son rayon.

SOURCES

BURHAN