BURHAN

Devoir surveillé n° 1, semestre 2

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/devoirs/devoir-1-semestre-2

Semestre	Durée	Barème
Semestre 2	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Une calculatrice non programmable est permise. Toute réponse doit être justifiée ; la rigueur des raisonnements, la clarté de la rédaction et le soin de la copie entrent dans l'appréciation.

Exercice 1 — 5 pts

Rotation dans le plan

Le plan est orienté. Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, et soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On note $D = R(C)$ et I le milieu du segment $[BC]$.

1 — 0,75 pts

Montrer que $R(B) = C$.

2 — 1,25 pts

Montrer que le triangle ACD est équilatéral, puis en déduire que le quadrilatère $ABCD$ est un losange.

3 — 1,25 pts

On note $J = R(I)$. Montrer que J est le milieu du segment $[CD]$, puis que le triangle AIJ est équilatéral.

4 — 1,75 pts

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre B passant par I, K le milieu du segment $[AC]$ et L le milieu du segment $[AB]$.

a) Déterminer l'image $(\mathcal{C}')$ du cercle $(\mathcal{C})$ par R (centre et rayon).

b) En utilisant le fait que I appartient à $(\mathcal{C})$, montrer que J appartient à $(\mathcal{C}')$.

c) Montrer que L appartient à $(\mathcal{C})$, puis en déduire que K appartient à $(\mathcal{C}')$.

Exercice 2 5 pts

Calculs de limites

Les questions 1 à 4 sont indépendantes ; la question 5 étudie une fonction définie par morceaux.

1 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - x + 1}{1 - 2x^2}$.

2 1 pts

Calculer $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x+2}{1-x}$ et $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{x+2}{1-x}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{x+2}{1-x}$ admet-elle une limite en 1 ?

3 1 pts

Calculer $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$.

INDICE

Multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{x+1} + 2$.

4 1 pts

Calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \tan x}$.

5 1,25 pts

Soit a un réel et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} \text{ si } x < 2 \qquad \text{et} \qquad h(x) = ax + 1 \text{ si } x \geq 2.$$

a) Calculer $\lim_{x \to 2^-} h(x)$ et $\lim_{x \to 2^+} h(x)$ (la seconde en fonction de a).

b) Déterminer la valeur de a pour laquelle h admet une limite en 2 (les limites à gauche et à droite en 2 sont alors égales).

Exercice 3 — 4,5 pts

Dérivabilité en un point

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On s'intéresse à la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = x\,|x-2|$; on appelle $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique.

1 — 0,5 pts

Écrire $f(x)$ sans valeur absolue sur chacun des intervalles $]-\infty, 2]$ et $[2, +\infty[$.

2 — 1,25 pts

En revenant à la définition, montrer que f est dérivable en 3 et que $f'(3) = 4$, puis en déduire une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ en son point A d'abscisse 3.

3 — 1,5 pts

Étudier la dérivabilité de f à droite en 2, puis à gauche en 2. La fonction f est-elle dérivable en 2 ?

4 — 1,25 pts

Interpréter graphiquement le résultat de la question 3 et donner une équation de chacune des deux demi-tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ au point $B(2, 0)$.

Exercice 4 — 5,5 pts

Dérivée, tangente et approximation affine

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On s'intéresse à la fonction g qui à tout réel positif x associe $g(x) = x - 2\sqrt{x}$; on appelle $(\mathcal{C}_g)$ sa représentation graphique.

1 — 1 pts

Montrer que $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{g(x) - g(0)}{x} = -\infty$. La fonction g est-elle dérivable à droite en 0 ? Interpréter graphiquement.

2 — 0,75 pts

Justifier que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$.

3 — 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

4 — 0,75 pts

Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]0, +\infty[$, puis en déduire le sens de variation de g sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.

5 — 0,75 pts

Vérifier que $g(x) < g(0)$ pour tout x de $]0, 1]$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0, +\infty[$. En déduire le minimum de g sur $[0, +\infty[$.

6 — 0,75 pts

Écrire une équation de la tangente (Δ) à $(\mathcal{C}_g)$ en son point E d'abscisse 4.

7 — 0,75 pts

En utilisant l'approximation affine de g au voisinage de 4, donner une valeur approchée de $g(4{,}02)$, puis en déduire une valeur approchée de $\sqrt{4{,}02}$.

INDICE

Isoler $\sqrt{4{,}02}$ dans l'égalité $g(4{,}02) = 4{,}02 - 2\sqrt{4{,}02}$.

SOURCES

BURHAN