BURHAN

Devoir surveillé n° 1, semestre 1

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/devoirs/devoir-1-semestre-1

Semestre	Durée	Barème
Semestre 1	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Une calculatrice non programmable est permise. Toute réponse doit être justifiée ; la rigueur des raisonnements, la clarté de la rédaction et le soin de la copie entrent dans l'appréciation.

Exercice 1 — 4,5 pts

Notions de logique

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

1 — 0,75 pts

On considère la proposition P : « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 0$ ». Écrire la négation de P, puis déterminer la valeur de vérité de P en justifiant.

2 — 1,25 pts

On considère la proposition R : « $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 + n + 3$ est pair ».

a) Écrire la négation de R.

b) En distinguant les cas n pair et n impair, montrer que $n(n+1)$ est pair pour tout entier naturel n, puis en déduire la valeur de vérité de R.

3 — 1,25 pts

Soit x un réel de l'intervalle $[-1, +\infty[$. En raisonnant par contraposée, montrer l'implication :

$$x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2}.$$

4 — 1,25 pts

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

INDICE

Écrire $2^{3(n+1)} = 8 \times 2^{3n}$ et utiliser l'hypothèse de récurrence sous la forme $2^{3n} = 7k + 1$.

Exercice 2 — 6 pts

Étude d'une fonction bornée

Soit g la fonction qui à tout réel x associe $g(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, dans lequel $(\mathcal{C}_g)$ désigne la courbe de g.

1 — 0,75 pts

Justifier que g est définie sur $\mathbb{R}$, puis montrer que g est impaire. Interpréter graphiquement ce résultat.

2 — 1 pts

Vérifier que, pour tout réel x, $1 - g(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2+4}$. En déduire que 1 est le maximum de g sur $\mathbb{R}$.

3 — 1,5 pts

Soient a et b deux réels distincts. Montrer que $\dfrac{g(a)-g(b)}{a-b} = \dfrac{4(4-ab)}{(a^2+4)(b^2+4)}$.

4 — 1,75 pts

En déduire que g est strictement croissante sur $[0, 2]$ et strictement décroissante sur $[2, +\infty[$.

5 — 1 pts

En utilisant l'imparité de g, en déduire le sens de variation de g sur $]-\infty, -2]$ et sur $[-2, 0]$, puis dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$ en précisant $g(-2)$.

Exercice 3 — 3,75 pts

Composée avec la racine carrée

On considère les fonctions h et k définies par $h(x) = x^2 - 6x + 10$ et $k(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$, et on note $(\mathcal{C}_k)$ la courbe de k dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On remarque que $k = \varphi \circ h$, où φ est la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$.

1 — 1 pts

Vérifier que, pour tout réel x, $h(x) = (x-3)^2 + 1$. En déduire que k est définie sur $\mathbb{R}$ et que 1 est le minimum de k sur $\mathbb{R}$.

2 — 1,5 pts

Donner le sens de variation de h sur $]-\infty, 3]$ et sur $[3, +\infty[$. En déduire, en utilisant la monotonie d'une composée, le sens de variation de k sur chacun de ces intervalles, puis dresser le tableau de variations de k.

3 — 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $k(x) = \sqrt{5}$.

4 — 0,5 pts

En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $k(x) \leq \sqrt{5}$.

Exercice 4 5,75 pts

Suites numériques

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$.

1 0,5 pts

Calculer u_1 et u_2.

2 1 pts

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 3$.

3 0,75 pts

Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{3}(3 - u_n)$. La suite (u_n) est-elle croissante ou décroissante ? Justifier.

4 0,5 pts

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 < u_n \leq 5$. Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

5 0,75 pts

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3$. Établir que (v_n) est géométrique, puis donner sa raison et son premier terme.

6 0,75 pts

Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

7 1,5 pts

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

a) Montrer que $S_n = 3(n+1) + (v_0 + v_1 + \cdots + v_n)$.

b) En déduire que $S_n = 3n + 6 - \dfrac{1}{3^n}$.

INDICE

Pour b), utiliser la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison différente de 1.

SOURCES

BURHAN