BURHAN

Résumé : Dérivabilité

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/derivabilite/resume

Chapitre	Semestre
Dérivabilité	Semestre 2

Nombre dérivé

Définition : Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

On dit que f est **dérivable en** a si le taux de variation $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite **finie** quand x tend vers a.

Cette limite s'appelle le **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

En écrivant $x=a+h$, on a aussi

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Méthode : le nombre dérivé par le taux

1. **Forme** le taux $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, avec $h\neq 0$, ou sa version en x.
2. **Transforme**-le pour sortir de la forme « $\dfrac{0}{0}$ » : développer, factoriser ou employer la quantité conjuguée.
3. **Passe** à la limite en nommant la règle utilisée.
4. **Conclus** : une limite réelle donne $f'(a)$; une limite infinie ou absente signifie que f n'est pas dérivable en a.

Exemple

Énoncé. Calcule le nombre dérivé de $x\mapsto x^2-4x$ en 1.

Taux. La valeur en 1 est -3. Pour $h\neq 0$, la valeur en $1+h$ vaut :

$$\begin{aligned}&(1+h)^2-4(1+h)\\&=h^2-2h-3.\end{aligned}$$

Le taux vaut donc :

$$\frac{h^2-2h}{h}=h-2.$$

Limite. D'après la limite d'une somme, $h-2$ tend vers -2 quand h tend vers 0. Le nombre dérivé en 1 vaut -2.

À retenir : Ce que dit le nombre dérivé

$f'(a)$ est la pente de la courbe au point d'abscisse a.

Si $f(t)$ est la position d'un mobile à l'instant t, $f'(t)$ est sa vitesse instantanée. Le taux de variation, lui, donne une pente moyenne ou une vitesse moyenne.

Dérivabilité à droite et à gauche

Définition : Dérivabilité à droite, à gauche

Soit f une fonction, a un réel et r un réel strictement positif.

- Si f est définie sur $[a, a+r[$ et si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite **finie** quand x tend vers a à droite, on dit que f est **dérivable à droite** en a. Cette limite est le nombre dérivé à droite, noté $f'_d(a)$.
- Si f est définie sur $]a-r, a]$ et si ce taux admet une limite finie quand x tend vers a à gauche, on dit que f est **dérivable à gauche** en a. Cette limite est le nombre dérivé à gauche, noté $f'_g(a)$.

Propriété : Dérivabilité et dérivabilité à droite et à gauche

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant le réel a. Alors f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a avec $f'_d(a) = f'_g(a)$. Dans ce cas, $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Méthode : un point de raccord ou une borne

1. **À droite** : écris le taux pour $x > a$ avec l'expression valable à droite, puis cherche sa limite.
2. **À gauche** : même travail pour $x < a$.
3. **Compare** : deux limites réelles égales, f est dérivable en a. Deux limites réelles distinctes : f n'est pas dérivable en a, et sa courbe a deux demi-tangentes de pentes différentes.
4. **Limite infinie du taux** : demi-tangente verticale.

Exemple

Énoncé. Une fonction vaut $1-x^2$ pour $x \leq 0$ et $1+2x$ pour $x > 0$. Est-elle dérivable en 0 ?

À gauche. Sa valeur en 0 est 1. Pour $x < 0$, le taux vaut $\dfrac{-x^2}{x} = -x$, qui tend vers 0.

À droite. Pour $x > 0$, le taux vaut $\dfrac{2x}{x} = 2$, une constante.

Conclusion. Les nombres dérivés à gauche et à droite valent 0 et 2. Ils diffèrent : la fonction n'est pas dérivable en 0.

Sa courbe a deux demi-tangentes, de coefficients directeurs 0 et 2.

Exemple

Énoncé. La fonction $x \mapsto x\sqrt{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$. Est-elle dérivable à droite en 0 ?

Taux. Pour $x > 0$:

$$\frac{x\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \sqrt{x}.$$

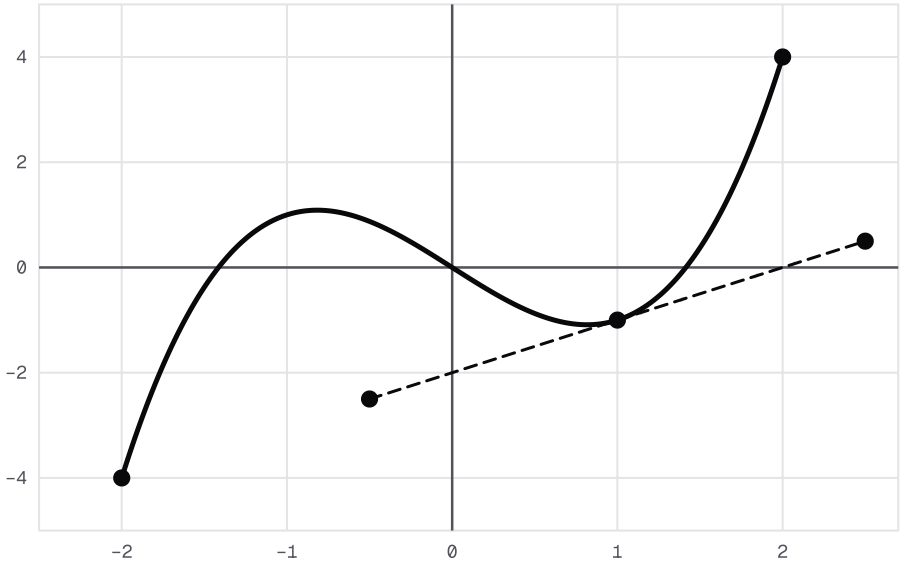
Conclusion. D'après la limite de référence de la racine carrée, $\sqrt{x}$ tend vers 0 à droite de 0. La fonction est dérivable à droite en 0, de nombre dérivé 0 : la demi-tangente est horizontale.

Tangente et demi-tangentes

Définition : Tangente à une courbe

Soit f une fonction dérivable en un réel a, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère. La **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ est la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$. Elle a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



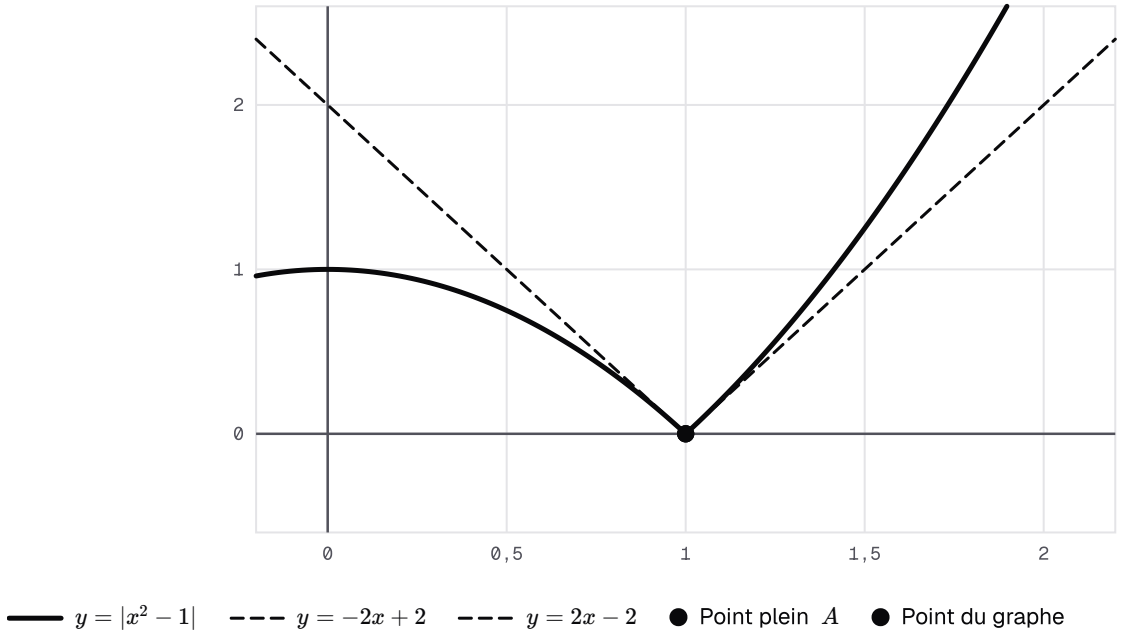
$y = f(x)$ $y = x - 2$ Point plein $A(1, -1)$ Point du graphe

Un exemple de tangente : pour f(x) = x³ − 2x et a = 1, on a f(1) = −1 et f'(1) = 1, et la tangente en A(1, −1) a pour équation y = x − 2.

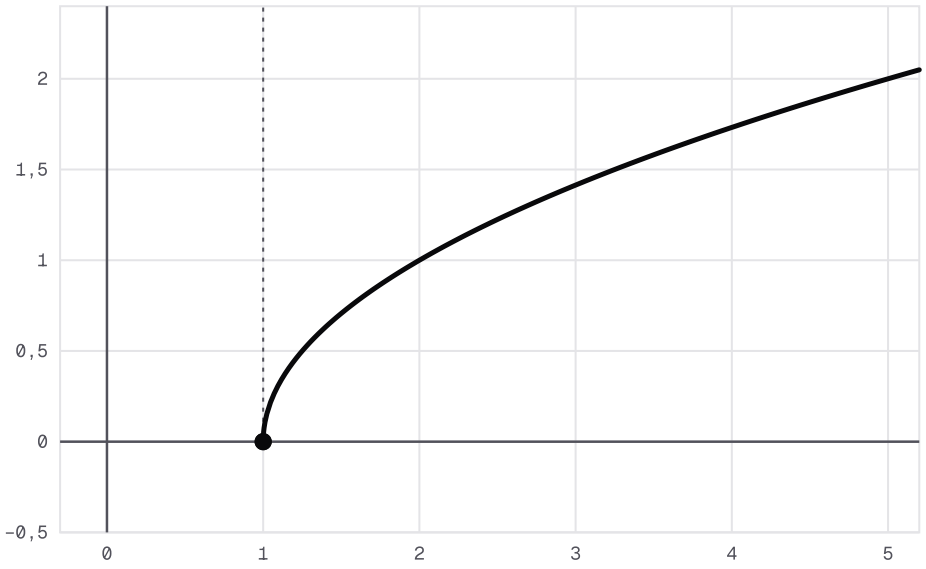
Définition : Demi-tangentes

Soit f une fonction définie en un réel a, $\mathcal{C}_f$ sa courbe et $A(a, f(a))$.

- Si f est dérivable à droite en a, la **demi-tangente à droite** à $\mathcal{C}_f$ en A est la demi-droite d'origine A, de coefficient directeur $f'_d(a)$, formée des points d'abscisse $x \geq a$. On définit de même la **demi-tangente à gauche**, de coefficient directeur $f'_g(a)$, formée des points d'abscisse $x \leq a$.
- Si le taux $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand x tend vers a à droite (ou à gauche), f n'est pas dérivable à droite (ou à gauche) en a, et $\mathcal{C}_f$ admet en A une **demi-tangente verticale**, portée par la droite d'équation $x = a$.



Demi-tangentes de pentes différentes : la courbe de x ↦ |x² − 1| au point A(1, 0), où le nombre dérivé à gauche vaut −2 et le nombre dérivé à droite 2. Les deux demi-droites en pointillés ne sont pas dans le prolongement l'une de l'autre.



Demi-tangente verticale : pour f(x) = √(x − 1), le taux de variation à droite de 1 tend vers +∞, et la courbe part du point A(1, 0) le long de la droite d'équation x = 1.

Méthode : l'équation d'une tangente

1. **Assure-toi** que f est dérivable en a.
2. **Calcule** $f(a)$, puis $f'(a)$.
3. **Écris** $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, puis développe en $y = mx + p$.
4. **Contrôle** : le point $A(a, f(a))$ doit vérifier l'équation obtenue.

Exemple

Énoncé. Écris la tangente à la courbe de $x \mapsto 2x^2 - x$ au point d'abscisse -1.

Valeurs. La valeur en -1 est $2 + 1 = 3$. D'après la dérivée d'une somme et les dérivées usuelles, la dérivée est $x \mapsto 4x - 1$ sur $\mathbb{R}$; en -1, elle vaut -5.

Tangente. $y = -5(x + 1) + 3$, soit $y = -5x - 2$.

Contrôle. $-5 \times (-1) - 2 = 3$.

Attention : Une racine qui s'annule au bord

La fonction $x \mapsto \sqrt{4 - x}$ est définie en 4. Pour $x < 4$, son taux en 4 vaut :

$$\frac{\sqrt{4 - x}}{x - 4} = -\frac{1}{\sqrt{4 - x}}.$$

Il tend vers $-\infty$ à gauche de 4. La fonction n'est donc pas dérivable à gauche en 4 : sa courbe y a une demi-tangente verticale.

La formule de sa dérivée n'a pas de sens en 4.

Approximation affine

Propriété : Approximation affine

Soit f une fonction dérivable en un réel a. Pour tout réel $h \neq 0$ tel que f soit définie en $a+h$, on pose

$$\varphi(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a).$$

Alors $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$ et

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h + h\,\varphi(h).$$

Pour h proche de 0, le nombre $f(a)+f'(a)\,h$ est une **approximation affine** de $f(a+h)$: on écrit $f(a+h) \approx f(a)+f'(a)\,h$.

Méthode : estimer un nombre

1. **Repère** un réel a proche, où $f(a)$ et $f'(a)$ sont simples.
2. **Écris** le nombre cherché comme $f(a+h)$, avec h petit.
3. **Calcule** $f(a)+f'(a)\,h$.
4. **Compare** avec la calculatrice pour juger l'écart.

Exemple

Racine. Avec $x \mapsto \sqrt{x}$, $a = 25$ et $h = 0{,}2$: la racine vaut 5 en 25, et sa dérivée $\frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10}$. Donc :

$$\sqrt{25{,}2} \approx 5 + \frac{0{,}2}{10} = 5{,}02.$$

La calculatrice donne $5{,}01996$ à 10^{-5} près : l'écart est inférieur à 10^{-4}.

Puissance. Avec $x \mapsto x^4$ en 1, de dérivée 4 en ce réel :

$$(1{,}003)^4 \approx 1 + 4 \times 0{,}003 = 1{,}012.$$

La calculatrice donne $1{,}01205$ à 10^{-5} près.

À retenir : L'approximation, c'est la tangente

> Le nombre $f(a) + f'(a)\,h$ est l'ordonnée du point de la tangente d'abscisse $a + h$.
>
> Près de A, la courbe et sa tangente se confondent presque. Plus h est petit, plus l'écart diminue.

Fonction dérivée ; dérivées usuelles

Définition : Fonction dérivée

Soit f une fonction et I un intervalle.

- Si I est ouvert, on dit que f est **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout réel de I.
- Si I contient l'une de ses bornes ou les deux, comme $[a, b]$, $[a, +\infty[$ ou $]a, b]$, on dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel de I qui n'est pas une borne, à droite en la borne gauche de I et à gauche en la borne droite de I, lorsque ces bornes appartiennent à I.
- La fonction qui à tout x de I associe $f'(x)$ s'appelle la **fonction dérivée** de f sur I ; on la note f'. En une borne, $f'(x)$ désigne le nombre dérivé à droite ou à gauche.

Propriété : Dérivées des fonctions usuelles

Soit c un réel et n un entier naturel, $n \geq 2$. Le réel x étant mesuré en radians pour le sinus et le cosinus :

- $x \mapsto c$ et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 1$;
- $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto n\,x^{n-1}$;
- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$;
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;
- $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto -\sin x$.

Remarque : Nombre ou fonction ?

$f'(a)$ est un nombre : la pente en un point. f' est une fonction : elle associe à chaque x de l'intervalle la pente en ce point.

Écris « $f'(x) = \ldots$ pour tout x de I », jamais « $f'(a)$ » pour désigner la fonction.

Exemple

Puissance. Sur $\mathbb{R}$, la dérivée de $x \mapsto x^6$ est $x \mapsto 6x^5$.

Racine. Sur $]0, +\infty[$, la dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ vaut $\dfrac{1}{2\sqrt{16}} = \dfrac{1}{8}$ en 16.

Inverse. Sur $]-\infty, 0[$, la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ vaut $-\dfrac{1}{(-2)^2} = -\dfrac{1}{4}$ en -2.

Somme, produit, inverse, quotient

Propriété : Dérivée d'une somme, d'un produit

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et k un réel. Alors $u+v$, ku et uv sont dérivables sur I et

$$\begin{aligned}(u+v)' &= u'+v',\\ (ku)' &= k\,u',\\ (uv)' &= u'v+uv'.\end{aligned}$$

Propriété : Dérivée de l'inverse, d'un quotient

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, avec $v(x)\neq 0$ pour tout x de I. Alors $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur I et

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{v}\right)' &= -\frac{v'}{v^2},\\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v-uv'}{v^2}.\end{aligned}$$

Méthode : calculer une dérivée

1. **Identifie** la forme : somme, produit, quotient, $f(ax+b)$, puissance ou racine d'une fonction.
2. **Écris** l'intervalle de travail : le dénominateur ne s'y annule pas, et ce qui est sous une racine y reste strictement positif.
3. **Nomme** la règle, puis applique-la avec le tableau des dérivées usuelles.
4. **Réduis** au même dénominateur et factorise si tu dois étudier un signe.

Exemple

Énoncé. Dérive $x\mapsto (x+3)\sqrt{x}$ sur $]0,+\infty[$.

Règle. D'après la dérivée d'un produit, avec $u : x\mapsto x+3$ et $v : x\mapsto \sqrt{x}$, pour tout $x>0$, la dérivée vaut :

$$\begin{aligned}&\sqrt{x}+\frac{x+3}{2\sqrt{x}}\\ &=\frac{2x+x+3}{2\sqrt{x}}\\ &=\frac{3x+3}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Exemple

Énoncé. Dérive $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$, où $x^2+1>0$.

Règle. D'après la dérivée d'un quotient, pour tout réel x, la dérivée vaut :

$$\frac{1\times(x^2+1)-x\times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Attention : Pas de raccourci pour un produit

Le produit de $x \mapsto x^2$ et de $x \mapsto x^3$ est $x \mapsto x^5$, de dérivée $x \mapsto 5x^4$.

Le produit des dérivées donne $2x \times 3x^2 = 6x^3$: en 1, on trouverait 6 au lieu de 5. Pour un produit ou un quotient, applique la règle complète.

f(ax + b), puissance, racine ; dérivées successives

Propriété : Dérivée de x ↦ f(ax + b)

Soit a et b deux réels, avec $a \neq 0$, et f une fonction dérivable sur un intervalle J. On note I l'intervalle des réels x tels que $ax+b$ appartient à J. Alors la fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur I et, pour tout x de I,

$$g'(x) = a\, f'(ax+b).$$

Propriété : Dérivée d'une puissance et d'une racine carrée

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel, $n \geq 2$.

- La fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$.
- Si $u(x) > 0$ pour tout x de I, la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Définition : Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f' est elle-même dérivable sur I, sa dérivée s'appelle la **dérivée seconde** de f et se note f''. De proche en proche, on définit les **dérivées successives** de f : on pose $f^{(1)} = f'$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$ lorsque $f^{(n)}$ est dérivable sur I. La fonction $f^{(n)}$ s'appelle la **dérivée n-ième** de f.

Exemple

Forme $f(ax+b)$. D'après la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$, sur $\mathbb{R}$, la dérivée de $x \mapsto \cos(3x+1)$ est $x \mapsto -3\sin(3x+1)$.

Puissance. D'après la dérivée d'une puissance, la dérivée de $x \mapsto (2x+1)^4$ sur $\mathbb{R}$ prend en x la valeur :

$$\begin{aligned} &4 \times 2 \times (2x+1)^3 \\ &= 8(2x+1)^3. \end{aligned}$$

Racine. Le trinôme x^2+x+1 a un discriminant négatif : il reste strictement positif. D'après la dérivée d'une racine, sur $\mathbb{R}$, la dérivée de $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ est $x \mapsto \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$.

Exemple

Énoncé. Dérivées successives de $x \mapsto x^4$ sur $\mathbb{R}$.

Calcul. On trouve successivement $4x^3$, $12x^2$, $24x$, puis la constante 24.

La dérivée cinquième est nulle, et toutes les suivantes aussi.

Attention : Le coefficient de x compte

La dérivée de $x \mapsto \sin(4x)$ n'est pas $x \mapsto \cos(4x)$. La règle de $f(ax+b)$, avec $a=4$, donne $x \mapsto 4\cos(4x)$.

En 0, la pente vaut 4, et non 1.

Signe de la dérivée et variations

Théorème : Signe de la dérivée et variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I.
- f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I.
- f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout x de I.
- Si $f'(x) > 0$ pour tout x de I, sauf en un nombre fini de réels où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I. Si $f'(x) < 0$ pour tout x de I, sauf en un nombre fini de réels où f' s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Méthode : le tableau de variations

1. **Fixe** l'ensemble de définition et l'intervalle de dérivabilité.
2. **Calcule** $f'(x)$ et **factorise**-la.
3. **Dresse** le signe de chaque facteur, puis celui de $f'(x)$.

4. **Traduis** sur chaque intervalle : f' positive, f croissante ; f' négative, f décroissante. Ajoute les valeurs utiles.

Exemple

Énoncé. Variations de $x \mapsto x^3 - 12x$ sur $\mathbb{R}$.

Dérivée. D'après la dérivée d'une somme, pour tout réel x, sa dérivée vaut :

$$3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2).$$

Signe. Elle est strictement positive sur $]-\infty, -2[$ et sur $]2, +\infty[$, strictement négative sur $]-2, 2[$. Elle s'annule en -2 et en 2.

Variations. La fonction est donc strictement croissante sur $]-\infty, -2]$, strictement décroissante sur $[-2, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

Ses valeurs en -2 et en 2 sont 16 et -16.

Attention : Un intervalle, pas une réunion

La fonction $x \mapsto -\dfrac{2}{x}$ a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{2}{x^2}$, strictement positive en tout réel non nul. Elle est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Pourtant $-1 < 1$, et ses valeurs en -1 et en 1 sont 2 et -2 : elle n'est pas croissante sur la réunion.

À retenir : Rédiger une variation

Une phrase complète nomme le signe de la dérivée et l'intervalle :

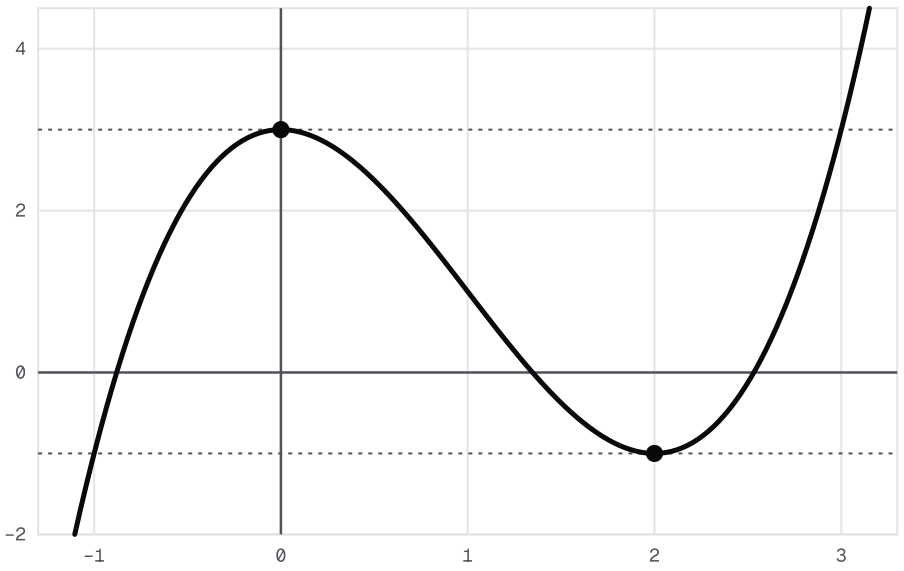
« $f'(x) > 0$ pour tout x de $[2, +\infty[$ sauf en 2, où f' s'annule ; donc f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$ »

Pour inclure une borne par ce théorème, f doit y être dérivable : cite alors la valeur de f' en cette borne. Sinon, compare directement les valeurs.

Extremums

Propriété : Extremum et dérivée nulle

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et a un réel de I. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$: la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est parallèle à l'axe des abscisses.



$y = x^3 - 3x^2 + 3$ $y = 3$ $y = -1$ Point du graphe

Sur l'intervalle ouvert $\mathbb{R}$, x ↦ x³ – 3x² + 3 a un maximum local en 0 et un minimum local en 2 ; en ces deux abscisses, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

Propriété : Changement de signe de la dérivée et extremum

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, a un réel de I et r un réel strictement positif tel que $]a-r, a+r[$ soit inclus dans I.

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de $]a-r, a]$ et $f'(x) \leq 0$ pour tout x de $[a, a+r[$, alors $f(a)$ est un **maximum local** de f.
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de $]a-r, a]$ et $f'(x) \geq 0$ pour tout x de $[a, a+r[$, alors $f(a)$ est un **minimum local** de f.

Méthode : chercher les extremums

1. **Résous** $f'(x) = 0$ à l'intérieur de l'intervalle.
2. **Contrôle**, pour chaque solution, que f' change de signe.
3. **Conclus** : de $+$ à $-$, maximum local ; de $-$ à $+$, minimum local ; sans changement, aucun extremum.
4. **Calcule** la valeur de l'extremum.

Exemple

Énoncé. Extremums de $x \mapsto x^4 - 2x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Dérivée. D'après la dérivée d'une somme, pour tout réel x, elle vaut :

$$4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1).$$

Signe. Elle est négative sur $]-\infty,-1[$ et sur $]0,1[$, positive sur $]-1,0[$ et sur $]1,+\infty[$.

Conclusion. La dérivée change de signe en -1, en 0 et en 1 : minimum local -1 en -1 et en 1, maximum local 0 en 0.

Attention : Dérivée nulle sans extremum

La fonction $x \mapsto (x-1)^3$ a pour dérivée $x \mapsto 3(x-1)^2$, nulle en 1. Mais cette dérivée est strictement positive de part et d'autre de 1.

La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, sans extremum en 1. Seul un changement de signe donne un extremum.

À retenir : Extremum à une borne

Sur $[0,2]$, la fonction $x \mapsto 3x$ atteint son minimum 0 en 0, alors que sa dérivée vaut 3.

Le lien entre extremum et dérivée nulle exige un intervalle ouvert. À une borne, la dérivée peut ne pas s'annuler.

Équation y″ + ω²y = 0

Théorème : Solutions de l'équation y″ + ω²y = 0

Soit ω un réel strictement positif. On cherche les fonctions y, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $y''(x) + \omega^2\, y(x) = 0$ pour tout réel x ; on écrit cette **équation différentielle** $y'' + \omega^2 y = 0$. Ses solutions sont exactement les fonctions

$$x \mapsto \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x),$$

où α et β sont deux réels.

Propriété : Solution vérifiant deux conditions initiales

Soit ω un réel strictement positif, et y_0 et v_0 deux réels. L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ admet une **unique** solution y telle que $y(0) = y_0$ et $y'(0) = v_0$: c'est la fonction

$$x \mapsto y_0\cos(\omega x) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega x).$$

Méthode : résoudre avec deux conditions

1. **Divise** par le coefficient de y'' pour obtenir $y'' + \omega^2 y = 0$, puis lis $\omega > 0$.
2. **Écris** les solutions $x \mapsto \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$.
3. **Dérive**, puis traduis chaque condition par une équation en α et β.

4. **Résous**, puis écris la solution unique.

Exemple

Énoncé. Résous $2y'' + 72y = 0$.

Forme. En divisant par 2 : $y'' + 36y = 0$, avec $\omega^2 = 36$, donc $\omega = 6$.

Solutions. Ce sont les fonctions $x \mapsto \alpha\cos(6x) + \beta\sin(6x)$, avec α et β réels.

Exemple

Énoncé. Trouve la solution de $y'' + 36y = 0$ telle que $y(0) = 3$ et $y'(0) = -12$.

Conditions. Avec $y(x) = \alpha\cos(6x) + \beta\sin(6x)$, on a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} y'(x) = &-6\alpha\sin(6x) \\ &+ 6\beta\cos(6x). \end{aligned}$$

Donc $y(0) = \alpha = 3$ et $y'(0) = 6\beta = -12$, soit $\beta = -2$.

Solution. C'est la fonction $x \mapsto 3\cos(6x) - 2\sin(6x)$.

Quelle méthode pour quelle question ?

Méthode : Quelle méthode pour quelle question ?

- **Nombre dérivé en un réel** : taux de variation, simplification, limite nommée.
- **Point de raccord ou borne** : taux à droite et à gauche, puis comparaison.
- **Taux de limite infinie** : demi-tangente verticale.
- **Tangente** : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- **Valeur approchée d'un nombre** : $f(a) + f'(a)\,h$.
- **Dérivée** : forme reconnue, intervalle précisé, règle nommée.
- **Sens de variation** : signe de f' sur chaque intervalle.
- **Extremum** : f' s'annule **et** change de signe.
- **Équation** $y'' + \omega^2 y = 0$: ω, solutions, deux conditions.

Constante, identité	Puissance
$(c)' = 0, \quad (x)' = 1$	$(x^n)' = n\,x^{n-1}$

Inverse (x non nul)

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Racine carrée (x > 0)

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Sinus, cosinus

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$

Somme, produit

$$(u+v)' = u' + v'$$
$$(ku)' = k\,u'$$
$$(uv)' = u'v + uv'$$

Inverse, quotient

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Forme f(ax + b)

$$g(x) = f(ax+b)$$
$$\Rightarrow g'(x) = a\,f'(ax+b)$$

Puissance, racine d'une fonction

$$(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$$
$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Tangente

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Approximation affine

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)\,h$$

Solutions de y" + ω²y = 0

$$x \mapsto \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$$

À retenir : Rédiger en devoir

Pour chaque dérivée, écris l'intervalle et nomme la règle. Pour chaque variation, nomme le signe de f' et l'intervalle.

Pour un nombre dérivé, nomme la limite employée. Distingue $f'(a)$, un nombre, de f', une fonction.