BURHAN

Dérivabilité : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/derivabilite/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité	Niveau examen	5

Exercice 1 — 5 pts

Étude d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie sur $I =]-1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. — 1 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Début : en -1, le numérateur tend vers un réel non nul ; regarde le signe de $x+1$. **Ensuite :** en $+\infty$, utilise la règle du terme de plus haut degré.

2. — 1 pts

Justifier que f est dérivable sur I et vérifier que, pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$.

INDICE

Début : sur I, le dénominateur ne s'annule pas ; applique la dérivée d'un quotient. **Ensuite :** factorise le trinôme du numérateur.

3. — 1,25 pts

Étudier le signe de $f'(x)$ sur I, puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Début : sur I, étudie le signe de chacun des trois facteurs de $f'(x)$. **Ensuite :** deux d'entre eux sont positifs sur I : que reste-t-il à étudier ?

4. — 0,75 pts

En déduire que f admet un minimum sur I et donner sa valeur.

INDICE

Début : regarde comment le signe de f' change en 1.

5. — 1 pts

Écrire l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

INDICE

Début : calcule $f(0)$ et $f'(0)$ avec l'écriture factorisée.

Exercice 2 — 5 pts

Une racine, une demi-tangente, une approximation

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. — 1,25 pts

Pour $x > 0$, simplifier $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, puis calculer sa limite quand x tend vers 0 à droite. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? Interpréter.

INDICE

Début : pour $x > 0$, $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **Ensuite :** le numérateur tend vers un réel négatif, le dénominateur vers 0 par valeurs positives.

2. — 1 pts

Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et vérifier que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{3(x-2)}{2\sqrt{x}}$.

INDICE

Début : c'est un produit ; la racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$. **Ensuite :** réduis au même dénominateur $2\sqrt{x}$.

3. — 1 pts

Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$ et en déduire les variations de f sur $]0, +\infty[$. Comparer ensuite $f(0)$ et $f(x)$ pour $0 < x \leq 2$, et en déduire le sens de variation de f sur $[0, 2]$.

INDICE

Début : le dénominateur $2\sqrt{x}$ est strictement positif ; cherche où $x - 2$ change de signe. **Ensuite :** en 0, f n'est pas dérivable à droite ; regarde le signe de $f(x)$ pour $0 < x \leq 2$.

4. — 0,75 pts

En déduire le minimum de f sur $[0, +\infty[$ et sa valeur exacte.

INDICE

Début : utilise les deux sens de variation obtenus à la question 3. **Ensuite :** calcule la valeur au réel où ils se raccordent.

5. — 1 pts

Écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4. En déduire une valeur approchée de $f(4{,}04)$, et la comparer avec la calculatrice.

INDICE

Début : calcule $f(4)$, puis $f'(4)$ avec l'expression de la question 2. **Ensuite :** l'approximation affine est l'ordonnée du point de la tangente.

Exercice 3 5 pts

Un flotteur qui oscille

Un flotteur oscille verticalement à la surface de l'eau. Sa position, en centimètres, à l'instant t en secondes, est $y(t)$.

La fonction y est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifie l'équation différentielle (E) : $3y'' + 12\pi^2 y = 0$; on étudie le mouvement pour $t \geq 0$. À l'instant 0 : $y(0) = \sqrt{3}$ et $y'(0) = 2\pi$.

1. 0,75 pts

Écrire (E) sous la forme $y'' + \omega^2 y = 0$ et préciser $\omega > 0$.

INDICE

Début : divise par le coefficient de y''. **Ensuite :** ω est le réel positif dont le carré est le nouveau coefficient de y.

2. 0,75 pts

Donner l'expression des solutions de (E).

INDICE

Début : cite le théorème qui donne les solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$. **Ensuite :** remplace ω.

3. 1,25 pts

À l'aide des conditions à l'instant 0, déterminer α et β, puis $y(t)$.

INDICE

Début : calcule $y(0)$. **Ensuite :** dérive avec la règle de $f(ax+b)$, puis calcule $y'(0)$.

4. 1,25 pts

À l'aide d'une formule d'addition, vérifier que, pour tout réel t, $y(t) = 2\cos\left(2\pi t - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

INDICE

Début : écris $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ avec $b = \dfrac{\pi}{6}$. **Ensuite :** remplace $\cos\dfrac{\pi}{6}$ et $\sin\dfrac{\pi}{6}$ par leurs valeurs.

5. 1 pts

En déduire la hauteur maximale atteinte par le flotteur, et le premier instant $t \geq 0$ où elle est atteinte.

INDICE

Début : un cosinus vaut au plus 1. **Ensuite :** quand le cosinus d'un réel θ vaut-il 1 ? Résous $\theta = 2k\pi$, avec k entier.

Exercice 4 5 pts

Un raccord entre un polynôme et une racine

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = x^3 - 3x$ si $x \leq 1$;
- $f(x) = x - 3 + \sqrt{x-1}$ si $x > 1$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1.

1. 1 pts

Calculer $f(1)$. Pour $x < 1$, vérifier que $f(x) - f(1) = (x-1)^2(x+2)$, puis calculer $f'_g(1)$. Interpréter graphiquement le résultat.

INDICE

Début : développe $(x-1)^2(x+2)$. **Ensuite :** simplifie le taux $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ par $x-1$ avant de passer à la limite.

2. 1,25 pts

Pour $x > 1$, simplifier $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$, puis calculer sa limite quand x tend vers 1 à droite. La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Interpréter.

INDICE

Début : pour $x > 1$, $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$. **Ensuite :** pour la dérivabilité en 1, il faut que f soit dérivable à droite et à gauche, avec le même nombre dérivé.

3. 0,75 pts

Calculer $f'(x)$ pour $x < 1$, puis pour $x > 1$. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

INDICE

Début : à gauche de 1, f est un polynôme ; à droite, dérive $x \mapsto \sqrt{x-1}$ avec la règle de $f(ax+b)$. **Ensuite :** factorise $3x^2 - 3$.

4. 1 pts

En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty, 1]$, puis sur $[1, +\infty[$. On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$: dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Début : sur $]-\infty, 1]$, f coïncide avec le polynôme $x \mapsto x^3 - 3x$, dérivable sur $\mathbb{R}$. **Ensuite :** en 1, f n'est pas dérivable à droite ; compare $f(x)$ et $f(1)$ pour $x > 1$ (question 2).

5. 1 pts

Déterminer les extremums locaux de f. Calculer $f(-2)$, puis en déduire le minimum de f sur $[-2, +\infty[$ et les réels où il est atteint.

INDICE

Début : en -1, regarde le changement de signe de f' ; en 1, f n'est pas dérivable : lis le tableau de variations. **Ensuite :** sur $[-2, +\infty[$, compare $f(x)$ à $f(-2)$ sur $[-2, -1]$, puis à $f(1)$ sur $[-1, +\infty[$.

Exercice 5 5 pts

Une nacelle qui se balance

Une nacelle de manège se balance de part et d'autre de sa position d'équilibre. Sa position, en mètres, à l'instant t en secondes, est repérée sur un axe horizontal par $y(t)$; la position d'équilibre correspond à $y = 0$.

La fonction y est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifie l'équation différentielle (E) : $4y'' + \pi^2 y = 0$; on étudie le mouvement pour $t \geq 0$. À l'instant 1, la nacelle est à la position $y(1) = 2$ et sa vitesse vaut $y'(1) = \pi$ (en mètres par seconde).

1. 0,75 pts

Déterminer le réel $\omega > 0$ tel que (E) s'écrive $y'' + \omega^2 y = 0$, puis donner l'expression des solutions de (E).

INDICE

Début : divise par le coefficient de y''. **Ensuite :** applique le théorème qui donne les solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$.

2. 1,25 pts

À l'aide des conditions à l'instant 1, déterminer α et β, puis $y(t)$.

INDICE

Début : $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$: calcule $y(1)$. **Ensuite :** dérive avec la règle de $f(at+b)$, puis calcule $y'(1)$.

3. 0,75 pts

En déduire que, pour tout réel t, $y'(t) = \pi\left(\sin\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)\right)$. Donner la position et la vitesse de la nacelle à l'instant 0.

INDICE

Début : remplace α et β dans l'expression de $y'(t)$ obtenue à la question 2. **Ensuite :** $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$.

4. 1 pts

À l'aide de l'approximation affine de y au voisinage de 1, donner une valeur approchée de $y(1{,}01)$, et la comparer avec la calculatrice.

INDICE

Début : écris $y(1+h) \approx y(1) + y'(1)\,h$. **Ensuite :** prends $h = 0{,}01$.

5. 1,25 pts

Déterminer les instants t de $[0, 4]$ où la nacelle passe par sa position d'équilibre, puis sa vitesse à chacun de ces instants.

INDICE

Début : pose $\theta = \dfrac{\pi t}{2}$, qui décrit $[0, 2\pi]$, et écris $y(t) = 0$ sous la forme $\sin\theta = \cos\theta$. **Ensuite :** $\cos\theta = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$; rappelle-toi que $\sin a = \sin b$ équivaut à $a = b + 2k\pi$ ou $a = \pi - b + 2k\pi$, avec k entier.