BURHAN

Dérivabilité : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/derivabilite/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Étude d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie sur $I =]-1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. 1 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Début : en -1, le numérateur tend vers un réel non nul ; regarde le signe de $x+1$. **Ensuite :** en $+\infty$, utilise la règle du terme de plus haut degré.

CORRIGÉ

En -1 à droite. Quand x tend vers -1 en restant dans I, x^2+3 tend vers 4 et $x+1$ tend vers 0 en restant strictement positif. Par la limite d'un quotient, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$.

En $+\infty$. Par la règle du terme de plus haut degré, $f(x)$ a la même limite en $+\infty$ que $\dfrac{x^2}{x} = x$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. 1 pts

Justifier que f est dérivable sur I et vérifier que, pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$.

INDICE

Début : sur I, le dénominateur ne s'annule pas ; applique la dérivée d'un quotient. **Ensuite :** factorise le trinôme du numérateur.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Sur I, $x+1 > 0$: le dénominateur ne s'annule pas. Le numérateur et le dénominateur sont des polynômes, de dérivées $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto 1$. Par la dérivée d'un quotient, f est dérivable sur I.

Calcul. Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x+1) - (x^2+3)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Le trinôme x^2+2x-3 a pour racine évidente 1 et le produit de ses racines vaut -3 : l'autre racine est -3, donc $x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$.

Conclusion. f est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$.

3. 1,25 pts

Étudier le signe de $f'(x)$ sur I, puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Début : sur I, étudie le signe de chacun des trois facteurs de $f'(x)$. **Ensuite :** deux d'entre eux sont positifs sur I : que reste-t-il à étudier ?

CORRIGÉ

Signe. Pour tout $x \in I$, $(x+1)^2 > 0$ et $x+3 > 2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x-1$. Donc $f'(x) < 0$ sur $]-1,1[$, $f'(1) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]1,+\infty[$.

Variations. $f'(x) < 0$ sur $]-1,1[$ et $f'(1) = 0$, donc f est strictement décroissante sur $]-1,1]$. $f'(x) > 0$ sur $]1,+\infty[$ et $f'(1) = 0$, donc f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

Tableau. Avec $f(1) = \dfrac{1+3}{1+1} = 2$ et les limites de la question 1 :

x	-1		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	décroissante	2	croissante	$+\infty$

4. 0,75 pts

En déduire que f admet un minimum sur I et donner sa valeur.

INDICE

Début : regarde comment le signe de f' change en 1.

CORRIGÉ

Changement de signe. f' s'annule en 1 en passant de négative à positive : $f(1)$ est un minimum local de f.

Comparaison à $f(1)$. f est strictement décroissante sur $]-1,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$: pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(1)$.

Conclusion. f admet un minimum sur I, atteint en 1. Le minimum de f sur I vaut 2.

5. 1 pts

Écrire l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

INDICE

Début : calcule $f(0)$ et $f'(0)$ avec l'écriture factorisée.

CORRIGÉ

Valeurs. $f(0) = \dfrac{3}{1} = 3$ et, avec l'écriture factorisée, $f'(0) = \dfrac{3 \times (-1)}{1^2} = -3$.

Tangente. T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, c'est-à-dire $y = -3(x-0) + 3$, soit $y = -3x + 3$.

Conclusion. L'équation réduite de T est $y = -3x + 3$.

Exercice 2 5 pts

Une racine, une demi-tangente, une approximation

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. 1,25 pts

Pour $x > 0$, simplifier $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, puis calculer sa limite quand x tend vers 0 à droite. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? Interpréter.

INDICE

Début : pour $x > 0$, $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **Ensuite :** le numérateur tend vers un réel négatif, le dénominateur vers 0 par valeurs positives.

CORRIGÉ

Taux. $f(0) = -6 \times 0 = 0$. Pour $x > 0$, $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, donc :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - 6}{\sqrt{x}}.$$

Limite. Quand x tend vers 0 à droite, $x - 6$ tend vers -6 et $\sqrt{x}$ tend vers 0 en restant strictement positif. Par la limite d'un quotient, ce taux a pour limite $-\infty$.

Conclusion. La limite n'est pas un réel : f n'est pas dérivable à droite en 0. Au point $O(0,0)$, $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente verticale ; comme $f(x) < 0$ pour $0 < x < 6$, la courbe part de O vers le bas.

2. 1 pts

Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et vérifier que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{3(x-2)}{2\sqrt{x}}$.

INDICE

Début : c'est un produit ; la racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$. **Ensuite :** réduis au même dénominateur $2\sqrt{x}$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Sur $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto x - 6$ a pour dérivée $x \mapsto 1$, et la racine carrée a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Par la dérivée d'un produit, f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Calcul. Pour tout $x > 0$, on écrit $\sqrt{x} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x}}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{x} + \frac{x - 6}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x + x - 6}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3(x-2)}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Conclusion. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{3(x-2)}{2\sqrt{x}}$.

3. 1 pts

Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$ et en déduire les variations de f sur $]0,+\infty[$. Comparer ensuite $f(0)$ et $f(x)$ pour $0<x\leq 2$, et en déduire le sens de variation de f sur $[0,2]$.

INDICE

Début : le dénominateur $2\sqrt{x}$ est strictement positif ; cherche où $x-2$ change de signe. **Ensuite :** en 0, f n'est pas dérivable à droite ; regarde le signe de $f(x)$ pour $0<x\leq 2$.

CORRIGÉ

Signe. Pour $x>0$, $2\sqrt{x}>0$: $f'(x)$ a le signe de $x-2$. Donc $f'(x)<0$ sur $]0,2[$, $f'(2)=0$ et $f'(x)>0$ sur $]2,+\infty[$.

Variations sur $]0,+\infty[$**.** $f'(x)<0$ sur $]0,2[$ et $f'(2)=0$, donc f est strictement décroissante sur $]0,2]$. $f'(x)>0$ sur $]2,+\infty[$ et $f'(2)=0$, donc f est strictement croissante sur $[2,+\infty[$.

Comparaison en 0**.** f n'est pas dérivable à droite en 0 (question 1) : on compare directement les valeurs. $f(0)=0$ et, pour $0<x\leq 2$, $x-6<0$ et $\sqrt{x}>0$, donc $f(x)<0=f(0)$.

Conclusion. Avec la stricte décroissance sur $]0,2]$, f est strictement décroissante sur $[0,2]$; elle est strictement croissante sur $[2,+\infty[$.

4. 0,75 pts

En déduire le minimum de f sur $[0,+\infty[$ et sa valeur exacte.

INDICE

Début : utilise les deux sens de variation obtenus à la question 3. **Ensuite :** calcule la valeur au réel où ils se raccordent.

CORRIGÉ

Comparaison à $f(2)$**.** D'après la question 3, f est strictement décroissante sur $[0,2]$ et strictement croissante sur $[2,+\infty[$: pour tout $x\geq 0$, $f(x)\geq f(2)$.

Valeur. $f(2)=(2-6)\sqrt{2}=-4\sqrt{2}$.

Conclusion. Le minimum de f sur $[0,+\infty[$ est $f(2)=-4\sqrt{2}$, atteint en 2.

5. 1 pts

Écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4. En déduire une valeur approchée de $f(4{,}04)$, et la comparer avec la calculatrice.

INDICE

Début : calcule $f(4)$, puis $f'(4)$ avec l'expression de la question 2. **Ensuite :** l'approximation affine est l'ordonnée du point de la tangente.

CORRIGÉ

Tangente. $f(4) = (4-6)\sqrt{4} = -4$ et $f'(4) = \dfrac{3 \times 2}{2 \times 2} = \dfrac{3}{2}$. La tangente a pour équation $y = \dfrac{3}{2}(x-4) - 4$, soit $y = \dfrac{3}{2}x - 10$.

Approximation. D'après l'approximation affine en 4, $f(4+h) \approx f(4) + f'(4)\,h$ pour h proche de 0. Avec $h = 0{,}04$:

$$\begin{aligned} f(4{,}04) &\approx -4 + \frac{3}{2} \times 0{,}04 \\ &= -3{,}94. \end{aligned}$$

Comparaison. La calculatrice donne $f(4{,}04) = -1{,}96\sqrt{4{,}04} \approx -3{,}9396$: l'écart est inférieur à 10^{-3}.

Conclusion. La tangente au point d'abscisse 4 a pour équation $y = \dfrac{3}{2}x - 10$, et $f(4{,}04) \approx -3{,}94$ à moins de 10^{-3} près.

Exercice 3 5 pts

Un flotteur qui oscille

Un flotteur oscille verticalement à la surface de l'eau. Sa position, en centimètres, à l'instant t en secondes, est $y(t)$.

La fonction y est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifie l'équation différentielle (E) : $3y'' + 12\pi^2 y = 0$; on étudie le mouvement pour $t \geq 0$. À l'instant 0 : $y(0) = \sqrt{3}$ et $y'(0) = 2\pi$.

1. 0,75 pts

Écrire (E) sous la forme $y'' + \omega^2 y = 0$ et préciser $\omega > 0$.

INDICE

Début : divise par le coefficient de y''. **Ensuite :** ω est le réel positif dont le carré est le nouveau coefficient de y.

CORRIGÉ

Forme. En divisant les deux membres par 3, (E) équivaut à $y'' + 4\pi^2 y = 0$.

Pulsation. On cherche $\omega > 0$ tel que $\omega^2 = 4\pi^2$, donc $\omega = 2\pi$.

Conclusion. (E) s'écrit $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 2\pi$.

2. 0,75 pts

Donner l'expression des solutions de (E).

INDICE

Début : cite le théorème qui donne les solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$. **Ensuite :** remplace ω.

CORRIGÉ

Théorème. Pour $\omega > 0$, les solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions $t \mapsto \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$, où α et β sont deux réels.

Conclusion. Avec $\omega = 2\pi$, les solutions de (E) sont les fonctions $t \mapsto \alpha\cos(2\pi t) + \beta\sin(2\pi t)$, avec α et β réels.

3. 1,25 pts

À l'aide des conditions à l'instant 0, déterminer α et β, puis $y(t)$.

INDICE

Début : calcule $y(0)$. **Ensuite :** dérive avec la règle de $f(ax+b)$, puis calcule $y'(0)$.

CORRIGÉ

Position initiale. D'après la question 2, pour tout réel t, $y(t) = \alpha\cos(2\pi t) + \beta\sin(2\pi t)$. En $t=0$, $y(0) = \alpha$; la condition $y(0) = \sqrt{3}$ donne $\alpha = \sqrt{3}$.

Vitesse initiale. Par la règle de $t \mapsto u(at+b)$, avec $a = 2\pi$, pour tout réel t :

$$\begin{aligned} y'(t) = &-2\pi\alpha\sin(2\pi t) \\ &+ 2\pi\beta\cos(2\pi t). \end{aligned}$$

Donc $y'(0) = 2\pi\beta = 2\pi$, d'où $\beta = 1$.

Conclusion. $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = 1$ et, pour tout réel t, $y(t) = \sqrt{3}\cos(2\pi t) + \sin(2\pi t)$.

4. 1,25 pts

À l'aide d'une formule d'addition, vérifier que, pour tout réel t, $y(t) = 2\cos\left(2\pi t - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

INDICE

Début : écris $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$ avec $b = \dfrac{\pi}{6}$. **Ensuite :** remplace $\cos\dfrac{\pi}{6}$ et $\sin\dfrac{\pi}{6}$ par leurs valeurs.

CORRIGÉ

Formule d'addition. Pour tout réel a, avec $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} &\cos\left(a - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos a\cos\frac{\pi}{6} + \sin a\sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos a + \frac{1}{2}\sin a. \end{aligned}$$

Vérification. Soit t un réel ; posons $a = 2\pi t$. En multipliant par 2 :

$$\begin{aligned} &2\cos\left(a - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sqrt{3}\cos a + \sin a = y(t). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel t, $y(t) = 2\cos\left(2\pi t - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

5. 1 pts

En déduire la hauteur maximale atteinte par le flotteur, et le premier instant $t \geq 0$ où elle est atteinte.

INDICE

Début : un cosinus vaut au plus 1. **Ensuite :** quand le cosinus d'un réel θ vaut-il 1 ? Résous $\theta = 2k\pi$, avec k entier.

CORRIGÉ

Majoration. Un cosinus est toujours inférieur ou égal à 1. D'après la question 4, $y(t) \leq 2$ pour tout $t \geq 0$, avec égalité lorsque $\cos\left(2\pi t - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$.

Instant. $\cos\theta = 1$ si et seulement si $\theta = 2k\pi$, avec k entier. Ainsi $y(t) = 2$ lorsque $2\pi t - \dfrac{\pi}{6} = 2k\pi$, soit $t = \dfrac{1}{12} + k$. Le plus petit de ces réels qui soit positif s'obtient pour $k = 0$: $t = \dfrac{1}{12}$.

Conclusion. La hauteur maximale vaut 2 cm ; le flotteur l'atteint pour la première fois à l'instant $t = \dfrac{1}{12}$ s.

Exercice 4 5 pts

Un raccord entre un polynôme et une racine

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = x^3 - 3x$ si $x \leq 1$;
- $f(x) = x - 3 + \sqrt{x-1}$ si $x > 1$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1.

1. 1 pts

Calculer $f(1)$. Pour $x < 1$, vérifier que $f(x) - f(1) = (x-1)^2(x+2)$, puis calculer $f'_g(1)$. Interpréter graphiquement le résultat.

INDICE

Début : développe $(x-1)^2(x+2)$. **Ensuite :** simplifie le taux $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ par $x-1$ avant de passer à la limite.

CORRIGÉ

Valeur. Comme $1 \leq 1$, on utilise la première expression : $f(1) = 1 - 3 = -2$.

Taux à gauche. Pour $x < 1$, $f(x) - f(1) = x^3 - 3x + 2$. On développe :

$$\begin{aligned}&(x-1)^2(x+2)\\ &= (x^2 - 2x + 1)(x+2)\\ &= x^3 - 3x + 2\\ &= f(x) - f(1).\end{aligned}$$

On simplifie par $x - 1 \neq 0$: le taux vaut $\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x-1} = (x-1)(x+2)$.

Limite. Par la limite d'un polynôme en un point, $(x-1)(x+2)$ tend vers $0 \times 3 = 0$ quand x tend vers 1 à gauche : $f'_g(1) = 0$.

Conclusion. $f(1) = -2$ et $f'_g(1) = 0$. La demi-tangente à gauche à $\mathcal{C}_f$ en $A(1, -2)$ est horizontale : elle est portée par la droite d'équation $y = -2$, pour $x \leq 1$.

2. 1,25 pts

Pour $x > 1$, simplifier $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, puis calculer sa limite quand x tend vers 1 à droite. La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Interpréter.

INDICE

Début : pour $x > 1$, $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$. **Ensuite :** pour la dérivabilité en 1, il faut que f soit dérivable à droite et à gauche, avec le même nombre dérivé.

CORRIGÉ

Taux à droite. Pour $x > 1$:

$$\begin{aligned} & f(x) - f(1) \\ &= x - 3 + \sqrt{x-1} + 2 \\ &= (x-1) + \sqrt{x-1}. \end{aligned}$$

On divise par $x - 1 > 0$, avec $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

Limite. Quand x tend vers 1 à droite, $\sqrt{x-1}$ tend vers 0 en restant strictement positif. Par la limite d'un inverse puis d'une somme, le taux a pour limite $+\infty$.

Conclusion. La limite n'est pas un réel : f n'est pas dérivable à droite en 1, donc f n'est pas dérivable en 1. En A, $\mathcal{C}_f$ admet à droite une demi-tangente verticale, portée par la droite d'équation $x = 1$ et dirigée vers le haut, car $f(x) > f(1)$ pour $x > 1$; à gauche, la demi-tangente est horizontale (question 1).

3. 0,75 pts

Calculer $f'(x)$ pour $x < 1$, puis pour $x > 1$. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

INDICE

Début : à gauche de 1, f est un polynôme ; à droite, dérive $x \mapsto \sqrt{x-1}$ avec la règle de $f(ax+b)$. **Ensuite :** factorise $3x^2 - 3$.

CORRIGÉ

Sur $]-\infty, 1[$. Sur cet intervalle ouvert, f coïncide avec le polynôme $x \mapsto x^3 - 3x$: elle y est dérivable et, pour tout $x < 1$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Comme $x - 1 < 0$, $f'(x)$ a le signe contraire de $x + 1$: $f'(x) > 0$ sur $]-\infty, -1[$, $f'(-1) = 0$ et $f'(x) < 0$ sur $]-1, 1[$.

Sur $]1, +\infty[$. Pour $x > 1$, $x - 1 > 0$. Par la règle de $x \mapsto u(ax+b)$, appliquée à la racine carrée avec $a = 1$ et $b = -1$, f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et, pour tout $x > 1$, $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$. C'est la somme de deux nombres strictement positifs : $f'(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$.

Conclusion. $f'(x) > 0$ sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$, $f'(x) < 0$ sur $]-1, 1[$, et $f'(-1) = 0$.

4. 1 pts

En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty, 1]$, puis sur $[1, +\infty[$. On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$: dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Début : sur $]-\infty, 1]$, f coïncide avec le polynôme $x \mapsto x^3 - 3x$, dérivable sur $\mathbb{R}$. **Ensuite :** en 1, f n'est pas dérivable à droite ; compare $f(x)$ et $f(1)$ pour $x > 1$ (question 2).

CORRIGÉ

Sur $]-\infty, 1]$. Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x^3 - 3x$: p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $p'(x) = 3(x-1)(x+1)$. Comme $f(x) = p(x)$ pour tout $x \leq 1$, f a sur $]-\infty, 1]$ les variations de p :

- $p'(x) > 0$ sur $]-\infty, -1[$ et $p'(-1) = 0$, donc p est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$;
- $p'(x) < 0$ sur $]-1, 1[$ et $p'(-1) = p'(1) = 0$, donc p est strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

Sur $[1, +\infty[$. $f'(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$, donc f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$. En 1, f n'est pas dérivable à droite : on compare les valeurs. Pour $x > 1$, $f(x) - f(1) = (x-1) + \sqrt{x-1} > 0$ (question 2). Donc f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Tableau. Avec $f(-1) = -1 + 3 = 2$, $f(1) = -2$ et les limites admises :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	non dérivable	$+$	
variations de f	$-\infty$	croissante	2	décroissante	-2	croissante	$+\infty$

5. 1 pts

Déterminer les extremums locaux de f. Calculer $f(-2)$, puis en déduire le minimum de f sur $[-2, +\infty[$ et les réels où il est atteint.

INDICE

Début : en -1, regarde le changement de signe de f' ; en 1, f n'est pas dérivable : lis le tableau de variations. **Ensuite :** sur $[-2, +\infty[$, compare $f(x)$ à $f(-2)$ sur $[-2, -1]$, puis à $f(1)$ sur $[-1, +\infty[$.

CORRIGÉ

Maximum local. f' s'annule en -1 en passant de positive à négative : $f(-1) = 2$ est un maximum local.

Minimum local. f est strictement décroissante sur $[-1, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$: pour tout $x \geq -1$, $f(x) \geq f(1)$. Donc $f(1) = -2$ est un minimum local. Il est atteint en un réel où f n'est pas dérivable : il se lit sur les variations, non sur l'annulation de f'.

Sur $[-2, +\infty[$**.** $f(-2) = -8 + 6 = -2$. Sur $[-2, -1]$, f est strictement croissante, donc $f(x) \geq f(-2) = -2$, avec égalité seulement en -2. Sur $[-1, +\infty[$, $f(x) \geq f(1) = -2$, avec égalité seulement en 1.

Conclusion. f admet un maximum local, $f(-1) = 2$, et un minimum local, $f(1) = -2$. Le minimum de f sur $[-2, +\infty[$ vaut -2 ; il est atteint en deux réels, -2 et 1.

Exercice 5 5 pts

Une nacelle qui se balance

Une nacelle de manège se balance de part et d'autre de sa position d'équilibre. Sa position, en mètres, à l'instant t en secondes, est repérée sur un axe horizontal par $y(t)$; la position d'équilibre correspond à $y = 0$.

La fonction y est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifie l'équation différentielle (E) : $4y'' + \pi^2 y = 0$; on étudie le mouvement pour $t \geq 0$. À l'instant 1, la nacelle est à la position $y(1) = 2$ et sa vitesse vaut $y'(1) = \pi$ (en mètres par seconde).

1. 0,75 pts

Déterminer le réel $\omega > 0$ tel que (E) s'écrive $y'' + \omega^2 y = 0$, puis donner l'expression des solutions de (E).

INDICE

Début : divise par le coefficient de y''. **Ensuite :** applique le théorème qui donne les solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$.

CORRIGÉ

Pulsation. En divisant les deux membres par 4, (E) équivaut à $y'' + \dfrac{\pi^2}{4} y = 0$. On cherche $\omega > 0$ tel que $\omega^2 = \dfrac{\pi^2}{4}$: $\omega = \dfrac{\pi}{2}$.

Solutions. D'après le théorème sur les équations $y'' + \omega^2 y = 0$, les solutions de (E) sont les fonctions $t \mapsto \alpha \cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) + \beta \sin\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)$, avec α et β réels.

Conclusion. (E) s'écrit $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = \dfrac{\pi}{2}$, et ses solutions sont les fonctions ci-dessus.

2. 1,25 pts

À l'aide des conditions à l'instant 1, déterminer α et β, puis $y(t)$.

INDICE

Début : $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$: calcule $y(1)$. **Ensuite :** dérive avec la règle de $f(at+b)$, puis calcule $y'(1)$.

CORRIGÉ

Position à l'instant 1. $y(1) = \alpha \cos\dfrac{\pi}{2} + \beta \sin\dfrac{\pi}{2} = \beta$ et $y(1) = 2$, donc $\beta = 2$.

Vitesse à l'instant 1. Par la règle de $t \mapsto u(at+b)$, avec $a = \dfrac{\pi}{2}$, pour tout réel t :

$$y'(t) = -\frac{\pi}{2}\alpha \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\beta \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right).$$

En $t = 1$, $y'(1) = -\dfrac{\pi}{2}\alpha$. La condition $y'(1) = \pi$ s'écrit $-\dfrac{\pi}{2}\alpha = \pi$, d'où $\alpha = -2$.

Conclusion. Pour tout réel t, $y(t) = -2\cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) + 2\sin\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)$.

3. 0,75 pts

En déduire que, pour tout réel t, $y'(t) = \pi\left(\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)$. Donner la position et la vitesse de la nacelle à l'instant 0.

INDICE

Début : remplace α et β dans l'expression de $y'(t)$ obtenue à la question 2. **Ensuite :** $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$.

CORRIGÉ

Vitesse. On remplace α par -2 et β par 2 dans l'expression de $y'(t)$ de la question 2. Comme $-\frac{\pi}{2} \times (-2) = \pi$ et $\frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$, pour tout réel t :

$$\begin{aligned} y'(t) &= \pi \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \\ &\quad + \pi \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \\ &= \pi\left(\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right. \\ &\quad \left. + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Instant 0. Avec $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$: $y(0) = -2 \times 1 + 2 \times 0 = -2$ et $y'(0) = \pi(0 + 1) = \pi$.

Conclusion. À l'instant 0, la nacelle est à 2 m de sa position d'équilibre, du côté négatif de l'axe, et sa vitesse vaut π m/s.

4. 1 pts

À l'aide de l'approximation affine de y au voisinage de 1, donner une valeur approchée de $y(1{,}01)$, et la comparer avec la calculatrice.

INDICE

Début : écris $y(1 + h) \approx y(1) + y'(1)\,h$. **Ensuite :** prends $h = 0{,}01$.

CORRIGÉ

Approximation affine. y est dérivable en 1, avec $y(1) = 2$ et $y'(1) = \pi$. Pour h proche de 0, $y(1 + h) \approx y(1) + y'(1)\,h$, soit $y(1 + h) \approx 2 + \pi h$.

Valeur. Avec $h = 0{,}01$: $y(1{,}01) \approx 2 + 0{,}01\pi \approx 2{,}0314$.

Comparaison. La calculatrice donne $y(1{,}01) \approx 2{,}0312$: l'écart est inférieur à 10^{-3}.

Conclusion. L'approximation affine donne $y(1{,}01) \approx 2{,}0314$, à moins de 10^{-3} de la valeur fournie par la calculatrice.

5. 1,25 pts

Déterminer les instants t de $[0, 4]$ où la nacelle passe par sa position d'équilibre, puis sa vitesse à chacun de ces instants.

INDICE

Début : pose $\theta = \dfrac{\pi t}{2}$, qui décrit $[0, 2\pi]$, et écris $y(t) = 0$ sous la forme $\sin\theta = \cos\theta$. **Ensuite :** $\cos\theta = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$; rappelle-toi que $\sin a = \sin b$ équivaut à $a = b + 2k\pi$ ou $a = \pi - b + 2k\pi$, avec k entier.

CORRIGÉ

Équation. Posons $\theta = \dfrac{\pi t}{2}$. Alors $y(t) = 0$ équivaut à $2\sin\theta = 2\cos\theta$, soit $\sin\theta = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$. Cela équivaut à $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \theta + 2k\pi$ ou $\theta = \pi - \left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) + 2k\pi$, avec k entier. Le second cas donne $0 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, ce qui est impossible ; le premier donne $2\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, soit $\theta = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

Instants. Pour $t \in [0, 4]$, θ décrit $[0, 2\pi]$: $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ ou $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$, soit $t = \dfrac{1}{2}$ ou $t = \dfrac{5}{2}$.

Vitesses. D'après la question 3 :

- $y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \pi\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi\sqrt{2}$;
- $y'\left(\dfrac{5}{2}\right) = \pi\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\pi\sqrt{2}$.

Conclusion. Sur $[0, 4]$, la nacelle passe par sa position d'équilibre aux instants $t = \dfrac{1}{2}$ et $t = \dfrac{5}{2}$: d'abord dans le sens positif, à environ $4{,}44$ m/s, puis dans le sens négatif, à la même vitesse en valeur absolue.