BURHAN

Dérivabilité : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/derivabilite/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité	Entraînement	7

Exercice 1

Un raccord qui dépend d'un paramètre

Soit m un réel. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = -x^2 + 6x - 4$ si $x \leq 2$;
- $f(x) = m(x-2) + 4$ si $x > 2$.

1.

Calculer $f(2)$, puis $f'_g(2)$ par la limite du taux $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ à gauche de 2.

INDICE

Outil : pour $x < 2$, factorise $-x^2 + 6x - 8$. **Point délicat :** 2 est une racine de ce trinôme ; cherche l'autre.

2.

Calculer $f'_d(2)$.

INDICE

Outil : à droite de 2, utilise l'expression valable pour $x > 2$.

3.

Pour quelle valeur de m la fonction f est-elle dérivable en 2 ? Donner alors la tangente au point d'abscisse 2.

INDICE

Outil : une fonction est dérivable en 2 lorsque ses nombres dérivés à gauche et à droite existent et sont égaux.

4.

Dans cette question, $m = -1$. Décrire les deux demi-tangentes à la courbe de f au point $A(2, 4)$.

INDICE

Outil : chaque demi-tangente a pour coefficient directeur le nombre dérivé du côté étudié.

Exercice 2

Une demi-tangente verticale

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 5]$ par $f(x) = (x+3)\sqrt{5-x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1.

Pour $x < 5$, simplifier le taux $\dfrac{f(x) - f(5)}{x - 5}$, puis calculer sa limite quand x tend vers 5 à gauche. Interpréter le résultat.

INDICE

Outil : pour $x < 5$, $x - 5 = -\left(\sqrt{5-x}\right)^2$. **Point délicat :** regarde le signe du numérateur et celui du dénominateur près de 5.

2.

Justifier que f est dérivable sur $]-\infty, 5[$ et vérifier que, pour tout $x < 5$, $f'(x) = \dfrac{7 - 3x}{2\sqrt{5-x}}$.

INDICE

Outil : dérive d'abord $x \mapsto \sqrt{5-x}$, de la forme $f(ax+b)$ avec $a = -1$, puis applique la dérivée d'un produit.

3.

Écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

INDICE

Outil : calcule $f(1)$ et $f'(1)$; $\sqrt{4} = 2$.

Exercice 3

Deux valeurs approchées sans calculatrice

1.

Donner l'approximation affine de $\sqrt{36+h}$ pour h proche de 0.

INDICE

Outil : prends la racine carrée en $a=36$: $\sqrt{36}$ et la dérivée en 36 sont simples.

2.

En déduire une valeur approchée de $\sqrt{36{,}3}$. La comparer avec la valeur donnée par la calculatrice.

INDICE

Outil : ici $h=0{,}3$.

3.

Avec la fonction inverse en 5, donner une valeur approchée de $\dfrac{1}{5{,}1}$ et l'écart avec la calculatrice.

INDICE

Outil : écris $5{,}1=5+h$ et calcule le nombre dérivé de l'inverse en 5. **Point délicat :** ce nombre dérivé est négatif.

Exercice 4

Tableau de variations sur un segment

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, étudiée sur l'intervalle $[-3, 3]$.

1.

Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = 6(x + 2)(x - 1)$.

INDICE

Outil : dérive terme à terme, puis mets 6 en facteur. **Point délicat :** le trinôme restant a une racine évidente ; déduis l'autre de leur produit.

2.

Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-3, 3]$.

INDICE

Outil : un trinôme de coefficient dominant positif est négatif entre ses racines.

3.

Dresser le tableau de variations de f sur $[-3, 3]$.

INDICE

Outil : calcule $f(-3)$, $f(-2)$, $f(1)$ et $f(3)$. **Point délicat :** pour conclure sur un segment, cite aussi les réels où f' s'annule.

4.

Déterminer les extremums locaux de f, puis son maximum et son minimum sur $[-3, 3]$.

INDICE

Outil : repère où f' change de signe. **Point délicat :** compare ensuite avec les valeurs aux bornes.

Exercice 5

Chercher les extremums

1.

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x - 4\sqrt{x}$. Vérifier que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$.

INDICE

Outil : la dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

2.

En déduire les variations de f sur $]0, +\infty[$ et son minimum.

INDICE

Outil : le dénominateur est positif ; compare $\sqrt{x}$ à 2. **Point délicat :** le minimum se lit sur les variations.

3.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^4 - 4x^3$. Calculer $g'(x)$ et la factoriser.

INDICE

Outil : mets $4x^2$ en facteur.

4.

La fonction g admet-elle un extremum en 0 ? en 3 ?

INDICE

Outil : $4x^2$ est positif. **Point délicat :** étudie séparément $x < 3$ et $x > 3$, sans oublier ce qui se passe en 0.

Exercice 6

Dérivées successives

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - x^2 + 4$ et $g(x) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{3}\right)$.

1.

Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$. Que vaut $f^{(n)}$ pour $n \geq 4$?

INDICE

Outil : chaque dérivation abaisse d'une unité le degré du polynôme.

2.

Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.

INDICE

Outil : c'est la forme $f(ax+b)$ avec $a = \dfrac{\pi}{3}$. **Point délicat :** la dérivée du cosinus fait apparaître un signe moins.

3.

En déduire que g est solution d'une équation $y'' + \omega^2 y = 0$; préciser ω.

INDICE

Outil : compare $g''(x)$ et $g(x)$.

4.

Calculer $g^{(3)}(x)$ et $g^{(4)}(x)$, puis exprimer $g^{(4)}$ à l'aide de g.

INDICE

Outil : applique encore la même règle, ou dérive deux fois la relation de la question 3.

Exercice 7

Une solution fixée par deux conditions

On considère l'équation différentielle (E) : $9y'' + 4y = 0$, d'inconnue une fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1.

Écrire (E) sous la forme $y'' + \omega^2 y = 0$, avec $\omega > 0$.

INDICE

Outil : divise par le coefficient de y''.

2.

Donner les solutions de (E).

INDICE

Outil : utilise le théorème qui donne les solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$.

3.

Déterminer la solution y de (E) telle que $y(0) = 1$ et $y\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -2$.

INDICE

Outil : calcule $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{3\pi}{4}$.

4.

Calculer $y'(0)$.

INDICE

Outil : dérive avec la règle de $f(ax+b)$, où $a = \dfrac{2}{3}$.