BURHAN

Dérivabilité : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/derivabilite/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité	Entraînement	7

Exercice 1

Un raccord qui dépend d'un paramètre

Soit m un réel. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = -x^2 + 6x - 4$ si $x \leq 2$;
- $f(x) = m(x-2) + 4$ si $x > 2$.

1.

Calculer $f(2)$, puis $f'_g(2)$ par la limite du taux $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ à gauche de 2.

INDICE

Outil : pour $x < 2$, factorise $-x^2 + 6x - 8$. **Point délicat :** 2 est une racine de ce trinôme ; cherche l'autre.

CORRIGÉ

Valeur. Comme $2 \leq 2$, $f(2) = -4 + 12 - 4 = 4$.

Taux à gauche. Soit $x < 2$. Alors $f(x) = -x^2 + 6x - 4$ et :

$$\begin{aligned} f(x) - 4 &= -x^2 + 6x - 8 \\ &= -(x-2)(x-4). \end{aligned}$$

On simplifie par $x - 2 \neq 0$: le taux $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ vaut $-(x-4) = 4 - x$.

Limite. Par la limite d'un polynôme en un point, $4 - x$ tend vers $4 - 2 = 2$ quand x tend vers 2 à gauche.

Conclusion. $f(2) = 4$; f est dérivable à gauche en 2 et $f'_g(2) = 2$.

2.

Calculer $f'_d(2)$.

INDICE

Outil : à droite de 2, utilise l'expression valable pour $x > 2$.

CORRIGÉ

Taux à droite. Soit $x > 2$. Alors $f(x) - f(2) = m(x-2) + 4 - 4 = m(x-2)$; en divisant par $x - 2 \neq 0$, le taux vaut m.

Limite. Ce taux est constant, égal à m : sa limite quand x tend vers 2 à droite vaut m.

Conclusion. f est dérivable à droite en 2 et $f'_d(2) = m$.

3.

Pour quelle valeur de m la fonction f est-elle dérivable en 2 ? Donner alors la tangente au point d'abscisse 2.

INDICE

Outil : une fonction est dérivable en 2 lorsque ses nombres dérivés à gauche et à droite existent et sont égaux.

CORRIGÉ

Condition. f est dérivable en 2 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en 2, avec $f'_g(2) = f'_d(2)$. D'après les questions 1 et 2, cette égalité s'écrit $2 = m$. Ainsi f est dérivable en 2 si et seulement si $m = 2$.

Tangente. Pour $m = 2$, $f'(2) = 2$. La tangente au point $A(2, 4)$ a pour équation $y = 2(x - 2) + 4$, soit $y = 2x$.

Conclusion. f est dérivable en 2 pour la seule valeur $m = 2$; la tangente au point d'abscisse 2 est alors la droite d'équation $y = 2x$.

4.

Dans cette question, $m = -1$. Décrire les deux demi-tangentes à la courbe de f au point $A(2, 4)$.

INDICE

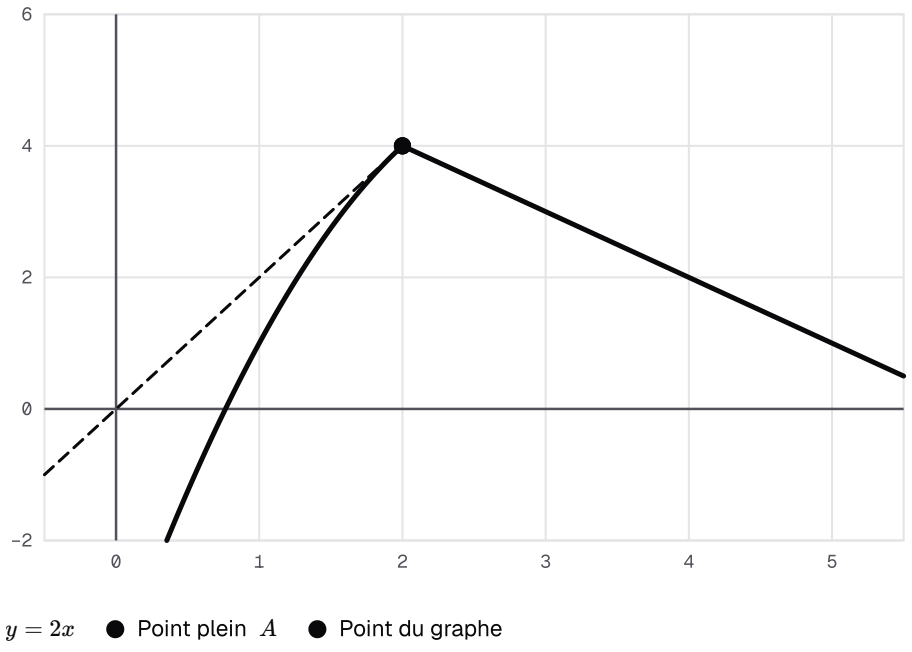
Outil : chaque demi-tangente a pour coefficient directeur le nombre dérivé du côté étudié.

CORRIGÉ

Demi-tangente à gauche. $f'_g(2) = 2$: la demi-tangente à gauche en A est portée par la droite d'équation $y = 2(x - 2) + 4$, c'est-à-dire $y = 2x$, pour $x \leq 2$.

Demi-tangente à droite. Pour $m = -1$, $f'_d(2) = -1$: la demi-tangente à droite a pour équation $y = -(x - 2) + 4 = -x + 6$, pour $x \geq 2$.

Conclusion. Au point $A(2, 4)$, la courbe admet deux demi-tangentes, de coefficients directeurs 2 et -1. Ces nombres diffèrent : f n'est pas dérivable en 2.



Avec m = –1 : la courbe de f arrive en A(2, 4) le long de la demi-tangente y = 2x, de pente 2, en pointillés, et repart sur la demi-droite y = –x + 6, de pente –1. Les deux pentes diffèrent.

Exercice 2

Une demi-tangente verticale

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 5]$ par $f(x) = (x+3)\sqrt{5-x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1.

Pour $x < 5$, simplifier le taux $\dfrac{f(x)-f(5)}{x-5}$, puis calculer sa limite quand x tend vers 5 à gauche. Interpréter le résultat.

INDICE

Outil : pour $x<5$, $x-5 = -\left(\sqrt{5-x}\right)^2$. **Point délicat :** regarde le signe du numérateur et celui du dénominateur près de 5.

CORRIGÉ

Taux. $f(5) = 8\times 0 = 0$. Soit $x<5$. Comme $5-x>0$, $x-5 = -\left(\sqrt{5-x}\right)^2$, d'où :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(5)}{x-5} &= \frac{(x+3)\sqrt{5-x}}{-\left(\sqrt{5-x}\right)^2}\\ &= -\frac{x+3}{\sqrt{5-x}}.\end{aligned}$$

Limite. Quand x tend vers 5 à gauche, $x+3$ tend vers 8 ; par la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{5-x}$ tend vers 0 en restant strictement positif. Par la limite d'un quotient, $\dfrac{x+3}{\sqrt{5-x}}$ tend vers $+\infty$, donc le taux tend vers $-\infty$.

Interprétation. La limite n'est pas un réel : f n'est pas dérivable à gauche en 5, et $\mathcal{C}_f$ admet au point $A(5,0)$ une demi-tangente verticale.

2.

Justifier que f est dérivable sur $]-\infty, 5[$ et vérifier que, pour tout $x < 5$, $f'(x) = \dfrac{7-3x}{2\sqrt{5-x}}$.

INDICE

Outil : dérive d'abord $x \mapsto \sqrt{5-x}$, de la forme $f(ax+b)$ avec $a=-1$, puis applique la dérivée d'un produit.

CORRIGÉ

Racine. Pour $x < 5$, $5-x > 0$. Par la règle de $x \mapsto u(ax+b)$, appliquée à la racine carrée avec $a=-1$ et $b=5$, la fonction $x \mapsto \sqrt{5-x}$ est dérivable sur $]-\infty, 5[$, de dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}$.

Produit. La fonction $x \mapsto x+3$ a pour dérivée $x \mapsto 1$. Par la dérivée d'un produit, f est dérivable sur $]-\infty, 5[$ et, pour tout $x < 5$:

$$\begin{aligned} &f'(x) \\ &= \sqrt{5-x} - \frac{x+3}{2\sqrt{5-x}} \\ &= \frac{2(5-x) - (x+3)}{2\sqrt{5-x}} \\ &= \frac{7-3x}{2\sqrt{5-x}}. \end{aligned}$$

Conclusion. f est dérivable sur $]-\infty, 5[$ et, pour tout $x < 5$, $f'(x) = \dfrac{7-3x}{2\sqrt{5-x}}$.

3.

Écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

INDICE

Outil : calcule $f(1)$ et $f'(1)$; $\sqrt{4} = 2$.

CORRIGÉ

Valeurs. $f(1) = 4\sqrt{4} = 8$ et $f'(1) = \dfrac{7-3}{2\sqrt{4}} = \dfrac{4}{4} = 1$.

Tangente. Elle a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, c'est-à-dire $y = 1 \times (x-1) + 8$, soit $y = x + 7$.

Conclusion. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x + 7$.

Exercice 3

Deux valeurs approchées sans calculatrice

1.

Donner l'approximation affine de $\sqrt{36+h}$ pour h proche de 0.

INDICE

Outil : prends la racine carrée en $a=36$: $\sqrt{36}$ et la dérivée en 36 sont simples.

CORRIGÉ

Racine carrée en 36. Comme $36>0$, la racine carrée est dérivable en 36. Elle y vaut $\sqrt{36}=6$ et son nombre dérivé en 36 est $\dfrac{1}{2\sqrt{36}}=\dfrac{1}{12}$.

Approximation affine. Pour h proche de 0, $\sqrt{36+h}\approx\sqrt{36}+\dfrac{1}{12}\times h$.

Conclusion. Pour h proche de 0, $\sqrt{36+h}\approx 6+\dfrac{h}{12}$.

2.

En déduire une valeur approchée de $\sqrt{36{,}3}$. La comparer avec la valeur donnée par la calculatrice.

INDICE

Outil : ici $h=0{,}3$.

CORRIGÉ

Estimation. On prend $h=0{,}3$ dans l'approximation de la question 1 :

$$\begin{aligned}\sqrt{36{,}3}&\approx 6+\frac{0{,}3}{12}\\&=6+0{,}025=6{,}025.\end{aligned}$$

Comparaison. La calculatrice donne $\sqrt{36{,}3}\approx 6{,}02495$. L'écart avec $6{,}025$ vaut environ $0{,}00005$.

Conclusion. $\sqrt{36{,}3}\approx 6{,}025$, et l'écart avec la valeur de la calculatrice est inférieur à 10^{-4}.

3.

Avec la fonction inverse en 5, donner une valeur approchée de $\dfrac{1}{5{,}1}$ et l'écart avec la calculatrice.

INDICE

Outil : écris $5{,}1 = 5 + h$ et calcule le nombre dérivé de l'inverse en 5. **Point délicat :** ce nombre dérivé est négatif.

CORRIGÉ

Approximation affine. La fonction inverse est dérivable en 5 ; elle y vaut $\dfrac{1}{5}$ et son nombre dérivé en 5 est $-\dfrac{1}{5^2} = -\dfrac{1}{25}$. Pour h proche de 0 :

$$\frac{1}{5+h} \approx \frac{1}{5} - \frac{h}{25}.$$

Estimation. Comme $5{,}1 = 5 + 0{,}1$, on prend $h = 0{,}1$:

$$\frac{1}{5{,}1} \approx 0{,}2 - 0{,}004 = 0{,}196.$$

Écart. La calculatrice donne $0{,}19608$ à 10^{-5} près. L'écart avec $0{,}196$ vaut environ $0{,}00008$.

Conclusion. $\dfrac{1}{5{,}1} \approx 0{,}196$, avec un écart inférieur à 10^{-4}.

Exercice 4

Tableau de variations sur un segment

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, étudiée sur l'intervalle $[-3, 3]$.

1.

Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = 6(x+2)(x-1)$.

INDICE

Outil : dérive terme à terme, puis mets 6 en facteur. **Point délicat :** le trinôme restant a une racine évidente ; déduis l'autre de leur produit.

CORRIGÉ

Dérivée. f est un polynôme : par la dérivée d'une somme et les dérivées usuelles, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-3, 3]$, et pour tout réel x, $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$.

Factorisation. On met 6 en facteur : $f'(x) = 6(x^2 + x - 2)$. Le trinôme $x^2 + x - 2$ a pour racine évidente 1, et le produit de ses racines vaut -2 : l'autre racine est -2. Donc $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = 6(x+2)(x-1)$.

2.

Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-3, 3]$.

INDICE

Outil : un trinôme de coefficient dominant positif est négatif entre ses racines.

CORRIGÉ

Racines. D'après la question 1, f' s'annule en -2 et en 1, deux réels de $[-3, 3]$.

Signe. Comme $6 > 0$, $f'(x)$ a le signe du trinôme $x^2 + x - 2$, de coefficient dominant $1 > 0$: il est strictement négatif entre ses racines et strictement positif à l'extérieur.

Conclusion. $f'(x) > 0$ sur $[-3, -2[$ et sur $]1, 3]$, $f'(x) < 0$ sur $]-2, 1[$, et $f'(-2) = f'(1) = 0$.

3.

Dresser le tableau de variations de f sur $[-3, 3]$.

INDICE

Outil : calcule $f(-3)$, $f(-2)$, $f(1)$ et $f(3)$. **Point délicat :** pour conclure sur un segment, cite aussi les réels où f' s'annule.

CORRIGÉ

Variations. f est dérivable sur $[-3, 3]$; on applique la règle du signe de la dérivée sur chaque segment :

- $f'(x) > 0$ sur $[-3, -2[$ et $f'(-2) = 0$, donc f est strictement croissante sur $[-3, -2]$;
- $f'(x) < 0$ sur $]-2, 1[$ et $f'(-2) = f'(1) = 0$, donc f est strictement décroissante sur $[-2, 1]$;
- $f'(x) > 0$ sur $]1, 3]$ et $f'(1) = 0$, donc f est strictement croissante sur $[1, 3]$.

Valeurs.

- $f(-3) = -54 + 27 + 36 + 1 = 10$;
- $f(-2) = -16 + 12 + 24 + 1 = 21$;
- $f(1) = 2 + 3 - 12 + 1 = -6$;
- $f(3) = 54 + 27 - 36 + 1 = 46$.

Tableau. On en déduit le tableau de variations de f sur $[-3, 3]$:

x	-3		-2		1		3
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	10	croissante	21	décroissante	-6	croissante	46

4.

Déterminer les extremums locaux de f, puis son maximum et son minimum sur $[-3, 3]$.

INDICE

Outil : repère où f' change de signe. **Point délicat :** compare ensuite avec les valeurs aux bornes.

CORRIGÉ

Extremums locaux. En -2, f' s'annule en passant de positive à négative : $f(-2) = 21$ est un maximum local. En 1, f' s'annule en passant de négative à positive : $f(1) = -6$ est un minimum local.

Sur le segment. On compare ces valeurs à celles des bornes, $f(-3) = 10$ et $f(3) = 46$. Parmi 10, 21, -6 et 46, le plus grand est 46 et le plus petit est -6.

Remarque. D'après la forme factorisée, $f'(3) = 60$ n'est pas nul : en une borne du segment, un extremum n'impose pas une dérivée nulle.

Conclusion. f admet un maximum local, $f(-2) = 21$, et un minimum local, $f(1) = -6$. Sur $[-3, 3]$, le maximum de f vaut 46, atteint en 3, et le minimum vaut -6, atteint en 1.

Exercice 5

Chercher les extremums

1.

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x - 4\sqrt{x}$. Vérifier que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$.

INDICE

Outil : la dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

CORRIGÉ

Règles. Sur $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto x$ a pour dérivée $x \mapsto 1$ et la racine carrée a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Par la dérivée d'une somme et d'un produit par un réel, f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Calcul. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$.

2.

En déduire les variations de f sur $]0, +\infty[$ et son minimum.

INDICE

Outil : le dénominateur est positif ; compare $\sqrt{x}$ à 2. **Point délicat :** le minimum se lit sur les variations.

CORRIGÉ

Signe. Pour $x > 0$, $\sqrt{x} > 0$: $f'(x)$ a le signe de $\sqrt{x} - 2$. La racine carrée est strictement croissante et $\sqrt{4} = 2$: pour $0 < x < 4$, $\sqrt{x} < 2$ donc $f'(x) < 0$; pour $x > 4$, $f'(x) > 0$; enfin $f'(4) = 0$.

Variations. $f'(x) < 0$ sur $]0, 4[$ et $f'(4) = 0$, donc f est strictement décroissante sur $]0, 4]$. $f'(x) > 0$ sur $]4, +\infty[$ et $f'(4) = 0$, donc f est strictement croissante sur $[4, +\infty[$.

Minimum. Ces deux sens de variation donnent, pour tout $x > 0$, $f(x) \geq f(4)$.

Conclusion. f est strictement décroissante sur $]0, 4]$ et strictement croissante sur $[4, +\infty[$; $f(4) = 4 - 8 = -4$ est le minimum de f sur $]0, +\infty[$.

3.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^4 - 4x^3$. Calculer $g'(x)$ et la factoriser.

INDICE

Outil : mets $4x^2$ en facteur.

CORRIGÉ

Dérivée. g est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. Par la dérivée d'une somme et les dérivées usuelles, pour tout réel x, $g'(x) = 4x^3 - 12x^2$.

Factorisation. On met $4x^2$ en facteur : $4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$.

Conclusion. Pour tout réel x, $g'(x) = 4x^2(x - 3)$.

4.

La fonction g admet-elle un extremum en 0 ? en 3 ?

INDICE

Outil : $4x^2$ est positif. **Point délicat :** étudie séparément $x < 3$ et $x > 3$, sans oublier ce qui se passe en 0.

CORRIGÉ

Signe de g'. Pour tout réel x, $4x^2 \geq 0$, avec égalité seulement en 0. Donc $g'(x) < 0$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 3[$, $g'(x) > 0$ sur $]3, +\infty[$, et $g'(0) = g'(3) = 0$.

En 0. $g'(0) = 0$, mais g' est strictement négative de part et d'autre de 0 : sans changement de signe, g n'a pas d'extremum en 0. En fait, g est strictement décroissante sur $]-\infty, 3]$.

En 3. g' s'annule en 3 en passant de négative à positive. Donc $g(3) = 81 - 108 = -27$ est un minimum local.

Conclusion. g n'admet pas d'extremum en 0 ; en 3, elle admet un minimum local égal à -27.

Exercice 6

Dérivées successives

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - x^2 + 4$ et $g(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)$.

1.

Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$. Que vaut $f^{(n)}$ pour $n \geq 4$?

INDICE

Outil : chaque dérivation abaisse d'une unité le degré du polynôme.

CORRIGÉ

Calculs. f est un polynôme ; ses dérivées successives sont des polynômes, dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x : $f'(x) = 6x^2 - 2x$, $f''(x) = 12x - 2$, $f^{(3)}(x) = 12$ et $f^{(4)}(x) = 0$.

Au-delà. La dérivée de la fonction nulle est la fonction nulle : dès qu'une dérivée de f est nulle, toutes les suivantes le sont aussi.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 4$, $f^{(n)}$ est la fonction nulle.

2.

Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.

INDICE

Outil : c'est la forme $f(ax+b)$ avec $a = \frac{\pi}{3}$. **Point délicat :** la dérivée du cosinus fait apparaître un signe moins.

CORRIGÉ

Dérivée première. Par la règle de $x \mapsto u(ax+b)$, appliquée au sinus avec $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = 0$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$g'(x) = \frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right).$$

Dérivée seconde. La même règle, appliquée au cosinus, de dérivée $x \mapsto -\sin x$, fait apparaître le facteur $\frac{\pi}{3} \times \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi^2}{9}$. Pour tout réel x :

$$g''(x) = -\frac{\pi^2}{9}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right).$$

Conclusion. Pour tout réel x, $g'(x) = \frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$ et $g''(x) = -\frac{\pi^2}{9}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)$.

3.

En déduire que g est solution d'une équation $y'' + \omega^2 y = 0$; préciser ω.

INDICE

Outil : compare $g''(x)$ et $g(x)$.

CORRIGÉ

Relation. D'après la question 2, pour tout réel x, $g''(x) = -\dfrac{\pi^2}{9}\, g(x)$, c'est-à-dire :

$$g''(x) + \frac{\pi^2}{9}\, g(x) = 0.$$

Identification. C'est la forme $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega^2 = \dfrac{\pi^2}{9}$. Comme $\omega > 0$, $\omega = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{9}}$, soit $\omega = \dfrac{\pi}{3}$.

Conclusion. g est solution de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = \dfrac{\pi}{3}$.

4.

Calculer $g^{(3)}(x)$ et $g^{(4)}(x)$, puis exprimer $g^{(4)}$ à l'aide de g.

INDICE

Outil : applique encore la même règle, ou dérive deux fois la relation de la question 3.

CORRIGÉ

Dérivée troisième. On dérive g'' avec la même règle : pour tout réel x,

$$g^{(3)}(x) = -\frac{\pi^3}{27} \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right).$$

Dérivée quatrième. On dérive encore une fois : pour tout réel x,

$$g^{(4)}(x) = \frac{\pi^4}{81} \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right).$$

Conclusion. Pour tout réel x, $g^{(3)}(x) = -\dfrac{\pi^3}{27} \cos\left(\dfrac{\pi x}{3}\right)$ et $g^{(4)}(x) = \dfrac{\pi^4}{81}\, g(x)$, ce qui s'écrit $g^{(4)} = \dfrac{\pi^4}{81}\, g$.

Exercice 7

Une solution fixée par deux conditions

On considère l'équation différentielle (E) : $9y'' + 4y = 0$, d'inconnue une fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1.

Écrire (E) sous la forme $y'' + \omega^2 y = 0$, avec $\omega > 0$.

INDICE

Outil : divise par le coefficient de y''.

CORRIGÉ

Forme. En divisant les deux membres par 9, (E) équivaut à $y'' + \dfrac{4}{9}y = 0$.

Pulsation. On cherche $\omega > 0$ tel que $\omega^2 = \dfrac{4}{9}$: $\omega = \dfrac{2}{3}$.

Conclusion. (E) s'écrit $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = \dfrac{2}{3}$.

2.

Donner les solutions de (E).

INDICE

Outil : utilise le théorème qui donne les solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$.

CORRIGÉ

Théorème. Pour $\omega > 0$, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$, où α et β sont deux réels.

Conclusion. Avec $\omega = \dfrac{2}{3}$, les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto \alpha\cos\left(\dfrac{2x}{3}\right) + \beta\sin\left(\dfrac{2x}{3}\right)$, avec α et β réels.

3.

Déterminer la solution y de (E) telle que $y(0) = 1$ et $y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -2$.

INDICE

Outil : calcule $\frac{2}{3} \times \frac{3\pi}{4}$.

CORRIGÉ

Forme de y. D'après la question 2, il existe deux réels α et β tels que, pour tout réel x, $y(x) = \alpha\cos\left(\frac{2x}{3}\right) + \beta\sin\left(\frac{2x}{3}\right)$.

Condition en 0. $y(0) = \alpha\cos 0 + \beta\sin 0 = \alpha$; comme $y(0) = 1$, $\alpha = 1$.

Condition en $\frac{3\pi}{4}$. $\frac{2}{3} \times \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\begin{aligned} & y\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ &= \alpha\cos\frac{\pi}{2} + \beta\sin\frac{\pi}{2} \\ &= \beta. \end{aligned}$$

La condition $y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -2$ donne $\beta = -2$.

Conclusion. La solution cherchée est la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{2x}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{2x}{3}\right)$.

4.

Calculer $y'(0)$.

INDICE

Outil : dérive avec la règle de $f(ax+b)$, où $a = \frac{2}{3}$.

CORRIGÉ

Dérivée. Par la règle de $x \mapsto u(ax+b)$, avec $a = \frac{2}{3}$, y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} y'(x) = & -\frac{2}{3}\sin\left(\frac{2x}{3}\right) \\ & -\frac{4}{3}\cos\left(\frac{2x}{3}\right). \end{aligned}$$

Valeur en 0. Comme $\sin 0 = 0$ et $\cos 0 = 1$, $y'(0) = -\frac{2}{3} \times 0 - \frac{4}{3} \times 1$.

Conclusion. $y'(0) = -\frac{4}{3}$.