BURHAN

# Dérivabilité : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/derivabilite/exercices/application

| Chapitre | Palier | Exercices |
|---|---|---|
| Dérivabilité | Application | 10 |

## Exercice 1

### Nombre dérivé par le taux de variation

Dans chaque question, écris le taux $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ pour $h \neq 0$, simplifie-le, puis cherche sa limite quand $h$ tend vers $0$.

**1.**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x$. Calculer $f'(-1)$.

INDICE

**Outil :** développe $f(-1+h)$ avec $(-1+h)^2 = 1 - 2h + h^2$.

**2.**

Soit $g$ la fonction définie pour tout réel $x \neq -2$ par $g(x) = \dfrac{4}{x+2}$. Calculer $g'(0)$.

INDICE

**Outil :** réduis $\dfrac{4}{h+2} - 2$ au même dénominateur avant de diviser par $h$.

**3.**

Soit $k$ la fonction définie sur $\left[-\dfrac{5}{2}, +\infty\right[$ par $k(x) = \sqrt{2x+5}$. Calculer $k'(2)$.

INDICE

**Outil :** multiplie le numérateur $\sqrt{9+2h} - 3$ et le dénominateur par la quantité conjuguée $\sqrt{9+2h} + 3$.

### Exercice 2

## Dérivées usuelles et somme

**1.**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 3x^2 + 7$. Calculer la dérivée de $f$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

**Outil :** dérive terme à terme ; la dérivée d'une constante est nulle.

**2.**

Soit $g$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$. Calculer la dérivée de $g$ sur $]0, +\infty[$.

INDICE

**Outil :** la racine carrée et l'inverse sont dérivables sur $]0, +\infty[$.

**3.**

En déduire $g'(1)$ et $g'(4)$.

INDICE

**Outil :** remplace $x$ dans l'expression de $g'(x)$ trouvée à la question précédente.

### Exercice 3

## Équation d'une tangente

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

**1.**

Écrire l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $2$.

INDICE

**Outil :** calcule $f(2)$ et $f'(2)$, puis remplace dans $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$.

**2.**

Même question au point d'abscisse $0$. Que remarque-t-on ?

INDICE

**Outil :** que vaut $f'(0)$ ?

### Exercice 4

## Dérivée d'un produit

**1.**

Soit $f$ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et l'écrire sous la forme d'un seul quotient.

INDICE

**Outil :** pose $u(x) = x^2 - 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$ ; toutes deux sont dérivables sur $]0, +\infty[$.

**2.**

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 + 3)\sin x$. Calculer $g'(x)$ pour tout réel $x$.

INDICE

**Outil :** la dérivée de $x \mapsto \sin x$ est $x \mapsto \cos x$.

### Exercice 5

## Dérivée d'un quotient et d'un inverse

**1.**

Soit $f$ la fonction définie sur $]-4, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x - 5}{x + 4}$. Calculer $f'(x)$ sur $]-4, +\infty[$.

INDICE

**Outil :** sur cet intervalle, $x + 4 > 0$ ; applique la dérivée d'un quotient.

**2.**

Soit $g$ la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x + 1}$. Calculer $g'(x)$ sur $]-1, +\infty[$.

INDICE

**Outil :** développe le numérateur de la formule, puis regroupe.

**3.**

On considère la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}$. Calculer $h'(x)$ pour tout réel $x$.

INDICE

**Outil :** c'est l'inverse d'une fonction. **Point délicat :** vérifie d'abord que $x^2 + 2x + 2$ ne s'annule pas, en l'écrivant avec $(x + 1)^2$.

### Exercice 6

## Dérivée de la forme f(ax + b)

**1.**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(7x - 2)$. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x$.

INDICE

**Outil :** ici $a = 7$ et $b = -2$, avec la dérivée du cosinus.

**2.**

Soit $g : x \mapsto \sqrt{6 - 3x}$. Calculer $g'(x)$ sur $]-\infty, 2[$.

INDICE

**Outil :** pour $x < 2$, $6 - 3x > 0$ ; le coefficient $a$ vaut $-3$.

**3.**

Soit $h : x \mapsto \dfrac{1}{2x + 7}$. Calculer $h'(x)$ sur $\left]-\dfrac{7}{2}, +\infty\right[$.

INDICE

**Outil :** c'est l'inverse évalué en $2x + 7$, avec $a = 2$.

### Exercice 7

## Puissance et racine d'une fonction

**1.**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3 - x^2)^4$. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x$.

INDICE

**Outil :** pose $u(x) = 3 - x^2$, de dérivée $u'(x) = -2x$.

**2.**

Soit $g : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 1}$. Justifier que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.

INDICE

**Outil :** vérifie que $2x^2 + 1$ est strictement positif pour tout réel $x$.

### Exercice 8

## Dérivées avec sinus et cosinus

Dans tout l'exercice, $x$ est un réel mesuré en radians.

**1.**

Soit $f : x \mapsto 3\sin x - 2\cos x$. Calculer $f'(x)$.

INDICE

**Outil :** attention au signe de la dérivée du cosinus.

**2.**

Soit $g : x \mapsto x\cos x$. Calculer $g'(x)$.

INDICE

**Outil :** c'est un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

**3.**

Soit $h : x \mapsto \sin x \cos x$. Calculer $h'(x)$, puis l'écrire avec $\cos(2x)$.

INDICE

**Outil :** après le calcul, pense à la formule de duplication du cosinus.

### Exercice 9

## Variations à partir de la dérivée

Une fonction $g$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$, $g'(x)=\dfrac{2-x}{x^2}$.

**1.**

Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]0,+\infty[$.

INDICE

**Outil :** le dénominateur $x^2$ est strictement positif ; seul le numérateur décide.

**2.**

En déduire le sens de variation de $g$.

INDICE

**Outil :** pour chaque intervalle, nomme le signe de $g'$ avant de conclure.

**3.**

La fonction $g$ admet-elle un extremum en $2$ ?

INDICE

**Outil :** regarde comment le signe de $g'$ change en $2$.

**4.**

Une autre fonction $k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x)=x^2+1$ pour tout réel $x$. Quel est son sens de variation ?

INDICE

**Outil :** quel est le signe de $x^2+1$ ?

### Exercice 10

## Vérifier une solution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle $y''+16y=0$, d'inconnue une fonction $y$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

**1.**

Vérifier que la fonction $y : x\mapsto 2\cos(4x)-5\sin(4x)$ est solution de cette équation.

INDICE

**Outil :** calcule $y'(x)$ puis $y''(x)$ avec la dérivée de $x\mapsto f(ax+b)$, puis forme $y''(x)+16y(x)$. **Point délicat :** chaque dérivation fait sortir un facteur $4$.

**2.**

La fonction $z : x\mapsto \sin(4x)+x$ est-elle solution de cette équation ?

INDICE

**Outil :** la dérivée seconde de $x\mapsto x$ est nulle.