BURHAN

# Dérivabilité : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/derivabilite/exercices/application

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| Dérivabilité | Application | 10 |

### Exercice 1

## Nombre dérivé par le taux de variation

Dans chaque question, écris le taux $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ pour $h \neq 0$, simplifie-le, puis cherche sa limite quand $h$ tend vers $0$.

#### 1.

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x$. Calculer $f'(-1)$.

INDICE

**Outil :** développe $f(-1+h)$ avec $(-1+h)^2 = 1 - 2h + h^2$.

CORRIGÉ

**Taux de variation en $-1$.** On a $f(-1) = 3 - 2 = 1$. Soit $h$ un réel non nul. Avec $(-1+h)^2 = 1 - 2h + h^2$ :

$$\begin{aligned} &f(-1+h) \\ &= 3 - 6h + 3h^2 - 2 + 2h \\ &= 1 - 4h + 3h^2. \end{aligned}$$

On retranche $f(-1) = 1$ puis on divise par $h \neq 0$ :

$$\begin{aligned} &\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \\ &= \frac{-4h + 3h^2}{h} \\ &= -4 + 3h. \end{aligned}$$

**Limite.** Quand $h$ tend vers $0$, $3h$ tend vers $0$ ; par la limite d'une somme, $-4 + 3h$ tend vers $-4$. Cette limite est un réel.

**Conclusion.** $f$ est dérivable en $-1$ et $f'(-1) = -4$.

### 2.

Soit $g$ la fonction définie pour tout réel $x \neq -2$ par $g(x) = \dfrac{4}{x+2}$. Calculer $g'(0)$.

INDICE

**Outil :** réduis $\dfrac{4}{h+2} - 2$ au même dénominateur avant de diviser par $h$.

CORRIGÉ

**Taux de variation en $0$.** On a $g(0) = \dfrac{4}{2} = 2$. Soit $h$ un réel non nul, différent de $-2$. On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} g(h) - g(0) &= \frac{4}{h+2} - 2 \\ &= \frac{4 - 2(h+2)}{h+2} \\ &= \frac{-2h}{h+2}. \end{aligned}$$

On divise par $h \neq 0$ : le taux vaut $-\dfrac{2}{h+2}$.

**Limite.** Quand $h$ tend vers $0$, le dénominateur $h+2$ tend vers $2$, qui n'est pas nul. Par la limite d'un quotient, le taux tend vers $-\dfrac{2}{2} = -1$.

**Conclusion.** $g$ est dérivable en $0$ et $g'(0) = -1$.

### 3.

Soit $k$ la fonction définie sur $\left[-\dfrac{5}{2}, +\infty\right[$ par $k(x) = \sqrt{2x+5}$. Calculer $k'(2)$.

INDICE

**Outil :** multiplie le numérateur $\sqrt{9+2h} - 3$ et le dénominateur par la quantité conjuguée $\sqrt{9+2h} + 3$ .

CORRIGÉ

**Taux de variation en $2$.** On a $k(2) = \sqrt{9} = 3$. Soit $h \neq 0$ avec $h \geq -\dfrac{9}{2}$, de sorte que $2+h$ appartient à l'ensemble de définition ; alors $k(2+h) = \sqrt{9+2h}$. On multiplie numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée $\sqrt{9+2h} + 3$, strictement positive :

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{9+2h} - 3}{h} \\ &= \frac{(9+2h) - 9}{h\left(\sqrt{9+2h} + 3\right)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{9+2h} + 3}. \end{aligned}$$

**Limite.** Quand $h$ tend vers $0$, $9+2h$ tend vers $9$ ; par la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{9+2h}$ tend vers $3$. Par la limite d'une somme puis d'un quotient, le taux tend vers $\dfrac{2}{3+3} = \dfrac{1}{3}$.

**Conclusion.** $k$ est dérivable en $2$ et $k'(2) = \dfrac{1}{3}$.

### Exercice 2

## Dérivées usuelles et somme

### 1.

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 3x^2 + 7$. Calculer la dérivée de $f$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

**Outil :** dérive terme à terme ; la dérivée d'une constante est nulle.

CORRIGÉ

**Règles.** Les fonctions $x \mapsto x^5$ et $x \mapsto x^2$ ainsi que les constantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Par la dérivée d'une somme et celle du produit d'une fonction par un réel, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**Calcul.** Soit $x$ un réel. On dérive terme à terme, la dérivée de la constante $7$ étant nulle :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 3 \times 2x + 0 \\ &= 5x^4 - 6x. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout réel $x$, $f'(x) = 5x^4 - 6x$.

### 2.

Soit $g$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$. Calculer la dérivée de $g$ sur $]0, +\infty[$.

INDICE

**Outil :** la racine carrée et l'inverse sont dérivables sur $]0, +\infty[$.

CORRIGÉ

**Dérivées usuelles.** Sur $]0, +\infty[$, la racine carrée a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et la fonction inverse a pour dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.

**Calcul.** Par la dérivée d'une somme et d'un produit par un réel, $g$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Soit $x > 0$ :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &\quad - \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2}$.

### 3.

En déduire $g'(1)$ et $g'(4)$.

INDICE

**Outil :** remplace $x$ dans l'expression de $g'(x)$ trouvée à la question précédente.

CORRIGÉ

**En $1$.** D'après la question précédente, avec $\sqrt{1} = 1$ :

$$g'(1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2.$$

**En $4$.** De même, avec $\sqrt{4} = 2$ et $4^2 = 16$ :

$$g'(4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}.$$

**Conclusion.** $g'(1) = 2$ et $g'(4) = \dfrac{9}{16}$.

Exercice 3

## Équation d'une tangente

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

### 1.

Écrire l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $2$.

INDICE

**Outil :** calcule $f(2)$ et $f'(2)$, puis remplace dans $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$.

CORRIGÉ

**Dérivée.** $f$ est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Par la dérivée d'une somme et les dérivées usuelles, pour tout réel $x$, $f'(x) = 3x^2 - 8x$.

**Valeurs en $2$.** $f(2) = 8 - 16 + 1 = -7$ et $f'(2) = 12 - 16 = -4$.

**Tangente.** Elle a pour équation $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$, c'est-à-dire $y = -4(x - 2) - 7$, soit $y = -4x + 1$. Contrôle : le point $(2, -7)$ vérifie bien $-4 \times 2 + 1 = -7$.

**Conclusion.** La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $2$ a pour équation réduite $y = -4x + 1$.

### 2.

Même question au point d'abscisse $0$. Que remarque-t-on ?

INDICE

**Outil :** que vaut $f'(0)$ ?

CORRIGÉ

**Valeurs en $0$.** $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3 \times 0^2 - 8 \times 0 = 0$.

**Tangente.** Elle a pour équation $y = 0 \times (x - 0) + 1$, soit $y = 1$.

**Conclusion.** Au point d'abscisse $0$, la tangente a pour équation $y = 1$. Comme $f'(0) = 0$, elle est parallèle à l'axe des abscisses : c'est une tangente horizontale.

### Exercice 4

## Dérivée d'un produit

#### 1.

Soit $f$ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et l'écrire sous la forme d'un seul quotient.

INDICE

**Outil :** pose $u(x) = x^2 - 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$ ; toutes deux sont dérivables sur $]0, +\infty[$.

CORRIGÉ

**Produit.** Posons $u(x) = x^2 - 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Sur $]0, +\infty[$, $u$ et $v$ sont dérivables, avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Par la dérivée d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$, donc $f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$ :

$$f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2 - 1}{2\sqrt{x}}.$$

**Un seul quotient.** Pour $x > 0$, $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$, donc $2x\sqrt{x} = \dfrac{4x^2}{2\sqrt{x}}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x^2 + x^2 - 1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}}$.

#### 2.

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 + 3)\sin x$. Calculer $g'(x)$ pour tout réel $x$.

INDICE

**Outil :** la dérivée de $x \mapsto \sin x$ est $x \mapsto \cos x$.

CORRIGÉ

**Produit.** Les fonctions $x \mapsto x^2 + 3$ et $x \mapsto \sin x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto \cos x$. Par la dérivée d'un produit, $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**Conclusion.** Pour tout réel $x$, $g'(x) = 2x\sin x + (x^2 + 3)\cos x$.

### Exercice 5

## Dérivée d'un quotient et d'un inverse

### 1.

Soit $f$ la fonction définie sur $]-4,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x-5}{x+4}$. Calculer $f'(x)$ sur $]-4,+\infty[$.

INDICE

**Outil :** sur cet intervalle, $x+4>0$ ; applique la dérivée d'un quotient.

CORRIGÉ

**Quotient.** Posons $u(x)=3x-5$ et $v(x)=x+4$, d'où $u'(x)=3$ et $v'(x)=1$. Pour $x>-4$, $v(x)>0$ : $v$ ne s'annule pas sur $]-4,+\infty[$. Par la dérivée d'un quotient, $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, donc $f$ est dérivable sur cet intervalle.

**Numérateur.** Pour tout $x>-4$ :

$$\begin{aligned}&3(x+4)-(3x-5)\\&=3x+12-3x+5\\&=17.\end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout $x>-4$, $f'(x)=\dfrac{17}{(x+4)^2}$.

### 2.

Soit $g$ la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$. Calculer $g'(x)$ sur $]-1,+\infty[$.

INDICE

**Outil :** développe le numérateur de la formule, puis regroupe.

CORRIGÉ

**Quotient.** Posons $u(x)=x^2-2x$ et $v(x)=x+1$, d'où $u'(x)=2x-2$ et $v'(x)=1$. Pour $x>-1$, $v(x)>0$. Par la dérivée d'un quotient, $g$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$.

**Numérateur.** Pour tout $x>-1$, on développe $u'(x)v(x)-u(x)v'(x)$ :

$$\begin{aligned}&(2x-2)(x+1)-(x^2-2x)\\&=2x^2-2-x^2+2x\\&=x^2+2x-2.\end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout $x>-1$, $g'(x)=\dfrac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$.

### 3.

On considère la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+2}$. Calculer $h'(x)$ pour tout réel $x$.

INDICE

**Outil :** c'est l'inverse d'une fonction. **Point délicat :** vérifie d'abord que $x^2+2x+2$ ne s'annule pas, en l'écrivant avec $(x+1)^2$.

CORRIGÉ

**Le dénominateur ne s'annule pas.** Pour tout réel $x$, $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 \geq 1 > 0$.

**Inverse.** Posons $v(x) = x^2+2x+2$ : $v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, ne s'y annule pas, et $v'(x) = 2x+2$. Par la dérivée de l'inverse d'une fonction, $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$, donc $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**Conclusion.** Pour tout réel $x$, $h'(x) = -\dfrac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}$.

### Exercice 6

## Dérivée de la forme f(ax + b)

### 1.

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(7x - 2)$. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x$.

INDICE

**Outil :** ici $a = 7$ et $b = -2$, avec la dérivée du cosinus.

CORRIGÉ

**Règle.** Si $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto u(ax + b)$ l'est aussi, de dérivée $x \mapsto a\,u'(ax + b)$. On l'applique au cosinus, de dérivée $x \mapsto -\sin x$, avec $a = 7$ et $b = -2$ : $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**Calcul.** Pour tout réel $x$, $f'(x) = 7 \times (-\sin(7x - 2))$.

**Conclusion.** Pour tout réel $x$, $f'(x) = -7\sin(7x - 2)$.

### 2.

Soit $g : x \mapsto \sqrt{6 - 3x}$. Calculer $g'(x)$ sur $]-\infty, 2[$.

INDICE

**Outil :** pour $x < 2$, $6 - 3x > 0$ ; le coefficient $a$ vaut $-3$.

CORRIGÉ

**Règle.** Pour $x < 2$, $6 - 3x > 0$. La racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $t \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$. Par la règle de $x \mapsto u(ax + b)$, avec $a = -3$ et $b = 6$, $g$ est dérivable sur $]-\infty, 2[$.

**Calcul.** Pour tout $x < 2$ :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -3 \times \frac{1}{2\sqrt{6 - 3x}} \\ &= -\frac{3}{2\sqrt{6 - 3x}}. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout $x < 2$, $g'(x) = -\dfrac{3}{2\sqrt{6 - 3x}}$.

### 3.

Soit $h : x \mapsto \dfrac{1}{2x+7}$. Calculer $h'(x)$ sur $\left]-\dfrac{7}{2}, +\infty\right[$.

INDICE

**Outil :** c'est l'inverse évalué en $2x+7$, avec $a = 2$.

CORRIGÉ

**Règle.** Pour $x > -\dfrac{7}{2}$, $2x+7 > 0$. La fonction inverse est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $t \mapsto -\dfrac{1}{t^2}$. Par la règle de $x \mapsto u(ax+b)$, avec $a = 2$ et $b = 7$, $h$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{7}{2}, +\infty\right[$.

**Calcul.** Pour tout $x > -\dfrac{7}{2}$ :

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2 \times \left(-\frac{1}{(2x+7)^2}\right) \\ &= -\frac{2}{(2x+7)^2}. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout $x > -\dfrac{7}{2}$, $h'(x) = -\dfrac{2}{(2x+7)^2}$.

### Exercice 7

## Puissance et racine d'une fonction

#### 1.

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3 - x^2)^4$. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x$.

INDICE

**Outil :** pose $u(x) = 3 - x^2$, de dérivée $u'(x) = -2x$.

CORRIGÉ

**Règle.** Posons $u(x) = 3 - x^2$ : $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -2x$. Par la dérivée d'une puissance, $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$, appliquée avec $n = 4$, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**Calcul.** Pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\,u'(x)\,u(x)^3 \\ &= 4 \times (-2x)(3 - x^2)^3 \\ &= -8x(3 - x^2)^3. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout réel $x$, $f'(x) = -8x(3 - x^2)^3$.

#### 2.

Soit $g : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 1}$. Justifier que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.

INDICE

**Outil :** vérifie que $2x^2 + 1$ est strictement positif pour tout réel $x$.

CORRIGÉ

**Positivité.** Pour tout réel $x$, $x^2 \geq 0$, donc $2x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

**Règle.** Posons $u(x) = 2x^2 + 1$ : $u$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = 4x$. Par la dérivée de la racine carrée d'une fonction, $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, donc $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**Calcul.** Pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 1}} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

**Conclusion.** $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel $x$, $g'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$.

### Exercice 8

## Dérivées avec sinus et cosinus

Dans tout l'exercice, $x$ est un réel mesuré en radians.

**1.**

Soit $f : x \mapsto 3\sin x - 2\cos x$. Calculer $f'(x)$.

INDICE

**Outil :** attention au signe de la dérivée du cosinus.

CORRIGÉ

**Règles.** Le sinus et le cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto -\sin x$. Par la dérivée d'une somme et d'un produit par un réel, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**Calcul.** Soit $x$ un réel. La dérivée de $3\sin x$ est $3\cos x$ ; celle de $-2\cos x$ est $-2 \times (-\sin x) = 2\sin x$.

**Conclusion.** Pour tout réel $x$, $f'(x) = 3\cos x + 2\sin x$.

**2.**

Soit $g : x \mapsto x\cos x$. Calculer $g'(x)$.

INDICE

**Outil :** c'est un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

CORRIGÉ

**Produit.** Posons $u(x) = x$ et $v(x) = \cos x$, d'où $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -\sin x$. Par la dérivée d'un produit, $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned} &g'(x) \\ &= 1 \times \cos x + x(-\sin x) \\ &= \cos x - x\sin x. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout réel $x$, $g'(x) = \cos x - x\sin x$.

**3.**

Soit $h : x \mapsto \sin x \cos x$. Calculer $h'(x)$, puis l'écrire avec $\cos(2x)$.

INDICE

**Outil :** après le calcul, pense à la formule de duplication du cosinus.

CORRIGÉ

**Produit.** Le sinus et le cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto -\sin x$. Par la dérivée d'un produit, $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel $x$, $h'(x) = \cos x \times \cos x + \sin x \times (-\sin x)$, soit :

$$h'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

**Duplication.** Pour tout réel $x$, la formule de duplication du cosinus donne $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

**Conclusion.** Pour tout réel $x$, $h'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$.

### Exercice 9

## Variations à partir de la dérivée

Une fonction $g$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$, $g'(x)=\dfrac{2-x}{x^2}$.

**1.**

Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]0,+\infty[$.

INDICE

**Outil :** le dénominateur $x^2$ est strictement positif ; seul le numérateur décide.

CORRIGÉ

**Dénominateur.** Pour tout $x>0$, $x^2>0$ : $g'(x)$ a le signe de son numérateur $2-x$.

**Numérateur.** $2-x>0$ pour $0<x<2$, $2-x=0$ pour $x=2$ et $2-x<0$ pour $x>2$.

**Conclusion.** Donc $g'(x)>0$ sur $]0,2[$, $g'(2)=0$ et $g'(x)<0$ sur $]2,+\infty[$.

**2.**

En déduire le sens de variation de $g$.

INDICE

**Outil :** pour chaque intervalle, nomme le signe de $g'$ avant de conclure.

CORRIGÉ

On utilise le signe de $g'$ sur chaque intervalle (question précédente).

**Sur $]0,2]$.** $g'(x)>0$ sur $]0,2[$ et $g'(2)=0$ : $g'$ est positive sur $]0,2]$ et ne s'y annule qu'en $2$, donc $g$ est strictement croissante sur $]0,2]$.

**Sur $[2,+\infty[$.** $g'(x)<0$ sur $]2,+\infty[$ et $g'(2)=0$, donc $g$ est strictement décroissante sur $[2,+\infty[$.

**Conclusion.** $g$ est strictement croissante sur $]0,2]$, puis strictement décroissante sur $[2,+\infty[$.

**3.**

La fonction $g$ admet-elle un extremum en $2$ ?

INDICE

**Outil :** regarde comment le signe de $g'$ change en $2$.

CORRIGÉ

**Changement de signe.** $g'$ s'annule en $2$ en passant de positive à négative.

**Conclusion.** Oui : $g(2)$ est un maximum local de $g$. D'après la question précédente, $g(x)\leq g(2)$ pour tout $x>0$ : c'est même le maximum de $g$ sur $]0,+\infty[$.

### 4.

Une autre fonction $k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x) = x^2 + 1$ pour tout réel $x$. Quel est son sens de variation ?

INDICE

**Outil :** quel est le signe de $x^2 + 1$ ?

CORRIGÉ

**Signe.** Pour tout réel $x$, $x^2 \geq 0$, donc $k'(x) = x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

**Conclusion.** La dérivée $k'$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $k$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

### Exercice 10

## Vérifier une solution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$, d'inconnue une fonction $y$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

**1.**

Vérifier que la fonction $y : x \mapsto 2\cos(4x) - 5\sin(4x)$ est solution de cette équation.

INDICE

**Outil :** calcule $y'(x)$ puis $y''(x)$ avec la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$, puis forme $y''(x) + 16y(x)$. **Point délicat :** chaque dérivation fait sortir un facteur $4$.

CORRIGÉ

**Dérivées.** Par la règle de $x \mapsto u(ax+b)$ avec $a = 4$, la dérivée de $x \mapsto \cos(4x)$ est $x \mapsto -4\sin(4x)$ et celle de $x \mapsto \sin(4x)$ est $x \mapsto 4\cos(4x)$. Par la dérivée d'une somme, $y$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel $x$ : $y'(x) = -8\sin(4x) - 20\cos(4x)$ et $y''(x) = -32\cos(4x) + 80\sin(4x)$.

**Vérification.** Comme $-32 = -16 \times 2$ et $80 = -16 \times (-5)$, on reconnaît $-16$ fois l'expression de $y(x)$ : pour tout réel $x$,

$$y''(x) = -16\,y(x).$$

Ainsi $y''(x) + 16y(x) = 0$ pour tout réel $x$.

**Conclusion.** La fonction $y$ est solution de l'équation $y'' + 16y = 0$.

**2.**

La fonction $z : x \mapsto \sin(4x) + x$ est-elle solution de cette équation ?

INDICE

**Outil :** la dérivée seconde de $x \mapsto x$ est nulle.

CORRIGÉ

**Dérivées.** Pour tout réel $x$, $z'(x) = 4\cos(4x) + 1$ et $z''(x) = -16\sin(4x)$, car la dérivée de la constante $1$ est nulle.

**Calcul.** Pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned} &z''(x) + 16z(x) \\ &= -16\sin(4x) \\ &\quad + 16\left(\sin(4x) + x\right) \\ &= 16x. \end{aligned}$$

Ainsi $z''(x) + 16z(x) = 16x$ ; pour $x = 1$, cette quantité vaut $16$, qui n'est pas nul.

**Conclusion.** La fonction $z$ n'est pas solution de l'équation $y'' + 16y = 0$.