BURHAN

Dérivabilité

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/derivabilite/cours

Chapitre	Semestre
Dérivabilité	Semestre 2

Quelle est la pente d'une courbe en un point ?

On lâche une bille du haut d'un immeuble. Au bout de t secondes, elle a parcouru $d(t) = 5t^2$ mètres.

Entre les instants 1 et $1+h$, elle parcourt $d(1+h) - d(1)$ mètres en h secondes. Sa vitesse moyenne sur cette durée vaut donc, en mètres par seconde :

$$\frac{d(1+h) - d(1)}{h}.$$

Mais quelle est sa vitesse **à l'instant** $t = 1$ exactement ?

Devine : Une vitesse à un instant

Pour $h = 0{,}1$, puis $0{,}01$, puis $0{,}001$, la vitesse moyenne vaut $10{,}5$, puis $10{,}05$, puis $10{,}005$ mètres par seconde. Quand h devient très petit, de quel réel se rapproche-t-elle ?

A. De 5, la distance parcourue en une seconde.

Faux.

5 mètres est la distance $d(1)$, pas une vitesse.

B. De 10.

Juste.

Juste : l'écart à 10 est divisé par 10 à chaque fois.

C. De 0, car la durée h devient nulle.

Faux.

La distance parcourue devient petite elle aussi : leur quotient reste proche de 10.

D. D'aucun réel : elle grandit sans fin.

Faux.

Les valeurs données diminuent et se resserrent près de 10.

Correction

Soit h un réel non nul. On développe :

$$\begin{aligned} &d(1+h) - d(1) \\ &= 5(1 + 2h + h^2) - 5 \\ &= 10h + 5h^2. \end{aligned}$$

En divisant par h, la vitesse moyenne vaut donc $10 + 5h$.

> D'après la limite d'une somme, elle tend vers 10 quand h tend vers 0. La vitesse à l'instant $t = 1$ est donc 10 mètres par seconde.
>
> Ce nombre s'appellera le nombre dérivé de d en 1.

Dans ce chapitre, tu donnes un sens précis à la pente d'une courbe en un point : le nombre dérivé. Tu en tires la tangente et des valeurs approchées.

Tu apprends ensuite à calculer des dérivées sans revenir au taux.

Le signe de la dérivée te donne alors les variations et les extremums d'une fonction. Enfin, tu résous l'équation d'un ressort qui oscille.

Rappels : taux de variation, droite, forme 0/0

Rappel. Soit f une fonction, et a, b deux réels distincts où elle est définie. Le **taux de variation** de f entre a et b est :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

C'est le coefficient directeur de la droite qui passe par $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

Une droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation réduite $y = mx + p$. Le réel m est son coefficient directeur, et p son ordonnée à l'origine.

> **Vérifie : Une équation réduite**
>
> Une droite passe par le point $A(2, -1)$ et a pour coefficient directeur 3. Quelle est son équation réduite ?
>
> **A.** $y = 3x - 1$
> **Faux.**
> -1 est l'ordonnée de A, pas l'ordonnée à l'origine : en $x = 2$, cette droite donne 5.
>
> **B.** $y = 3x + 5$
> **Faux.**
> Erreur de signe : en $x = 2$, on obtiendrait 11, pas -1.
>
> **C.** $y = -x + 3$
> **Faux.**
> Le coefficient directeur est le nombre qui multiplie x : ici 3, pas -1.
>
> **D.** $y = 3x - 7$
> **Juste.**
> Juste : $3 \times 2 - 7 = -1$.
>
> **Correction**
> L'équation s'écrit $y = 3x + p$, où le réel p reste à trouver.

> Le point A est sur la droite : $-1 = 3 \times 2 + p$, d'où $p = -7$.
>
> L'équation réduite est donc $y = 3x - 7$.

Rappel. Au chapitre « Limite d'une fonction numérique », tu as levé des formes « $\frac{0}{0}$ ».

Par exemple, en 1, le quotient $\frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ est de cette forme. Or $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Pour tout réel $x \neq 1$, on a donc :

$$\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = x + 2.$$

D'après la limite d'un polynôme en un point, sa limite en 1 est 3.

Tout ce chapitre repose sur ce geste.

Nombre dérivé

Une sécante qui pivote

En clair. Sur la courbe de f, fixe le point $A(a, f(a))$ et prends un point $M(x, f(x))$, avec $x \neq a$.

La droite (AM) passe par ces deux points de la courbe : c'est une **sécante**. Son coefficient directeur est le taux :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Fais glisser M vers A : la sécante pivote autour de A. Si son coefficient directeur se stabilise, la courbe a une pente en A.

> **Devine : Des sécantes de plus en plus courtes**
>
> Sur la courbe de $x \mapsto x^2$, on fixe $A(1, 1)$. Pour $x = 1{,}1$, puis $x = 1{,}01$, la sécante (AM) a pour coefficient directeur $2{,}1$, puis $2{,}01$. Vers quelle pente semble-t-elle se stabiliser ?
>
> **A.** Vers 1, l'ordonnée de A.
> **Faux.**
> L'ordonnée de A est une hauteur, pas une pente.
>
> **B.** Vers 0, car $x - 1$ tend vers 0.
> **Faux.**
> Le numérateur tend aussi vers 0 : c'est une forme « $\frac{0}{0}$ ».
>
> **C.** Vers 2.
> **Juste.**
> Juste : le coefficient directeur vaut $x + 1$, proche de 2.
>
> **D.** Vers aucune : en $x = 1$, on divise par 0.
> **Faux.**

On ne prend jamais $x = 1$: on regarde x proche de 1.

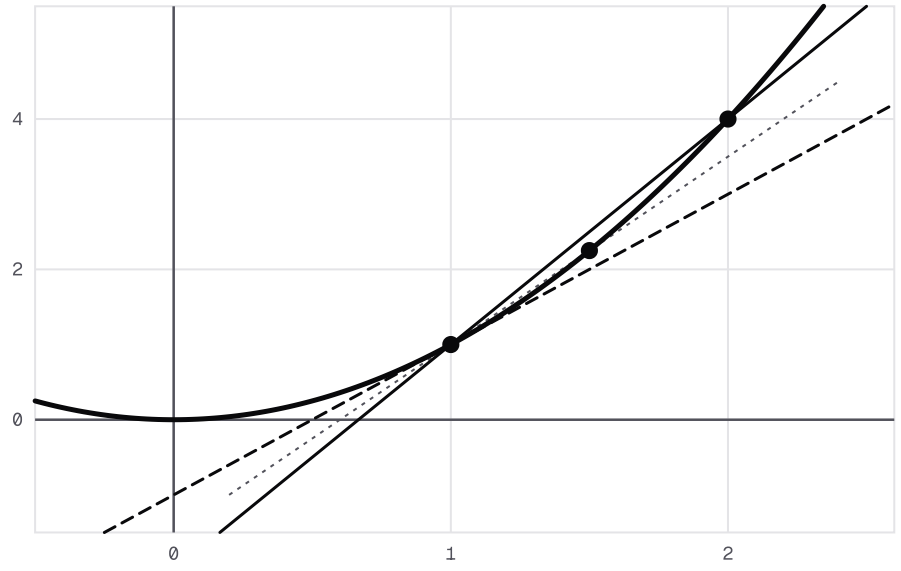
Correction

Soit x un réel, $x \neq 1$. Le coefficient directeur de (AM) vaut :

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= x + 1.\end{aligned}$$

D'après la limite d'un polynôme en un point, ce taux tend vers 2 quand x tend vers 1.

Les sécantes se rapprochent donc de la droite qui passe par A et qui a pour coefficient directeur 2.



Sur la parabole de x ↦ x², les sécantes (AM₁) et (AM₂) issues de A(1, 1), de coefficients directeurs 3 puis 5/2, pivotent quand le second point glisse vers A. Elles se rapprochent de la droite de pente 2 qui passe par A, en pointillés.

La définition et la méthode

Définition : Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

- On dit que f est **dérivable en** a si le taux de variation $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite **finie** quand x tend vers a.
- Cette limite s'appelle le **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$: $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
- En écrivant $x = a + h$, on a aussi $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Méthode : calculer un nombre dérivé par la définition

1. **Écris** le taux $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, pour $h \neq 0$, ou $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, pour $x \neq a$.
2. **Simplifie** ce quotient : développe, factorise ou utilise la quantité conjuguée, jusqu'à faire disparaître la forme « $\dfrac{0}{0}$ ».
3. **Cherche** sa limite quand h tend vers 0, ou quand x tend vers a, et nomme la règle employée.
4. **Conclus** : une limite réelle donne f dérivable en a et la valeur de $f'(a)$; sinon, f n'est pas dérivable en a.

Exemple : Exemple guidé : un polynôme, avec h

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x$. Cherchons le nombre dérivé de f en 2.

Taux. Soit h un réel non nul. On développe :

$$\begin{aligned} f(2+h) &= (2+h)^2 + 3(2+h) \\ &= 10 + 7h + h^2. \end{aligned}$$

Comme $f(2) = 10$, le taux vaut :

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{7h+h^2}{h} \\ &= 7 + h. \end{aligned}$$

Limite. D'après la limite d'une somme, $7 + h$ tend vers 7 quand h tend vers 0.

Conclusion. La fonction f est dérivable en 2 et $f'(2) = 7$.

Avec x, puis à toi

Exemple : un quotient, avec x

Soit g la fonction définie pour tout réel $x \neq 0$ par $g(x) = \dfrac{3}{x}$. Cherchons $g'(1)$.

Taux. Soit x un réel, avec $x \neq 0$ et $x \neq 1$. On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} &= \frac{\dfrac{3}{x} - 3}{x-1} \\ &= \frac{3-3x}{x(x-1)} \\ &= \frac{-3(x-1)}{x(x-1)} \\ &= -\frac{3}{x}. \end{aligned}$$

Limite. D'après la limite d'un quotient, ce taux tend vers -3 quand x tend vers 1.

Conclusion. La fonction g est dérivable en 1 et $g'(1) = -3$.

À toi : Deux nombres dérivés

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 2x^2 - x$, et u la fonction définie pour $x \neq -1$ par $u(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

Calcule par la définition le nombre dérivé de k en -1, puis celui de u en 1. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris le taux $\dfrac{k(-1+h) - k(-1)}{h}$, puis développe le numérateur.

Indice 2

Développe $2(-1+h)^2$, puis regroupe les termes selon les puissances de h ; pour u, réduis $\dfrac{1}{2+h} - \dfrac{1}{2}$ au même dénominateur.

Indice 3

Point délicat : $(-1+h)^2 = 1 - 2h + h^2$, et $-(-1+h) = 1 - h$.

Réponse

Nombre dérivé de k en -1. Soit h un réel non nul. On développe :

$$\begin{aligned} & k(-1+h) \\ &= 2(1 - 2h + h^2) \\ &\quad + 1 - h \\ &= 3 - 5h + 2h^2. \end{aligned}$$

Comme $k(-1) = 3$, le taux vaut :

$$\frac{-5h + 2h^2}{h} = -5 + 2h.$$

D'après la limite d'une somme, il tend vers -5 quand h tend vers 0 : $k'(-1) = -5$.

Nombre dérivé de u en 1. Soit h un réel non nul, avec $h \neq -2$. On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} & \frac{u(1+h) - u(1)}{h} \\ &= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{h} \times \frac{-h}{2(2+h)} \\ &= -\frac{1}{2(2+h)}. \end{aligned}$$

D'après la limite d'un quotient, il tend vers $-\dfrac{1}{4}$ quand h tend vers 0 : $u'(1) = -\dfrac{1}{4}$.

Conclusion. On trouve $k'(-1) = -5$ et $u'(1) = -\dfrac{1}{4}$.

Dérivabilité à droite et à gauche

Une courbe en deux morceaux

En clair. Une courbe peut être faite de deux morceaux qui se rejoignent en un point A.

Juste à gauche de A, la pente est celle du morceau de gauche. Juste à droite, c'est celle du morceau de droite.

On étudie donc le taux de variation de chaque côté de a, séparément.

Devine : Un V et ses deux côtés

La courbe de $x \mapsto |x-2|$ a la forme d'un V, de sommet $S(2,0)$. Quelles sont les pentes de ses deux côtés, près de S ?

A. 1 à droite et 1 à gauche.

Faux.
À gauche de 2, la courbe descend : sa pente y est négative.

B. 1 à droite et -1 à gauche.

Juste.
Juste : à droite, la courbe est la droite $y = x - 2$; à gauche, la droite $y = 2 - x$.

C. 0 des deux côtés, car le sommet est en bas.

Faux.
Les deux côtés du V sont des portions de droites inclinées, pas horizontales.

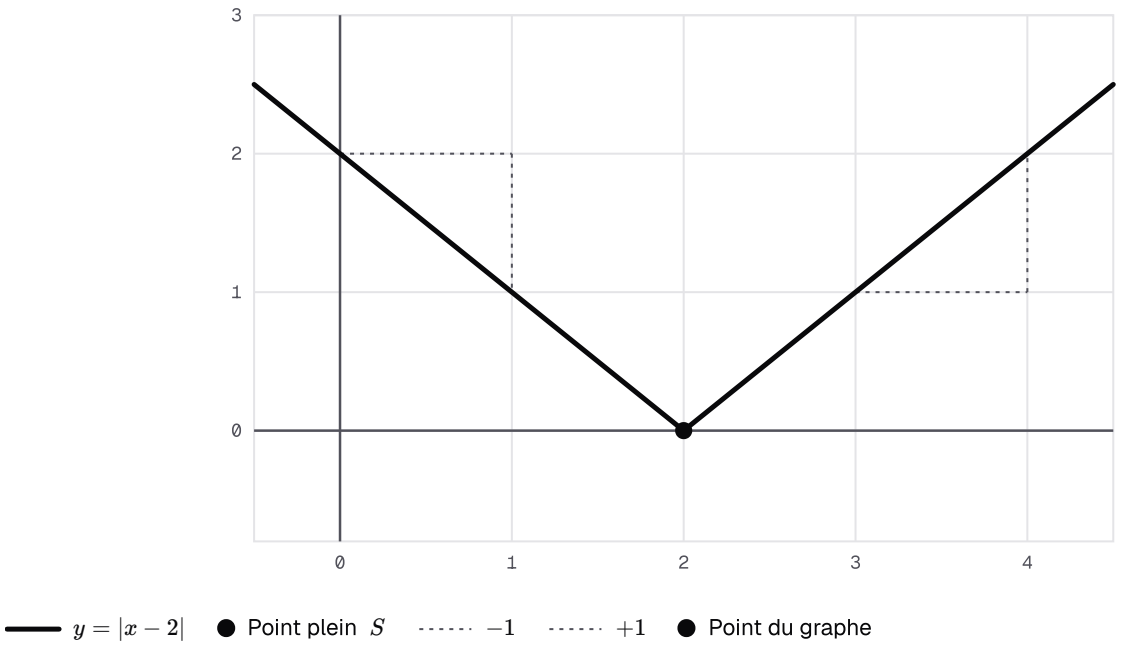
D. -1 à droite et 1 à gauche.

Faux.
Vers la droite, la courbe monte : la pente à droite est positive.

Correction
Pour $x \geq 2$, on a $x - 2 \geq 0$, donc $|x-2| = x - 2$: la pente vaut 1.

Pour $x \leq 2$, on a $|x-2| = 2 - x$: la pente vaut -1.

Le V a donc deux pentes différentes en son sommet. La définition suivante donne un nom à chacune.



Le V de x ↦ |x − 2|, de sommet S(2, 0) : à droite de S, on avance de 1 et on monte de 1, pente 1 ; à gauche, on avance de 1 et on descend de 1, pente −1. Deux pentes différentes se rencontrent en S.

Définition : Dérivabilité à droite, à gauche

Soit f une fonction, a un réel et r un réel strictement positif.

- Si f est définie sur $[a, a + r[$ et si $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite **finie** quand x tend vers a à droite, on dit que f est **dérivable à droite** en a. Cette limite est le nombre dérivé à droite, noté $f'_d(a)$.
- Si f est définie sur $]a - r, a]$ et si ce taux admet une limite finie quand x tend vers a à gauche, on dit que f est **dérivable à gauche** en a. Cette limite est le nombre dérivé à gauche, noté $f'_g(a)$.

Exemple : une valeur absolue en 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x - 2|$; on a $f(2) = 0$.

À droite. Pour $x > 2$, on a $|x - 2| = x - 2$, donc :

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x - 2}{x - 2} = 1.$$

Ce taux est constant : sa limite à droite est 1, donc $f'_d(2) = 1$.

À gauche. Pour $x < 2$, on a $|x - 2| = 2 - x$, donc :

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{2 - x}{x - 2} = -1.$$

Ce taux est constant : sa limite à gauche est -1, donc $f'_g(2) = -1$.

Conclusion. La fonction f est dérivable à droite et à gauche en 2, mais les deux nombres dérivés diffèrent.

Le lien avec la dérivabilité

Pourquoi est-ce vrai ? Le nombre dérivé en a est une limite : celle du taux de variation.

Au chapitre « Limite d'une fonction numérique », une fonction a une limite en a exactement quand elle a, de chaque côté de a, une limite, et que ces deux limites coïncident.

Il suffit d'appliquer ce fait au taux.

Propriété : Dérivabilité et dérivabilité à droite et à gauche

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant le réel a. Alors f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a avec $f'_d(a) = f'_g(a)$. Dans ce cas, $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Démonstration

Étape 1. Pour $x \neq a$, on note $T(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Par définition, f est dérivable en a si T a une limite finie en a ; elle est dérivable à droite, ou à gauche, si T a une limite finie à droite, ou à gauche, en a.

Étape 2. D'après la propriété du chapitre « Limite d'une fonction numérique » qui relie une limite aux limites à droite et à gauche, T a une limite finie ℓ en a si et seulement si T a en a une limite à droite et une limite à gauche, toutes deux égales à ℓ.

Étape 3. Traduite avec les nombres dérivés, cette équivalence est l'énoncé, et alors $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a) = \ell$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une seule idée suffit : le nombre dérivé est la limite d'un taux. Tout ce que tu sais des limites à droite et à gauche s'applique donc au taux.

Pour savoir si f est dérivable en a, on calcule séparément $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$, puis on les compare.

Vérifie : L'argument de la preuve

Quel résultat fait tout le travail dans la preuve de cette propriété ?

A. Le lien entre une limite et ses deux côtés.

Juste.
Juste : il s'applique au taux de variation.

B. La limite d'un produit de deux fonctions.
Faux.
Aucun produit n'apparaît : on étudie un seul quotient, le taux.

C. La quantité conjuguée d'une racine carrée.
Faux.
Elle sert à simplifier certains taux, pas à relier les deux côtés.

D. L'équation réduite d'une droite non verticale.
Faux.
La preuve ne parle d'aucune droite : seulement de limites.

Correction
La preuve note $T(x)$ le taux de variation entre a et x. Être dérivable en a, c'est que T ait une limite finie en a.

D'après la propriété des limites à droite et à gauche, cela revient à deux limites latérales finies et égales.

Ces deux limites sont $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$.

Un point de raccord

Exemple : deux raccords en 1

Soit u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On a $u(1) = v(1) = 1$.

À gauche de 1. Pour $x < 1$, les deux fonctions valent x^2, et les deux taux valent :

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1.$$

D'après la limite d'un polynôme en un point, $u'_g(1) = v'_g(1) = 2$.

À droite de 1. Pour $x > 1$, les taux de u et de v valent respectivement :

$$\frac{(2x - 1) - 1}{x - 1} = 2$$

et

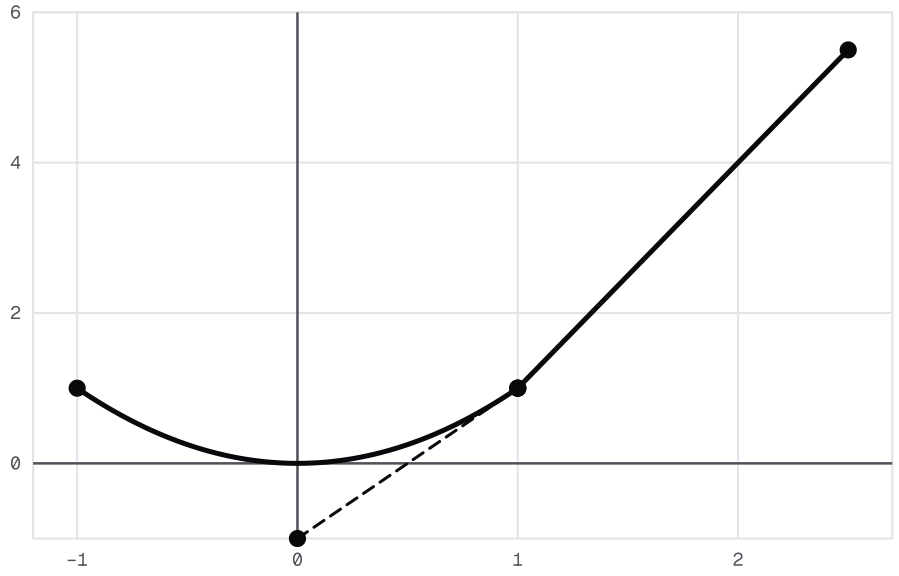
$$\frac{(3x-2)-1}{x-1} = 3.$$

Ils sont constants : $u'_d(1) = 2$ et $v'_d(1) = 3$.

Conclusion. D'après le lien entre dérivabilité et dérivabilité à droite et à gauche, u est dérivable en 1, avec $u'(1) = 2$. Mais v ne l'est pas, car $v'_d(1) \neq v'_g(1)$.

Méthode : étudier la dérivabilité en un point de raccord

1. **Écris** le taux $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pour $x > a$, avec l'expression de f valable à droite, et cherche sa limite à droite.
2. **Recommence** à gauche, pour $x < a$, avec l'expression valable à gauche.
3. **Compare** : deux limites réelles égales donnent f dérivable en a. Deux limites réelles différentes donnent deux pentes différentes : f n'est pas dérivable en a.
4. **Conclus** en écrivant $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$, ou la valeur de $f'(a)$.



La courbe de v près du point de raccord A(1, 1), avec la demi-tangente à gauche en pointillés. Compare la pente de chaque côté de A.

À toi : Un raccord à étudier

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Étudie la dérivabilité de k en 1. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule $k(1)$, puis le taux à droite avec $2x+1$ et le taux à gauche avec $-x^2+4x$.
Indice 2
À gauche, factorise $-x^2+4x-3=-(x-1)(x-3)$.
Indice 3
Point délicat : $k(1)$ se calcule avec l'expression valable pour $x \leq 1$.

Réponse
Valeur en 1. L'expression valable pour $x \leq 1$ donne $k(1)=-1+4=3$.

À droite. Pour $x>1$:

$$\begin{aligned}\frac{k(x)-k(1)}{x-1} &= \frac{2x-2}{x-1}\\ &= 2.\end{aligned}$$

Ce taux est constant : $k'_d(1)=2$.

À gauche. Pour $x<1$, on factorise le numérateur :

$$\begin{aligned}&\frac{k(x)-k(1)}{x-1}\\ &= \frac{-x^2+4x-3}{x-1}\\ &= \frac{-(x-1)(x-3)}{x-1}\\ &= 3-x.\end{aligned}$$

D'après la limite d'un polynôme en un point, ce taux tend vers 2 quand x tend vers 1 : $k'_g(1)=2$.

Conclusion. Les deux nombres sont égaux. D'après le lien entre dérivabilité et dérivabilité à droite et à gauche, k est dérivable en 1 et $k'(1)=2$.

Tangente et demi-tangentes

Zoomer sur une courbe

En clair. Prends une loupe et zoome sur une courbe autour d'un de ses points A. À chaque zoom, l'arc de courbe paraît moins courbé.

À très fort grossissement, il se confond presque avec une droite qui passe par A.

Cette droite est la position limite des sécantes : sa pente est le nombre dérivé en a.

Devine : La droite que la courbe épouse

Soit $f(x)=x^3-2x$, et $A(1,-1)$ sur sa courbe. Pour $h=0{,}1$, puis $0{,}01$, le taux $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ vaut $1{,}31$, puis $1{,}0301$. Quelle droite la courbe semble-t-elle épouser près de A ?

A. La droite d'équation $y = -1$.

Faux.

Elle passe par A, mais sa pente vaut 0 : les taux se rapprochent de 1.

B. La droite d'équation $y = x$.

Faux.

Sa pente vaut bien 1, mais elle ne passe pas par A : en $x = 1$, elle donne 1.

C. La droite d'équation $y = 3x - 4$.

Faux.

Elle passe par A, mais sa pente vaut 3, loin des taux calculés.

D. La droite d'équation $y = x - 2$.

Juste.

Juste : elle passe par A et sa pente vaut 1.

Correction

Les taux se rapprochent de 1 : on conjecture $f'(1) = 1$.

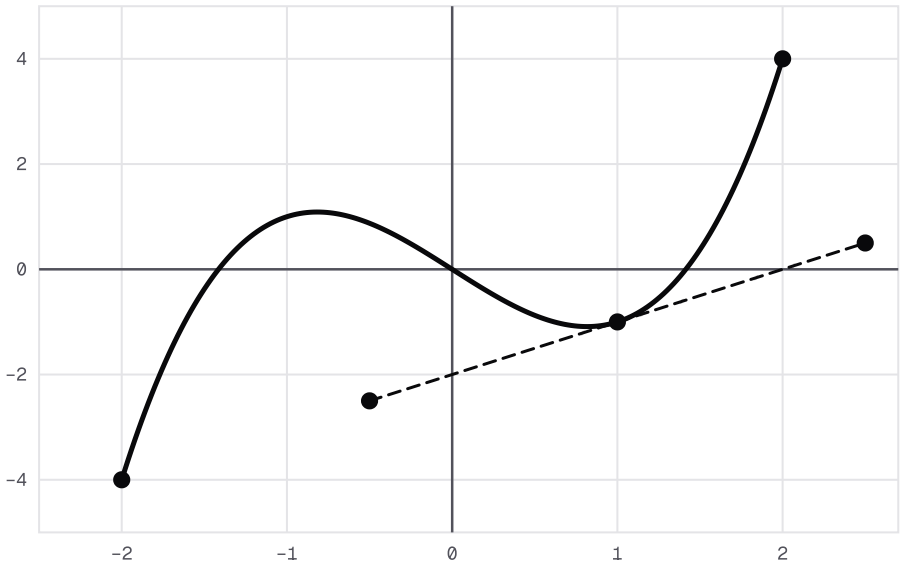
La droite cherchée passe par $A(1, -1)$ et a pour coefficient directeur 1. Son équation est $y = 1 \times (x - 1) - 1$, soit $y = x - 2$.

L'exemple qui suit le justifie par le calcul.

Définition : Tangente à une courbe

Soit f une fonction dérivable en un réel a, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère. La **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ est la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$. Elle a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



La courbe de f(x) = x³ − 2x et sa tangente au point A(1, −1). Près de A, la courbe et la droite se confondent presque.

Écrire l'équation

Méthode : écrire l'équation d'une tangente

1. **Vérifie** que f est dérivable en a.
2. **Calcule** $f(a)$ et le nombre dérivé $f'(a)$.
3. **Remplace** ces deux nombres dans $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
4. **Développe** pour obtenir la forme $y = mx + p$, puis **contrôle** que le point $A(a, f(a))$ vérifie l'équation.

Exemple : la tangente au point d'abscisse 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x$, et $a = 1$. On a $f(1) = -1$.

Nombre dérivé. Soit h un réel non nul. On développe :

$$f(1 + h) = -1 + h + 3h^2 + h^3.$$

Le taux vaut donc $1 + 3h + h^2$. D'après la limite d'un polynôme en un point, il tend vers 1 : $f'(1) = 1$.

Tangente. La tangente au point $A(1, -1)$ a pour équation $y = 1 \times (x - 1) + (-1)$, soit $y = x - 2$.

Contrôle. En $x = 1$, on trouve bien $y = -1$.

Demi-tangentes et demi-tangente verticale

Définition : Demi-tangentes

Soit f une fonction définie en un réel a, $\mathcal{C}_f$ sa courbe et $A(a, f(a))$.

- Si f est dérivable à droite en a, la **demi-tangente à droite** à $\mathcal{C}_f$ en A est la demi-droite d'origine A, de coefficient directeur $f'_d(a)$, formée des points d'abscisse $x \geq a$. On définit de même la **demi-tangente à gauche**, de coefficient directeur $f'_g(a)$, formée des points d'abscisse $x \leq a$.
- Si le taux $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand x tend vers a à droite (ou à gauche), f n'est pas dérivable à droite (ou à gauche) en a, et $\mathcal{C}_f$ admet en A une **demi-tangente verticale**, portée par la droite d'équation $x = a$.

Exemple : la racine carrée en 0

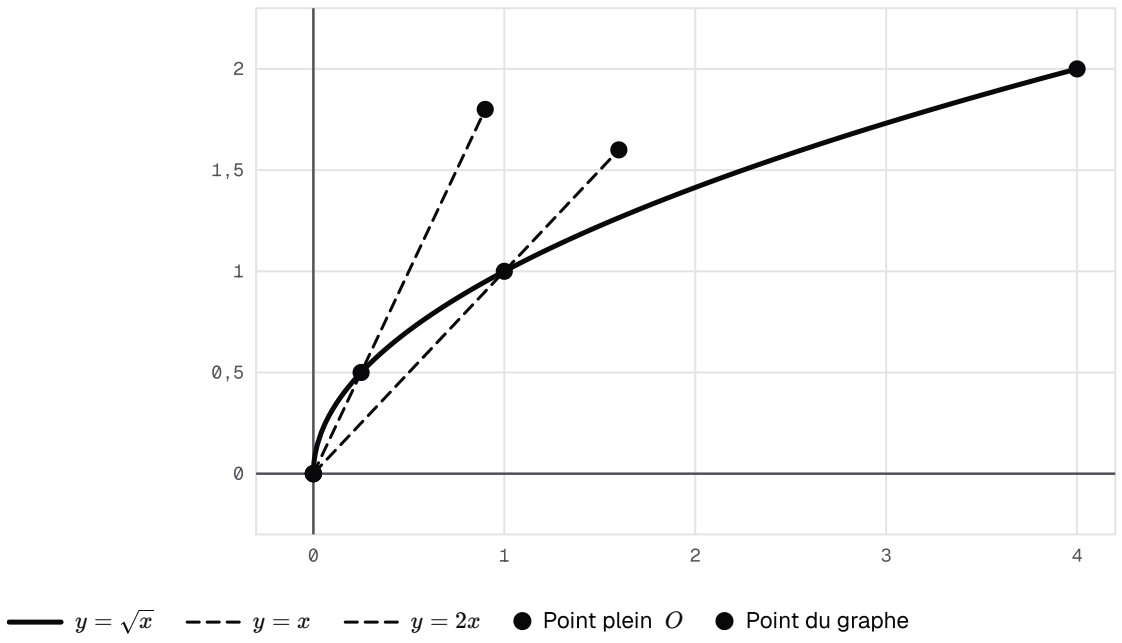
La fonction racine carrée est définie sur $[0, +\infty[$. Pour $h > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} &= \frac{\sqrt{h}}{h} \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}}.\end{aligned}$$

Quand h tend vers 0 à droite, $\sqrt{h}$ tend vers 0 en restant positif. D'après la limite d'un quotient, le taux tend vers $+\infty$.

Ainsi, la fonction racine carrée n'a pas de nombre dérivé à droite en 0.

Sa courbe admet en l'origine une demi-tangente verticale : la partie de l'axe des ordonnées où $y \geq 0$.



La courbe de la racine carrée près de l'origine O, avec deux sécantes issues de O. Que deviennent les sécantes quand le second point se rapproche de O ?

Attention : définie ne veut pas dire dérivable

✗ « La fonction racine carrée est définie en 0. Elle est donc dérivable en 0. »

✓ Une fonction peut être définie en un réel sans y être dérivable.

En 0, le taux de la racine carrée vaut $\frac{1}{\sqrt{h}}$ et tend vers $+\infty$: aucun nombre dérivé n'existe. La courbe a en O une demi-tangente verticale, et aucune tangente de coefficient directeur réel.

Calcule toujours la limite du taux avant de conclure.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Une tangente à écrire

Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x^2 - 4x + 1$.

Calcule $p'(3)$ par la définition, puis écris l'équation de la tangente à sa courbe au point d'abscisse 3. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule $p(3)$, puis développe $p(3+h)$ pour $h \neq 0$.
Indice 2
Simplifie le numérateur du taux : tous ses termes contiennent h. Remplace ensuite dans $y = p'(3)(x-3) + p(3)$.
Indice 3

Point délicat : $p(3) = -2$ est négatif ; garde ce signe en développant.

Réponse
Valeur en 3. On a $p(3) = 9 - 12 + 1 = -2$.

Nombre dérivé. Soit h un réel non nul. On développe :

$$\begin{aligned} & p(3+h) \\ &= 9 + 6h + h^2 \\ &\quad - 12 - 4h + 1 \\ &= -2 + 2h + h^2. \end{aligned}$$

Le taux vaut donc $\dfrac{2h + h^2}{h} = 2 + h$. D'après la limite d'une somme, il tend vers 2 : $p'(3) = 2$.

Tangente. Elle a pour équation $y = 2(x - 3) - 2$, soit $y = 2x - 8$.

Contrôle. $2 \times 3 - 8 = -2$: le point de contact vérifie l'équation.

Remarque : Coin devoir : rédiger une équation de tangente

En devoir, annonce chaque nombre avant de remplacer. Écris :

« f est dérivable en 1, avec $f(1) = -1$ et $f'(1) = 1$. La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, soit $y = x - 2$. »

Termine par le contrôle du point de contact.

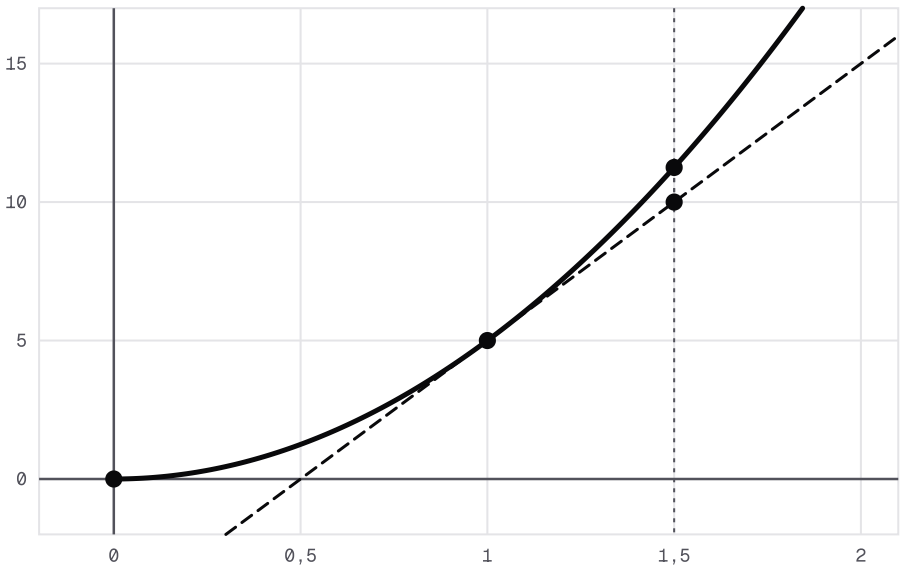
Approximation affine

Remplacer la courbe par sa tangente

En clair. Près du point de contact, la tangente colle à la courbe. Pour un petit h, on peut donc remplacer $f(a + h)$ par l'ordonnée du point de la tangente d'abscisse $a + h$. Cette ordonnée vaut $f(a) + f'(a)\,h$.

Pourquoi est-ce vrai ? Le taux $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$. Leur différence tend donc vers 0.

En la multipliant par h, on obtient l'erreur commise.



La bille : courbe de d(t) = 5t² et sa tangente au point A(1, 5), de coefficient directeur 10. Avec h = 1/2, le point de la courbe est à la hauteur d(3/2), celui de la tangente à la hauteur d(1) + 10h ; le segment vertical qui les sépare est l'erreur commise.

Devine : La bille, un peu plus tard

Pour la bille de l'entrée, $d(1) = 5$ et $d'(1) = 10$. Quelle valeur l'approximation $d(1) + d'(1)\,h$ donne-t-elle pour $d(1{,}02)$?

A. $5{,}02$

Faux.

Tu as ajouté h sans le multiplier par $d'(1) = 10$.

B. $5{,}202$

Faux.

C'est la valeur exacte $5 \times 1{,}02^2$, pas l'approximation demandée.

C. $10{,}02$

Faux.

Tu as ajouté h à $d'(1)$: il faut partir de $d(1) = 5$.

D. $5{,}2$

Juste.

Juste : $5 + 10 \times 0{,}02 = 5{,}2$.

Correction

Ici $a = 1$ et $h = 0{,}02$. L'approximation affine donne :

$$\begin{aligned} d(1{,}02) &\approx 5 + 10 \times 0{,}02 \\ &= 5{,}2. \end{aligned}$$

La valeur exacte est $5 \times 1{,}02^2 = 5{,}202$.

L'erreur, $0{,}002$, est bien plus petite que h.

La propriété et son idée

Propriété : Approximation affine

Soit f une fonction dérivable en un réel a. Pour tout réel $h \neq 0$ tel que f soit définie en $a+h$, on pose $\varphi(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$. Alors $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$ et

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h + h\,\varphi(h).$$

Pour h proche de 0, le nombre $f(a) + f'(a)\,h$ est une **approximation affine** de $f(a+h)$: on écrit $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)\,h$.

Démonstration

Étape 1. Par définition du nombre dérivé, écrite avec h, le taux $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0. D'après la limite d'une somme, $\varphi(h)$ tend vers $f'(a) - f'(a) = 0$.

Étape 2. Pour $h \neq 0$, on multiplie l'égalité qui définit $\varphi(h)$ par h : $h\,\varphi(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)\,h$, d'où l'égalité annoncée.

Étape 3. L'écart entre $f(a+h)$ et $f(a) + f'(a)\,h$ vaut $h\,\varphi(h)$; divisé par h, il donne $\varphi(h)$, qui tend vers 0 : l'écart est petit devant h quand h est proche de 0.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve donne un nom à l'écart entre le taux et $f'(a)$: c'est $\varphi(h)$, qui tend vers 0.

En multipliant par h, on obtient une égalité exacte :

$$\begin{aligned} f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h \\ + h\,\varphi(h). \end{aligned}$$

L'erreur de l'approximation est le terme $h\,\varphi(h)$. Elle est petite, même comparée à h.

Vérifie : L'erreur, en chiffres

Pour la bille, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(h) &= \frac{d(1+h)-d(1)}{h} - 10 \\ &= 5h. \end{aligned}$$

Que vaut l'erreur $h\,\varphi(h)$ pour $h = 0{,}02$?

A. $0{,}1$

Faux.

C'est $\varphi(0{,}02) = 5 \times 0{,}02$; il faut encore multiplier par h.

B. $0{,}02$

Faux.

C'est h lui-même ; l'erreur est bien plus petite.

C. $0{,}002$

Juste.

Juste : $0{,}02 \times 0{,}1 = 0{,}002$.

D. $0{,}2$

Faux.

Ce serait l'erreur pour $h = 0{,}2$, car $h\,\varphi(h) = 5h^2$.

Correction

D'après l'entrée, le taux vaut $10 + 5h$, donc $\varphi(h) = 5h$.

Pour $h = 0{,}02$, on a $\varphi(h) = 0{,}1$, puis $h\,\varphi(h) = 0{,}002$.

C'est exactement l'écart $5{,}202 - 5{,}2$ trouvé plus haut.

Exemple : le sinus d'un petit angle

Calculatrice en radians, cherchons une valeur approchée de $\sin(0{,}05)$.

Nombre dérivé. On prend la fonction sinus, $a = 0$ et $h = 0{,}05$. On a $\sin 0 = 0$, et le taux $\dfrac{\sin h - \sin 0}{h}$ vaut $\dfrac{\sin h}{h}$.

D'après la limite usuelle de $\dfrac{\sin x}{x}$ en 0, il tend vers 1 : le nombre dérivé du sinus en 0 vaut 1.

Approximation. Donc :

$$\sin(0{,}05) \approx 0 + 1 \times 0{,}05 = 0{,}05.$$

La calculatrice affiche $0{,}049979$ à 10^{-6} près : l'erreur est inférieure à 10^{-4}.

Estimer un nombre

Méthode : estimer un nombre par l'approximation affine

1. **Choisis** une fonction f et un réel a proche du nombre visé, où $f(a)$ et $f'(a)$ se calculent à la main.
2. **Écris** le nombre sous la forme $f(a + h)$, avec h petit.
3. **Calcule** $f(a) + f'(a)\,h$: c'est l'approximation affine.

4. **Compare**, si tu peux, avec la valeur de la calculatrice.

Exemple : Exemple guidé : la racine de 9,06

On prend la fonction racine carrée, $a = 9$ et $h = 0{,}06$; on a $\sqrt{9} = 3$.

Nombre dérivé. Pour $h \neq 0$ et $h > -9$, la quantité conjuguée donne :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{9+h}-3}{h} &= \frac{(9+h)-9}{h\left(\sqrt{9+h}+3\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{9+h}+3}.\end{aligned}$$

D'après la limite de la racine carrée d'une fonction, puis d'un quotient, ce taux tend vers $\frac{1}{6}$. Le nombre dérivé en 9 vaut donc $\frac{1}{6}$.

Approximation. Ainsi :

$$\sqrt{9{,}06} \approx 3 + \frac{0{,}06}{6} = 3{,}01.$$

La calculatrice affiche $3{,}009983$ à 10^{-6} près.

À toi : Deux valeurs approchées

Donne une valeur approchée de $1{,}03^3$, puis de $\frac{1}{0{,}98}$, par l'approximation affine. Compare avec la calculatrice. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Prends la fonction cube, puis la fonction inverse, avec $a = 1$ dans les deux cas.

Indice 2

Calcule chaque nombre dérivé en 1 par la définition : écris le taux en h, puis simplifie-le avant de chercher sa limite.

Indice 3

Point délicat : $0{,}98 = 1 + h$ avec $h = -0{,}02$, un nombre négatif.

Réponse

Le cube. Pour $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}&\frac{(1+h)^3-1}{h} \\ &= 3 + 3h + h^2.\end{aligned}$$

D'après la limite d'une somme, ce taux tend vers 3. Avec $h = 0{,}03$:

$$\begin{aligned}1{,}03^3 &\approx 1 + 3 \times 0{,}03 \\ &= 1{,}09.\end{aligned}$$

La calculatrice donne $1{,}092727$.

L'inverse. Pour $h \neq 0$ et $h \neq -1$, on a $\dfrac{1}{1+h} - 1 = \dfrac{-h}{1+h}$, donc le taux de la fonction inverse en 1 vaut $-\dfrac{1}{1+h}$.

D'après la limite d'un quotient, il tend vers -1. Avec $h = -0{,}02$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{0{,}98} \\ &\approx 1 + (-1) \times (-0{,}02) \\ &= 1{,}02. \end{aligned}$$

La calculatrice donne $1{,}020408$ à 10^{-6} près.

Fonction dérivée ; dérivées usuelles

Un nombre dérivé qui change

En clair. Reprends la bille de l'entrée. Par le même calcul de taux, on trouve sa vitesse à plusieurs instants :

instant t	1	2	3
vitesse à l'instant t	10	20	30

Le nombre dérivé change avec l'instant. Il dépend de t : c'est lui-même une fonction de t.

Devine : Une vitesse à tout instant

D'après ce tableau, quelle expression semble donner la vitesse de la bille à l'instant t ?

A. $10t$

Juste.
Juste : $10 \times 1 = 10$, $10 \times 2 = 20$ et $10 \times 3 = 30$.

B. $5t^2$

Faux.
C'est la distance parcourue $d(t)$, pas la vitesse : en $t = 1$, elle vaut 5.

C. 10

Faux.
La vitesse change avec t : elle vaut 20 en $t = 2$.

D. $5t$

Faux.
En $t = 1$, on obtiendrait 5, pas 10.

Correction
Soit t un instant et h un réel non nul. Le taux de variation de d entre t et $t + h$ vaut :

$$\begin{aligned}&\frac{5(t+h)^2-5t^2}{h}\\&=\frac{10th+5h^2}{h}\\&=10t+5h.\end{aligned}$$

D'après la limite d'une somme, il tend vers $10t$. La vitesse vaut donc $10t$ à tout instant t.

La fonction $t \mapsto 10t$ s'appellera la fonction dérivée de d.

La fonction dérivée

Définition : Fonction dérivée

Soit f une fonction et I un intervalle.

- Si I est ouvert, on dit que f est **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout réel de I.
- Si I contient l'une de ses bornes ou les deux, comme $[a,b]$, $[a,+\infty[$ ou $]a,b]$, on dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel de I qui n'est pas une borne, à droite en la borne gauche de I et à gauche en la borne droite de I, lorsque ces bornes appartiennent à I.
- La fonction qui à tout x de I associe $f'(x)$ s'appelle la **fonction dérivée** de f sur I ; on la note f'. En une borne, $f'(x)$ désigne le nombre dérivé à droite ou à gauche.

Exemple : un nombre ou une fonction ?

Pour la bille, la fonction dérivée est $d' : t \mapsto 10t$. Le nombre $d'(2) = 20$ est sa valeur en 2.

Ne confonds pas les deux : d' est une **fonction**, et $d'(2)$ est un **nombre**.

Écrire $d'(t) = 10t$ est permis : pour chaque t, c'est le nombre dérivé en t.

Les dérivées usuelles

En clair. Refaire le calcul du taux pour chaque fonction serait long. Pour les fonctions de référence, il est fait une fois pour toutes.

Les résultats tiennent dans l'énoncé suivant : apprends-le par cœur.

Propriété : Dérivées des fonctions usuelles

Soit c un réel et n un entier naturel, $n \geq 2$. Le réel x étant mesuré en radians pour le sinus et le cosinus :

- $x \mapsto c$ et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 1$;
- $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto n\,x^{n-1}$;

- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$;
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;
- $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto -\sin x$.

Démonstration

Idée de la preuve. Pour chaque fonction, on écrit le taux de variation entre a et $a+h$, on le simplifie, puis on cherche sa limite quand h tend vers 0. Pour x^2 : $\dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a + h$, qui tend vers $2a$. Pour $\sqrt{x}$, avec $a > 0$, la quantité conjuguée donne $\dfrac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$, qui tend vers $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$. Pour le sinus, la formule d'addition donne $\sin a \times \dfrac{\cos h - 1}{h} + \cos a \times \dfrac{\sin h}{h}$; comme $\dfrac{\cos h - 1}{h} = -h \times \dfrac{1 - \cos h}{h^2}$, les limites trigonométriques usuelles et la limite d'un produit montrent que ce taux tend vers $\cos a$. Les cas de x^n, de $\dfrac{1}{x}$ et du cosinus, du même type, ne sont pas détaillés ici.

Exemple : lire les dérivées usuelles

D'après les dérivées des fonctions usuelles :

- $x \mapsto x^5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto 5x^4$;
- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et son nombre dérivé en 2 vaut $-\dfrac{1}{2^2} = -\dfrac{1}{4}$;
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et son nombre dérivé en 9 vaut $\dfrac{1}{2\sqrt{9}} = \dfrac{1}{6}$, comme pour $\sqrt{9{,}06}$;
- le sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, et son nombre dérivé en $\dfrac{\pi}{3}$ vaut $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

Vérifier, puis à toi

Vérifie : Le cosinus en pi sur 2

Quel est le nombre dérivé de la fonction cosinus en $\dfrac{\pi}{2}$?

A. -1

Juste.

Juste : $-\sin\dfrac{\pi}{2} = -1$.

B. 0

Faux.

C'est $\cos\dfrac{\pi}{2}$, la valeur de la fonction, pas son nombre dérivé.

C. 1

Faux.

Le signe manque : la dérivée du cosinus est $x \mapsto -\sin x$.

D. $-\dfrac{\pi}{2}$

Faux.

Le nombre dérivé se calcule avec le sinus, pas en recopiant l'angle.

Correction

D'après les dérivées des fonctions usuelles, le cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto -\sin x$.

En $\dfrac{\pi}{2}$, le nombre dérivé vaut donc $-\sin\dfrac{\pi}{2} = -1$.

À toi : Lire les dérivées usuelles

Donne la dérivée de $x \mapsto x^7$ sur $\mathbb{R}$. Donne ensuite les nombres dérivés de $x \mapsto \sqrt{x}$ en 16, de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ en -3 et du sinus en π. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Toutes ces fonctions figurent dans les dérivées des fonctions usuelles.

Indice 2

Écris d'abord la fonction dérivée, puis remplace x par le réel demandé.

Indice 3

Point délicat : $\dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$, qui contient -3 ; et $(-3)^2 = 9$ est positif.

Réponse

Puissance. D'après les dérivées des fonctions usuelles, $x \mapsto x^7$ a pour dérivée $x \mapsto 7x^6$ sur $\mathbb{R}$.

Racine carrée. Sur $]0, +\infty[$, la dérivée de la racine carrée est $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$: en 16, elle vaut $\dfrac{1}{8}$.

Inverse. Sur $]-\infty, 0[$, la dérivée de la fonction inverse est $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$: en -3, elle vaut $-\dfrac{1}{9}$.

Sinus. Le nombre dérivé du sinus en π est $\cos\pi = -1$.

Somme, produit, inverse, quotient

Un rectangle qui grandit

En clair. Un rectangle a pour côtés u et v, qui changent avec le temps. Son aire vaut uv.

Si u grandit un peu, l'aire gagne une mince bande de longueur v. Si v grandit un peu, elle gagne une bande de longueur u. Il reste un tout petit coin, que l'on peut négliger.

La vitesse de l'aire mêle donc les deux côtés.

Devine : La vitesse d'une aire

À un instant donné, le côté u mesure 4 et grandit à la vitesse 1. Le côté v mesure 3 et grandit à la vitesse 2. À quelle vitesse l'aire grandit-elle à cet instant ?

A. 2, le produit des vitesses.

Faux.

Les vitesses seules ne suffisent pas : une bande longue s'élargit en apportant plus d'aire.

B. 3, la somme des vitesses.

Faux.

Chaque vitesse doit être multipliée par la longueur de sa bande.

C. 11, avec les deux bandes.

Juste.

Juste : $1 \times 3 + 4 \times 2 = 11$.

D. 12, l'aire du rectangle.

Faux.

12 est l'aire à cet instant, pas sa vitesse de croissance.

Correction

La bande de longueur $v = 3$ s'élargit à la vitesse 1 : elle apporte 3.

La bande de longueur $u = 4$ s'élargit à la vitesse 2 : elle apporte 8.

L'aire grandit donc à la vitesse $3 + 8 = 11$. C'est la forme $u'v + uv'$ de la règle qui suit.

Somme et produit

Propriété : Dérivée d'une somme, d'un produit

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et k un réel. Alors $u + v$, ku et uv sont dérivables sur I et

$$(u+v)' = u' + v', \qquad (ku)' = k\,u', \qquad (uv)' = u'v + uv'.$$

Démonstration

Idée de la preuve. Soit a un réel de I. Le taux de variation de $u + v$ entre a et x est la somme des taux de u et de v : la limite d'une somme conclut. Pour le produit, on écrit $\dfrac{u(x)v(x) - u(a)v(a)}{x - a} = \dfrac{u(x) - u(a)}{x - a} \times v(x) + u(a) \times \dfrac{v(x) - v(a)}{x - a}$. Comme $v(x) = v(a) + (x - a) \times \dfrac{v(x) - v(a)}{x - a}$, la limite d'un produit montre que $v(x)$ tend vers $v(a)$. Les limites d'un produit et d'une somme donnent alors $u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$. Le cas de ku est un produit par une fonction constante ; ces vérifications ne sont pas détaillées.

Exemple : la dérivée d'un produit

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 3)(2x - 5)$. On pose $u : x \mapsto x^2 + 3$ et $v : x \mapsto 2x - 5$.

Les facteurs. D'après les dérivées des fonctions usuelles et la dérivée d'une somme, u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2$.

La règle. D'après la dérivée d'un produit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(2x-5) \\ &\quad + 2(x^2+3) \\ &= 4x^2 - 10x + 2x^2 + 6 \\ &= 6x^2 - 10x + 6. \end{aligned}$$

Contrôle. En développant, $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 15$, qui donne la même dérivée.

Inverse et quotient

Propriété : Dérivée de l'inverse, d'un quotient

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, avec $v(x) \neq 0$ pour tout x de I. Alors $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur I et

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Démonstration

Idée de la preuve. Soit a un réel de I. Le taux de variation de $\dfrac{1}{v}$ entre a et x s'écrit $-\dfrac{v(x)-v(a)}{x-a} \times \dfrac{1}{v(x)\,v(a)}$. Comme $v(x)$ tend vers $v(a) \neq 0$, ce que l'on établit comme pour le produit, les limites d'un produit et d'un quotient donnent $-\dfrac{v'(a)}{v(a)^2}$. Pour le quotient, on écrit $\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$ et l'on applique la dérivée d'un produit : $u' \times \dfrac{1}{v} + u \times \left(-\dfrac{v'}{v^2}\right) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. La limite de $v(x)$ n'est pas détaillée ici.

Exemple : la dérivée d'un quotient

Soit g la fonction définie pour $x \neq 5$ par $g(x) = \dfrac{4x-3}{x-5}$. Sur $]5, +\infty[$, le dénominateur ne s'annule pas.

On pose $u : x \mapsto 4x - 3$ et $v : x \mapsto x - 5$; on a $u'(x) = 4$ et $v'(x) = 1$.

D'après la dérivée d'un quotient, pour tout x de $]5, +\infty[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{4(x-5) - (4x-3) \times 1}{(x-5)^2} \\ &= \frac{4x - 20 - 4x + 3}{(x-5)^2} \\ &= -\frac{17}{(x-5)^2}. \end{aligned}$$

Le même calcul vaut sur $]-\infty, 5[$.

Exemple : la dérivée de la tangente

Sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos x \neq 0$ et $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. On note $t(x) = \tan x$.

On pose $u : x \mapsto \sin x$ et $v : x \mapsto \cos x$. D'après les dérivées des fonctions usuelles, $u'(x) = \cos x$ et $v'(x) = -\sin x$, donc :

$$\begin{aligned} &u'(x)v(x) - u(x)v'(x) \\ &= \cos^2 x + \sin^2 x. \end{aligned}$$

D'après la dérivée d'un quotient, pour tout x de cet intervalle :

$$t'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on obtient $t'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

La méthode et un piège

Méthode : calculer une dérivée

1. **Reconnais** la forme : somme, produit, inverse, quotient ; plus loin, $x \mapsto f(ax+b)$, puissance ou racine.
2. **Précise** l'intervalle où la règle s'applique : dénominateur non nul, quantité sous la racine strictement positive.
3. **Applique** la règle en la nommant, avec les dérivées des fonctions usuelles.
4. **Simplifie**, puis **factorise** si tu cherches le signe.

Attention : produit et quotient

✗ « La dérivée de uv est $u'v'$. »

✓ Prends u et v toutes deux égales à $x \mapsto x$. Le produit uv est $x \mapsto x^2$, de dérivée $x \mapsto 2x$. Pourtant $u'(x) \times v'(x) = 1 \times 1 = 1$.

La dérivée d'un produit est $u'v + uv'$. De même, la dérivée de $\frac{u}{v}$ n'est pas $\frac{u'}{v'}$: applique la règle du quotient.

Exemple : Exemple guidé : dériver, puis factoriser

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$. Pour tout réel x, $x^2+4 > 0$: h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dériver. D'après la dérivée d'un quotient, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{2(x^2+4) - 2x \times 2x}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{8 - 2x^2}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{2(2-x)(2+x)}{(x^2+4)^2}. \end{aligned}$$

Factoriser pour le signe. Le dénominateur est strictement positif : $h'(x)$ a le signe de $(2-x)(2+x)$.

Vérifie : La dérivée d'un inverse

Quelle est la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4}$ sur $\mathbb{R}$?

A. $x \mapsto \dfrac{1}{2x}$

Faux.

C'est l'inverse de la dérivée de x^2+4 : la règle de l'inverse ne dit pas cela.

B. $x \mapsto -\dfrac{1}{(x^2+4)^2}$

Faux.

Il manque le facteur $2x$, la dérivée de x^2+4, au numérateur.

C. $x \mapsto \dfrac{2x}{(x^2+4)^2}$

Faux.

Le signe moins de la règle de l'inverse a disparu.

D. $x \mapsto -\dfrac{2x}{(x^2+4)^2}$

Juste.

Juste : c'est $-\dfrac{v'}{v^2}$, avec $v : x \mapsto x^2+4$.

Correction

Pour tout réel x, $x^2+4 > 0$. On pose $v : x \mapsto x^2+4$, d'où $v'(x) = 2x$.

D'après la dérivée de l'inverse, la dérivée est $x \mapsto -\dfrac{2x}{(x^2+4)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Un produit, un quotient

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = (2x-1)(x^2+x)$, et m la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$ par $m(x) = \frac{x-5}{3x+1}$.

Calcule la dérivée de k sur $\mathbb{R}$, puis celle de m sur $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

La première fonction est un produit, la seconde un quotient : nomme la règle.

Indice 2

Pour le produit, les dérivées des facteurs sont 2 et $2x+1$; pour le quotient, 1 et 3.

Indice 3

Point délicat : dans le quotient, développe $-(x-5)\times 3$ sans oublier le signe moins devant chaque terme.

Réponse

Le produit. D'après la dérivée d'un produit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & k'(x) \\ &= 2(x^2+x) \\ &\quad + (2x-1)(2x+1) \\ &= 6x^2 + 2x - 1. \end{aligned}$$

Le quotient. Sur $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$, $3x+1 \neq 0$. D'après la dérivée d'un quotient, pour tout x de cet intervalle :

$$\begin{aligned} & m'(x) \\ &= \frac{(3x+1) - 3(x-5)}{(3x+1)^2} \\ &= \frac{16}{(3x+1)^2}. \end{aligned}$$

Remarque : Coin devoir : rédiger un calcul de dérivée

En devoir, l'intervalle et la règle précèdent toujours le calcul. Rédige ainsi :

« Pour tout x de $]5, +\infty[$, $x-5 \neq 0$. D'après la dérivée d'un quotient, g est dérivable sur $]5, +\infty[$ et $g'(x) = -\frac{17}{(x-5)^2}$. »

Une dérivée sans intervalle est une réponse incomplète.

Dérivée de f(ax + b), d'une puissance, d'une racine

Une fonction affine à l'intérieur

Devine : Un coefficient qui ressort

Soit $g : x \mapsto (3x)^2 = 9x^2$. D'après la dérivée d'un produit par un réel, $g'(x) = 18x$. Avec $f : x \mapsto x^2$, on a aussi $f'(3x) = 6x$. Quel lien relie $g'(x)$ et $f'(3x)$?

A. $g'(x) = f'(3x)$

Faux.

$18x$ et $6x$ diffèrent dès que $x \neq 0$.

B. $g'(x) = 3f'(3x)$

Juste.

Juste : $3 \times 6x = 18x$.

C. $g'(x) = 9f'(3x)$

Faux.

On trouverait $54x$, pas $18x$.

D. $g'(x) = f'(3x) + 3$

Faux.

On trouverait $6x + 3$, pas $18x$.

Correction

On a $3f'(3x) = 3 \times 6x = 18x$, c'est-à-dire $g'(x)$.

Le coefficient 3 de $3x$ réapparaît en facteur. La propriété suivante dit que c'est toujours le cas pour $x \mapsto f(ax + b)$.

Propriété : Dérivée de x ↦ f(ax + b)

Soit a et b deux réels, avec $a \neq 0$, et f une fonction dérivable sur un intervalle J. On note I l'intervalle des réels x tels que $ax + b$ appartient à J. Alors la fonction $g : x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur I et, pour tout x de I,

$$g'(x) = a\, f'(ax + b).$$

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Le coefficient a dit à quelle vitesse $ax + b$ parcourt l'axe quand x avance.

Exemple : un sinus et un cosinus

Un sinus. Soit s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $s(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$. Le sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$.

D'après la dérivée de $x \mapsto f(ax + b)$, avec $a = 2$, pour tout réel x :

$$s'(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Un cosinus. De même, avec $a = 5$, la dérivée de $x \mapsto \cos(5x + 1)$ est $x \mapsto -5\sin(5x + 1)$ sur $\mathbb{R}$.

Un piège, puis les puissances

Attention : le coefficient a

✗ « La dérivée de $x \mapsto \sqrt{5 - 2x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{5 - 2x}}$. »

✓ Ici $a = -2$: il ne faut pas l'oublier. D'après la dérivée de $x \mapsto f(ax + b)$, sur $\left]-\infty, \dfrac{5}{2}\right[$, la dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{-2}{2\sqrt{5 - 2x}}$, et :

$$\frac{-2}{2\sqrt{5 - 2x}} = -\frac{1}{\sqrt{5 - 2x}}.$$

La fonction décroît : un résultat positif aurait dû t'alerter.

Propriété : Dérivée d'une puissance et d'une racine carrée

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel, $n \geq 2$.

- La fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$.
- Si $u(x) > 0$ pour tout x de I, la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Démonstration

Idée de la preuve. Pour u^n, on raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 2$, la dérivée d'un produit donne $(u \times u)' = u'u + uu' = 2u'u$. Si $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$, la dérivée du produit $u^n \times u$ donne $n\,u'\,u^{n-1} \times u + u^n \times u' = (n + 1)\,u'\,u^n$. Pour $\sqrt{u}$, la quantité conjuguée écrit le taux sous la forme $\dfrac{u(x) - u(a)}{x - a} \times \dfrac{1}{\sqrt{u(x)} + \sqrt{u(a)}}$; on utilise que $\sqrt{u(x)}$ tend vers $\sqrt{u(a)}$, par la limite de la racine carrée d'une fonction. Ce dernier point n'est pas détaillé ici.

Exemple : une puissance

Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = (x^2 - 4x)^3$. La fonction $u : x \mapsto x^2 - 4x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = 2x - 4$.

D'après la dérivée d'une puissance, avec $n = 3$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} p'(x) &= 3(2x - 4)(x^2 - 4x)^2 \\ &= 6(x - 2)(x^2 - 4x)^2. \end{aligned}$$

Une racine, puis à toi

Exemple : une racine

Soit q la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $q(x) = \sqrt{x^2+5}$. Pour tout réel x, $x^2+5 > 0$.

D'après la dérivée d'une racine carrée, avec $u : x \mapsto x^2+5$ et $u'(x) = 2x$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} q'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}. \end{aligned}$$

À toi : Trois formes à reconnaître

Calcule, en précisant l'intervalle, la dérivée de $r(x) = (1-3x)^4$, de $w(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$ et de $c(x) = \cos(4x-1)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
r est une puissance, w une racine d'un trinôme, c un cosinus de $4x-1$.
Indice 2
Pour w, vérifie le signe du trinôme : son discriminant vaut $4-12=-8$.
Indice 3
Point délicat : dans r, la dérivée de $1-3x$ vaut -3, un nombre négatif.

Réponse
La puissance. D'après la dérivée d'une puissance, avec $u : x \mapsto 1-3x$ et $u'(x) = -3$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &r'(x) \\ &= 4 \times (-3)(1-3x)^3 \\ &= -12(1-3x)^3. \end{aligned}$$

La racine. Le trinôme x^2+2x+3 a un discriminant négatif et un coefficient dominant positif : il est strictement positif sur $\mathbb{R}$. D'après la dérivée d'une racine carrée, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+3}} \\ &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}. \end{aligned}$$

Le cosinus. D'après la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$, avec $a=4$: $c'(x) = -4\sin(4x-1)$ pour tout réel x.

Signe de la dérivée et variations

Des pentes et des variations

En clair. Parcours une courbe de gauche à droite. Là où elle monte, ses tangentes montent aussi : leurs coefficients directeurs sont positifs. Là où elle descend, ils sont négatifs.

Or ces coefficients directeurs sont les nombres dérivés. Le signe de $f'(x)$ devrait donc dire si f monte ou descend.

Devine : Une dérivée négative

Sur un intervalle I, on sait que $f'(x) < 0$ pour tout x. Que prévois-tu pour f sur I ?

A. $f(x)$ est négatif pour tout x de I.
Faux.
Le signe de f' renseigne sur les variations de f, pas sur le signe de $f(x)$.

B. f est croissante sur I.
Faux.
Des tangentes de pente négative descendent : la courbe descend.

C. f est constante sur I.
Faux.
Il faudrait $f'(x) = 0$ partout sur I.

D. f est décroissante sur I.
Juste.
Juste : la courbe descend, comme ses tangentes.

Correction
Des coefficients directeurs négatifs signifient des tangentes qui descendent. La courbe descend : f est décroissante sur I.

Le théorème suivant le confirme ; il dit même que f est strictement décroissante.

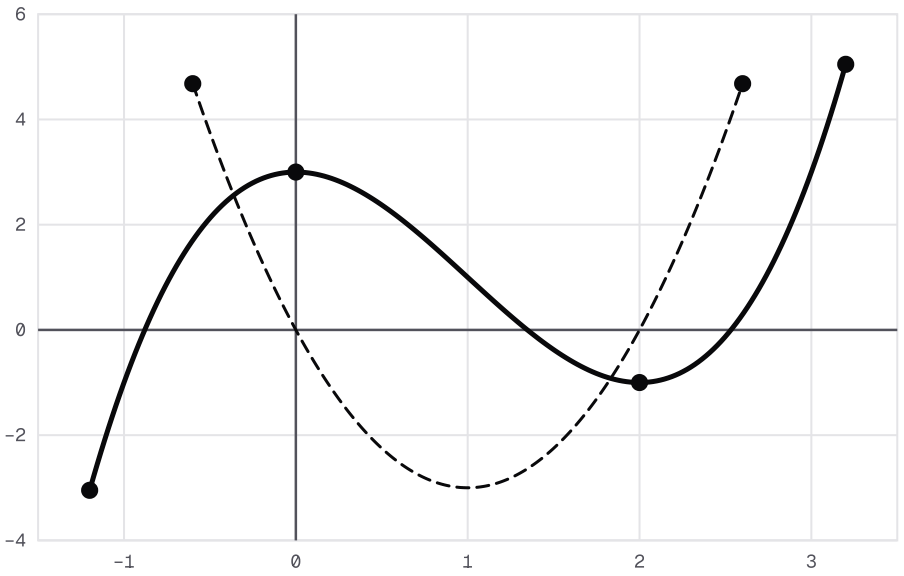
Théorème : Signe de la dérivée et variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I.
- f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I.
- f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout x de I.
- Si $f'(x) > 0$ pour tout x de I, sauf en un nombre fini de réels où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I. Si $f'(x) < 0$ pour tout x de I, sauf en un nombre fini de réels où f' s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Il traduit en calcul la lecture des pentes des tangentes.



La courbe de f(x) = x³ − 3x² + 3, en trait plein, et celle de sa dérivée, en pointillés. Où la courbe de f monte-t-elle ? Où celle de f′ est-elle au-dessus de l'axe des abscisses ?

Un piège, puis la méthode

Attention : les variations se lisent sur un intervalle

✗ « La dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est négative en tout réel non nul. Donc cette fonction est décroissante sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. »

✓ Elle est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, séparément.

Mais $-1 < 1$ et $\dfrac{1}{-1} < \dfrac{1}{1}$: elle n'est pas décroissante sur la réunion. Le théorème ne s'applique que sur un **intervalle**.

Méthode : dresser un tableau de variations

1. **Détermine** l'ensemble de définition et l'intervalle où f est dérivable.
2. **Calcule** $f'(x)$ en nommant la règle, puis **factorise**.
3. **Étudie le signe** de $f'(x)$: tableau de signes, signe d'un trinôme.
4. **Conclus** sur chaque intervalle en nommant le signe de f'. **Complète** le tableau par les valeurs de f aux bornes finies et aux points où f' s'annule ; aux bornes infinies, laisse la case vide.

Exemple : Exemple guidé : un tableau de variations

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

Dérivée. D'après les dérivées des fonctions usuelles et la dérivée d'une somme, pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$

Tableau.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f		$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

Lecture.

- $f'(x) > 0$ sur $]-\infty, 0[$ et $f'(0) = 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$.
- $f'(x) < 0$ sur $]0, 2[$ et $f'(0) = f'(2) = 0$, donc f est strictement décroissante sur $[0, 2]$.
- $f'(x) > 0$ sur $]2, +\infty[$ et $f'(2) = 0$, donc f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

Pourquoi les bornes 0 et 2 sont-elles incluses ? f est dérivable sur chacun de ces intervalles, bornes comprises. Sur chacun, f' garde un signe strict, sauf aux bornes 0 ou 2 où elle s'annule.

Le théorème des variations s'applique donc sur chaque intervalle, bornes comprises.

Vérifier, à toi, le coin devoir

Vérifie : Comparer sans calculer

Avec ce tableau, et sans calculer f, compare $f(0{,}5)$ et $f(1)$.

A. $f(0{,}5) > f(1)$

Juste.

Juste : $0{,}5$ et 1 sont dans $[0, 2]$, où f est strictement décroissante.

B. $f(0{,}5) < f(1)$

Faux.

Ce serait vrai si f croissait entre $0{,}5$ et 1 ; or elle décroît sur $[0, 2]$.

C. $f(0{,}5) = f(1)$

Faux.

Une fonction strictement décroissante ne prend pas deux fois la même valeur.

D. On ne peut rien dire sans calculer.

Faux.

Le sens de variation sur $[0, 2]$ suffit à comparer.

Correction

Les réels $0{,}5$ et 1 appartiennent à $[0, 2]$, et $0{,}5 < 1$. Sur cet intervalle, f est strictement décroissante. Donc $f(0{,}5) > f(1)$.

Le calcul le confirme : $f(0{,}5) = 2{,}375$ et $f(1) = 1$.

À toi : Un tableau de variations

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$. Dresse son tableau de variations. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Dérive avec les dérivées usuelles et la dérivée d'une somme.
Indice 2
Mets 3 en facteur, puis cherche les racines du trinôme restant.
Indice 3
Point délicat : nomme le signe de g' sur chaque intervalle avant d'écrire le sens de variation.

Réponse
Dérivée. D'après les dérivées des fonctions usuelles et la dérivée d'une somme, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 + 6x - 9 \\ &= 3(x + 3)(x - 1). \end{aligned}$$

Signe. g' s'annule en -3 et en 1. Hors de l'intervalle $[-3, 1]$, le trinôme a le signe de son coefficient dominant 3 ; entre ses racines, le signe contraire.

Variations. $g'(x) > 0$ sur $]-\infty, -3[$ et sur $]1, +\infty[$: g est strictement croissante sur $]-\infty, -3]$ et sur $[1, +\infty[$.

$g'(x) < 0$ sur $]-3, 1[$: g est strictement décroissante sur $[-3, 1]$.

Valeurs. $g(-3) = -27 + 27 + 27 = 27$ et $g(1) = 1 + 3 - 9 = -5$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de g		$\nearrow$	27	$\searrow$	-5	$\nearrow$	

Remarque : Coin devoir : rédiger un sens de variation

En devoir, le signe de f' et l'intervalle figurent dans chaque phrase. Écris :

« Pour tout x de $]2, +\infty[$, $x > 0$ et $x - 2 > 0$, donc $f'(x) > 0$; de plus $f'(2) = 0$. Ainsi $f'(x) > 0$ sur $[2, +\infty[$ sauf en 2, donc f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$. »

Pour inclure une borne, cite la valeur de f' en cette borne. Ne recopie jamais une flèche sans cette phrase.

Extremums

Au sommet d'une bosse

En clair. Au sommet d'une colline, le chemin ne monte plus et ne descend pas encore : il est horizontal.

Sur une courbe, au sommet d'une bosse ou au fond d'un creux, la tangente est horizontale. Son coefficient directeur, le nombre dérivé, est donc nul.

Devine : Le nombre dérivé au sommet

La fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 3$ admet un minimum local en 2. Que vaut $f'(2)$?

A. -1

Faux.
-1 est la valeur du minimum, $f(2)$, pas le nombre dérivé.

B. 2

Faux.
2 est l'abscisse du minimum.

C. 0

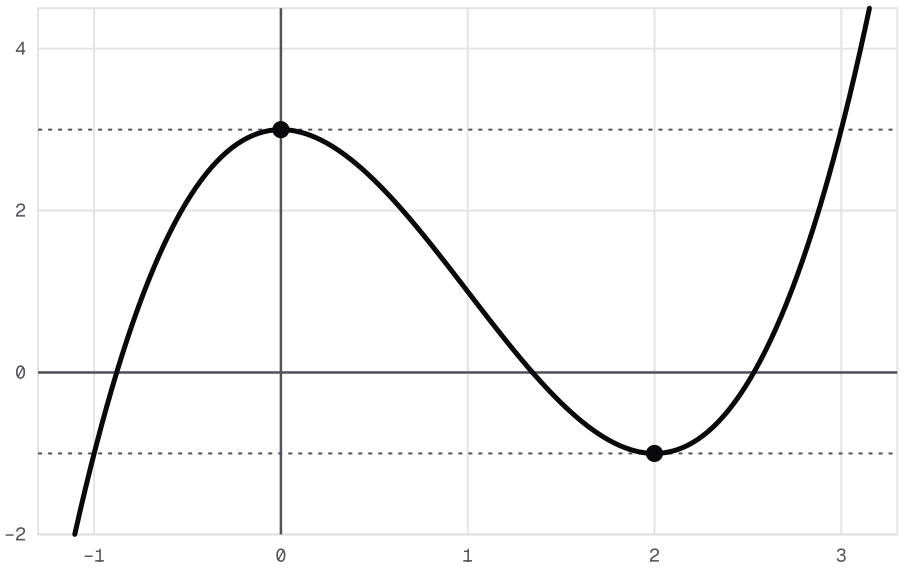
Juste.
Juste : $f'(2) = 3 \times 2^2 - 6 \times 2 = 0$.

D. 24

Faux.
Tu as ajouté 6×2 au lieu de le retrancher : $3 \times 2^2 - 6 \times 2 = 0$.

Correction
D'après l'exemple guidé des variations, $f'(x) = 3x^2 - 6x$ pour tout réel x.

Donc $f'(2) = 12 - 12 = 0$: la tangente au point $(2, -1)$ est horizontale. C'est ce que dit la propriété suivante.



Courbe de f : x ↦ x³ − 3x² + 3. Au sommet de la bosse, le point (0, 3), et au fond du creux, le point (2, −1), la tangente est horizontale : f'(0) = 0 et f'(2) = 0.

Propriété : Extremum et dérivée nulle

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et a un réel de I. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$: la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est parallèle à l'axe des abscisses.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Il exige un intervalle **ouvert** : à une borne, un extremum peut exister sans dérivée nulle.

Deux pièges

Exemple : un extremum à une borne

Sur $[0, 2]$, la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante. Son maximum sur $[0, 2]$ vaut 4, atteint en 2.

Pourtant, son nombre dérivé en 2 vaut $2 \times 2 = 4$, qui n'est pas nul.

Il n'y a pas de contradiction : 2 est une borne de $[0, 2]$, et aucun intervalle ouvert inclus dans $[0, 2]$ ne contient 2.

Attention : une dérivée nulle ne suffit pas

✗ « La dérivée de $x \mapsto x^3$ s'annule en 0. Donc cette fonction a un extremum en 0. »

✓ Sa dérivée $x \mapsto 3x^2$ s'annule en 0, mais $3x^2 > 0$ pour tout $x \neq 0$. La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: aucun extremum en 0.

Une dérivée nulle est nécessaire, pas suffisante : il faut aussi que la dérivée **change de signe**.

Le changement de signe

Pourquoi est-ce vrai ? Supposons f' positive juste avant a et négative juste après.

Avant a, f monte jusqu'à $f(a)$. Après a, elle redescend depuis $f(a)$. La valeur $f(a)$ domine donc toutes ses voisines.

Le lien entre le signe de f' et le sens de variation de f rend ce raisonnement précis.

Propriété : Changement de signe de la dérivée et extremum

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, a un réel de I et r un réel strictement positif tel que $]a-r, a+r[$ soit inclus dans I.

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de $]a-r, a]$ et $f'(x) \leq 0$ pour tout x de $[a, a+r[$, alors $f(a)$ est un **maximum local** de f.
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de $]a-r, a]$ et $f'(x) \geq 0$ pour tout x de $[a, a+r[$, alors $f(a)$ est un **minimum local** de f.

Démonstration

Étape 1. Premier cas. La fonction f, dérivable sur I, l'est sur $]a-r, a]$ et sur $[a, a+r[$. Sur $]a-r, a]$, la dérivée est positive ou nulle : d'après le théorème qui relie le signe de la dérivée aux variations, f y est croissante. Pour tout x de $]a-r, a]$, on a donc $f(x) \leq f(a)$.

Étape 2. Sur l'intervalle $[a, a+r[$, la dérivée est négative ou nulle : d'après le même théorème, f y est décroissante. Pour tout x de $[a, a+r[$, on a donc $f(x) \leq f(a)$.

Étape 3. Ainsi $f(x) \leq f(a)$ pour tout x de l'intervalle ouvert $]a-r, a+r[$, qui contient a : $f(a)$ est un maximum local de f. Le second cas se traite de même, en renversant les inégalités : $f(a)$ est un minimum local.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve coupe l'intervalle autour de a en deux morceaux, de part et d'autre de a.

Sur chacun, le signe de f' donne le sens de variation de f. Les deux sens de variation placent $f(a)$ au-dessus, ou au-dessous, de toutes les valeurs voisines.

Vérifie : Une inégalité de la preuve

Dans la preuve, f est croissante sur $]a-r, a]$. Quelle inégalité en déduit-on pour tout x de cet intervalle ?

A. $f(x) \leq f(a)$

Juste.

Juste : $x \leq a$ et f croissante donnent $f(x) \leq f(a)$.

B. $f(x) \geq f(a)$

Faux.

Une fonction croissante conserve l'ordre : $x \leq a$ donne $f(x) \leq f(a)$.

C. $f'(x) \leq f'(a)$

Faux.

La preuve compare des valeurs de f, pas de f'.

D. $f(x) \leq 0$

Faux.

Le signe de $f(x)$ n'intervient pas : on compare $f(x)$ à $f(a)$.

Correction

Pour x dans $]a-r, a]$, on a $x \leq a$. Comme f est croissante sur cet intervalle, $f(x) \leq f(a)$.

À droite de a, f décroissante donne aussi $f(x) \leq f(a)$. D'où le maximum local.

Exemple : un minimum sur un intervalle ouvert

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x + \dfrac{9}{x}$.

Dérivée. D'après les dérivées des fonctions usuelles, la dérivée d'un produit par un réel et celle d'une somme, pour tout x de $]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{9}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 9}{x^2} \\ &= \frac{(x-3)(x+3)}{x^2}. \end{aligned}$$

Signe. Sur $]0, +\infty[$, $x + 3 > 0$ et $x^2 > 0$: $g'(x)$ a le signe de $x - 3$. Donc $g'(x) \leq 0$ sur $]0, 3]$ et $g'(x) \geq 0$ sur $[3, +\infty[$.

Conclusion. D'après le théorème qui relie un changement de signe de la dérivée à un extremum, $g(3) = 6$ est un minimum local de g.

La méthode

Méthode : rechercher les extremums

1. **Résous** $f'(x) = 0$ sur l'intervalle ouvert étudié.
2. **Vérifie**, pour chaque solution a, que f' **change de signe** en a, à l'aide d'un tableau de signes.
3. **Conclus** : de positive à négative, $f(a)$ est un maximum local ; de négative à positive, un minimum local ; sans changement de signe, aucun extremum en a.
4. **Calcule** la valeur $f(a)$ de l'extremum.

Exemple : Exemple guidé : les extremums d'un polynôme

Reprenons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$, avec $f'(x) = 3x(x-2)$. L'équation $f'(x) = 0$ a deux solutions : 0 et 2.

- En 0, f' passe de positive à négative : $f(0) = 3$ est un maximum local.
- En 2, f' passe de négative à positive : $f(2) = -1$ est un minimum local.

Ce sont des extremums locaux seulement : $f(4) = 19$ dépasse 3, et $f(-2) = -17$ est inférieur à -1 .

À toi, puis le coin devoir

À toi : Des extremums à trouver

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Cherche ses extremums locaux.

La fonction $x \mapsto (x-2)^3$ a-t-elle un extremum en 2 ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule $k'(x)$ avec les dérivées usuelles ; pour la seconde fonction, utilise la dérivée d'une puissance.
Indice 2
Pour k', mets 3 en facteur et cherche les racines du trinôme ; puis dresse le signe de k'.
Indice 3
Point délicat : pour $(x-2)^3$, étudie le signe de sa dérivée de part et d'autre de 2, pas seulement sa valeur en 2.

Réponse
Dérivée de k. D'après les dérivées des fonctions usuelles et la dérivée d'une somme, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} k'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x-1)(x-3). \end{aligned}$$

Extremums de k. La dérivée s'annule en 1 et en 3.

- Elle passe de positive à négative en 1 : $k(1) = 5$ est un maximum local.
- Elle passe de négative à positive en 3 : $k(3) = 1$ est un minimum local.

La seconde fonction. D'après la dérivée d'une puissance, la dérivée de $x \mapsto (x-2)^3$ est $x \mapsto 3(x-2)^2$. Elle s'annule en 2 sans changer de signe : aucun extremum en 2.

Remarque **: Coin devoir : rédiger un extremum**

En devoir, cite les deux faits : la dérivée s'annule, et elle change de signe. Écris :

« Pour x de $]0, 3[$, $g'(x) < 0$; pour x de $]3, +\infty[$, $g'(x) > 0$. La dérivée s'annule en 3 en changeant de signe, donc $g(3) = 6$ est un minimum local de g. »

Dérivées successives ; l'équation y″ + ω²y = 0

Un ressort qui oscille

En clair. Une masse m, accrochée à un ressort de raideur k, oscille autour de sa position d'équilibre. On note $y(t)$ son écart à l'équilibre à l'instant t.

Sa vitesse est $y'(t)$, et son accélération est la dérivée de la vitesse ; on la note $y''(t)$.

En physique, on montre que cette accélération vaut $-\dfrac{k}{m}\,y(t)$. Avec $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, l'écart vérifie donc :

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

Devine : Dériver deux fois

Laquelle de ces fonctions, dérivée deux fois, redonne son opposé, c'est-à-dire vérifie $y'' = -y$?

A. $x \mapsto x^2$

Faux.
Sa dérivée est $x \mapsto 2x$, puis on obtient la constante 2.

B. $x \mapsto \sin x$

Juste.
Juste : la dérivée du sinus est le cosinus, celle du cosinus est $x \mapsto -\sin x$.

C. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Faux.
Dérivée deux fois, elle donne $x \mapsto \dfrac{2}{x^3}$, qui n'est pas son opposé.

D. $x \mapsto \sqrt{x}$

Faux.

Sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$: la dérivée suivante n'est pas $x \mapsto -\sqrt{x}$.

Correction

D'après les dérivées des fonctions usuelles, la dérivée du sinus est le cosinus, et celle du cosinus est $x \mapsto -\sin x$.

En dérivant deux fois le sinus, on obtient donc $x \mapsto -\sin x$.

Le sinus vérifie $y'' + y = 0$: c'est l'équation du ressort avec $\omega = 1$.

Les dérivées successives

Définition : Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f' est elle-même dérivable sur I, sa dérivée s'appelle la **dérivée seconde** de f et se note f''. De proche en proche, on définit les **dérivées successives** de f : on pose $f^{(1)} = f'$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$ lorsque $f^{(n)}$ est dérivable sur I. La fonction $f^{(n)}$ s'appelle la **dérivée n-ième** de f.

Exemple : les dérivées successives d'un cosinus

Soit s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $s(x) = \cos(3x)$. D'après la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$, avec $a = 3$, pour tout réel x :

- $s'(x) = -3\sin(3x)$;
- $s''(x) = -9\cos(3x)$;
- $s^{(3)}(x) = 27\sin(3x)$;
- $s^{(4)}(x) = 81\cos(3x)$.

On remarque que $s''(x) = -9\,s(x)$ pour tout réel x : la fonction s vérifie $s'' + 9s = 0$.

Les solutions de l'équation

Théorème : Solutions de l'équation y″ + ω²y = 0

Soit ω un réel strictement positif. On cherche les fonctions y, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $y''(x) + \omega^2\,y(x) = 0$ pour tout réel x ; on écrit cette **équation différentielle** $y'' + \omega^2 y = 0$. Ses solutions sont exactement les fonctions

$$x \mapsto \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x),$$

où α et β sont deux réels.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Une oscillation sans frottement est donc décrite par un cosinus et un sinus de même pulsation ω.

Exemple : vérifier une solution

Vérifions que la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = 3\cos(2x) - \sin(2x)$ est solution de $y'' + 4y = 0$.

Dérivées. D'après la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$ et la dérivée d'une somme, pour tout réel x :

- $y'(x) = -6\sin(2x) - 2\cos(2x)$;
- $y''(x) = -12\cos(2x) + 4\sin(2x)$.

Vérification. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &y''(x) + 4y(x) \\ &= -12\cos(2x) + 4\sin(2x) \\ &\quad + 12\cos(2x) - 4\sin(2x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

C'est bien une solution, avec $\omega = 2$, $\alpha = 3$ et $\beta = -1$.

Deux conditions initiales

Pourquoi est-ce vrai ? D'après le théorème précédent, chaque solution s'écrit avec deux réels α et β.

Les deux conditions initiales fournissent deux équations. Elles fixent α et β, donc une seule solution.

Propriété : Solution vérifiant deux conditions initiales

Soit ω un réel strictement positif, et y_0 et v_0 deux réels. L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ admet une **unique** solution y telle que $y(0) = y_0$ et $y'(0) = v_0$: c'est la fonction

$$x \mapsto y_0\cos(\omega x) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega x).$$

Démonstration

Étape 1. D'après le théorème qui donne les solutions de l'équation, y est une solution si et seulement si il existe deux réels α et β tels que $y(x) = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$ pour tout réel x.

Étape 2. D'après les dérivées des fonctions usuelles, la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$ et la dérivée d'une somme, $y'(x) = -\alpha\omega\sin(\omega x) + \beta\omega\cos(\omega x)$. En $x = 0$: $y(0) = \alpha$ et $y'(0) = \beta\omega$.

Étape 3. Les conditions s'écrivent $\alpha = y_0$ et $\beta\omega = v_0$, soit, puisque $\omega \neq 0$, $\beta = \dfrac{v_0}{\omega}$. Un seul couple (α, β) convient : la solution existe, elle est unique, et c'est la fonction annoncée.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve ne cherche pas de nouvelles solutions : elle part de la forme $\alpha\cos(\omega x)+\beta\sin(\omega x)$.

En $x=0$, le cosinus vaut 1 et le sinus 0. Donc $y(0)=\alpha$ et $y'(0)=\beta\omega$: les conditions donnent directement α et β.

Vérifie : Trouver bêta

Une solution de $y''+25y=0$ vérifie $y'(0)=10$. Que vaut β ?

A. 10

Faux.
On a $y'(0)=\beta\omega$: il faut diviser par $\omega=5$.

B. 50

Faux.
Tu as multiplié par ω au lieu de diviser.

C. $\dfrac{1}{2}$

Faux.
C'est $\dfrac{5}{10}$: le quotient est pris à l'envers.

D. 2

Juste.
Juste : $\beta=\dfrac{10}{5}=2$.

Correction
Ici $\omega^2=25$ et $\omega>0$, donc $\omega=5$.

La preuve donne $y'(0)=\beta\omega=5\beta$. Donc $5\beta=10$ et $\beta=2$.

Exemple : deux conditions initiales

Cherchons la solution de $y''+9y=0$ telle que $y(0)=2$ et $y'(0)=-3$. Ici $\omega=3$.

Solution. D'après la solution vérifiant deux conditions initiales, avec $y_0=2$ et $v_0=-3$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} y(x) &= 2\cos(3x)+\frac{-3}{3}\sin(3x)\\ &= 2\cos(3x)-\sin(3x). \end{aligned}$$

Contrôle. $y(0)=2$, et $y'(x)=-6\sin(3x)-3\cos(3x)$ donne $y'(0)=-3$.

La méthode

Méthode : résoudre l'équation avec deux conditions

1. **Mets** l'équation sous la forme $y'' + \omega^2 y = 0$, en divisant par le coefficient de y'', et **identifie** $\omega > 0$.
2. **Écris** la solution générale $y(x) = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$.
3. **Calcule** $y'(x)$, puis **traduis** les deux conditions par deux équations en α et β.
4. **Résous**, puis **écris** la solution obtenue.

Exemple : Exemple guidé : un coefficient devant y seconde

Résolvons $4y'' + 9y = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 3$.

Forme. On divise par 4 : $y'' + \dfrac{9}{4}\,y = 0$. Donc $\omega^2 = \dfrac{9}{4}$ et, comme $\omega > 0$, $\omega = \dfrac{3}{2}$.

Solutions. D'après le théorème des solutions, pour tout réel x :

$$y(x) = \alpha\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta\sin\left(\frac{3}{2}x\right).$$

Conditions. Alors $y(0) = \alpha = 0$ et $y'(0) = \dfrac{3}{2}\beta = 3$, d'où $\beta = 2$.

Conclusion. La solution est la fonction $x \mapsto 2\sin\left(\dfrac{3}{2}x\right)$.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Un ressort à résoudre

Une masse de $0{,}2$ kg est accrochée à un ressort de raideur 5 N/m. Son écart y à l'équilibre, en mètres, vérifie $y'' + \dfrac{k}{m}\,y = 0$, où la variable est le temps t. À $t = 0$, $y(0) = 0{,}1$ et $y'(0) = 0{,}5$. Détermine $y(t)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule $\dfrac{k}{m}$, puis $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Indice 2

Écris la solution générale avec cette valeur de ω, puis calcule sa dérivée.

Indice 3

Point délicat : traduis $y'(0) = 0{,}5$ en une équation en β, sans oublier le facteur ω.

Réponse

Pulsation. On a $\dfrac{k}{m} = \dfrac{5}{0{,}2} = 25$, donc $\omega = \sqrt{25} = 5$.

Solutions. D'après le théorème des solutions, pour tout réel t :

$$y(t) = \alpha\cos(5t) + \beta\sin(5t).$$

Conditions. Alors $y(0) = \alpha = 0{,}1$ et $y'(0) = 5\beta = 0{,}5$, d'où $\beta = 0{,}1$.

Conclusion. Pour tout réel t, $y(t) = 0{,}1\cos(5t) + 0{,}1\sin(5t)$, en mètres.

Remarque : Coin devoir : rédiger la résolution

En devoir, montre d'où viennent ω, α et β. Rédige :

« L'équation s'écrit $y'' + 9y = 0$, avec $\omega = 3$. Ses solutions sont les fonctions $x \mapsto \alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)$. Les conditions donnent $\alpha = 2$ et $3\beta = -3$, soit $\beta = -1$. »

Termine par le contrôle de $y(0)$ et de $y'(0)$.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle méthode pour quelle question

- **Nombre dérivé en un point** : le taux de variation, simplifié, puis sa limite.
- **Point de raccord ou borne** : le taux à droite et à gauche, puis la comparaison.
- **Tangente** : $f(a)$, $f'(a)$, puis $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- **Valeur approchée** : $f(a) + f'(a)\,h$ pour h petit.
- **Dérivée d'une fonction** : la forme, l'intervalle, la règle nommée.
- **Variations** : le signe de f' sur chaque intervalle.
- **Extremum** : f' s'annule en changeant de signe.
- **Ressort ou équation** $y'' + \omega^2 y = 0$: ω, la solution générale, puis les deux conditions.

Le mot du prof. Une dérivée n'est jamais un calcul isolé : précise toujours l'intervalle et nomme la règle.

Le signe de la dérivée sert ensuite à tout le reste. Tu retrouveras ces outils dans le chapitre « Étude et représentation des fonctions ».

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Dérivabilité » (1bac · sciences-experimentales · mathematiques)