BURHAN

Résumé : Calcul trigonométrique

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-trigonometrique/resume

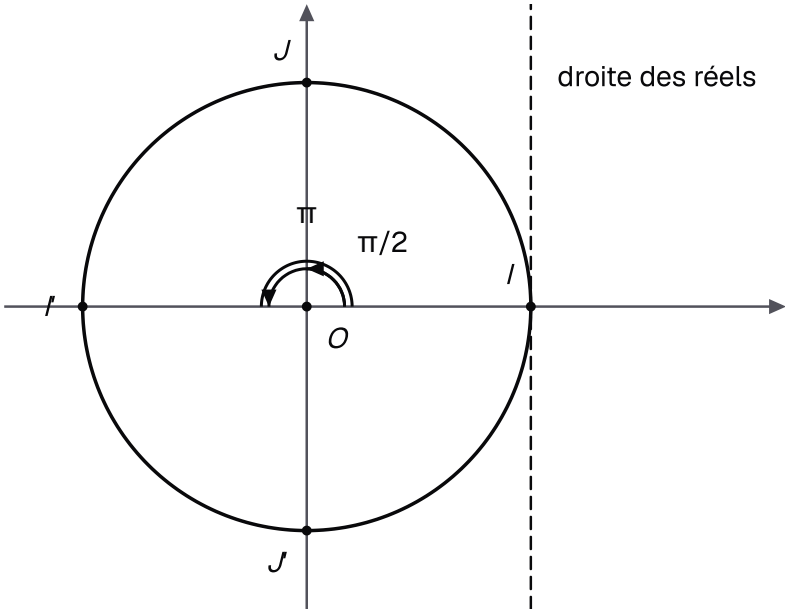
Chapitre	Semestre
Calcul trigonométrique	Semestre 1

Cercle trigonométrique et angles orientés

Définition : Cercle trigonométrique et abscisses curvilignes

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le **cercle trigonométrique** est le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct, contraire à celui des aiguilles d'une montre. On note I le point de coordonnées $(1, 0)$.

- À tout réel x correspond un unique point M de $\mathcal{C}$, obtenu en enroulant la droite des réels sur $\mathcal{C}$, le réel 0 venant en I. On dit que x est une **abscisse curviligne** du point M.
- Réciproquement, tout point M de $\mathcal{C}$ est obtenu de cette façon : il possède au moins une abscisse curviligne.
- Si x est une abscisse curviligne de M, les abscisses curvilignes de M sont exactement les réels $x + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Une seule d'entre elles appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$: c'est l'**abscisse curviligne principale** de M.



Enrouler la droite des réels autour du cercle, à partir de I : chaque réel donne un point du cercle.

Définition : Angle orienté de deux vecteurs et ses mesures

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On note A et B les points du cercle trigonométrique tels que $\overrightarrow{OA}$ ait la même direction et le même sens que $\vec{u}$, et $\overrightarrow{OB}$ la même direction et le même sens que $\vec{v}$. Si a et b sont des abscisses curvilignes de A et de B, le réel $b-a$ est une **mesure** de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$.

- Les mesures de $(\vec{u},\vec{v})$ sont les réels $b-a+2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$; on écrit $(\vec{u},\vec{v})\equiv b-a\ [2\pi]$.
- Une seule mesure de $(\vec{u},\vec{v})$ appartient à $]-\pi,\pi]$: c'est la **mesure principale** de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$.

Propriété : Relation de Chasles et conséquences

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls.

- **Relation de Chasles** : $(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})\equiv(\vec{u},\vec{w})\ [2\pi]$.
- $(\vec{v},\vec{u})\equiv-(\vec{u},\vec{v})\ [2\pi]$ et $(-\vec{u},\vec{v})\equiv(\vec{u},\vec{v})+\pi\ [2\pi]$.
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si $(\vec{u},\vec{v})\equiv 0\ [\pi]$. En particulier, trois points distincts A, B et C sont **alignés** si et seulement si $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv 0\ [\pi]$.

Méthode : la mesure principale

1. **Écris** la mesure sous la forme $\dfrac{p\pi}{q}$, avec $q>0$.
2. **Retranche** (ou ajoute) un nombre entier de tours $2k\pi$.
3. **Trouve** k par l'encadrement $-\pi<\dfrac{p\pi}{q}-2k\pi\leq\pi$.
4. **Conclus** : le réel obtenu est la mesure principale.

Exemple

Énoncé. Trouve la mesure principale d'un angle de mesure $\dfrac{31\pi}{6}$.

Encadrement. $-\pi<\dfrac{31\pi}{6}-2k\pi\leq\pi$ équivaut à $\dfrac{25}{12}\leq k<\dfrac{37}{12}$, donc $k=3$.

Conclusion. $\dfrac{31\pi}{6}-6\pi=-\dfrac{5\pi}{6}$: c'est la mesure principale.

Exemple

Énoncé. On sait que $(\vec{u},\vec{v})\equiv\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ et $(\vec{v},\vec{w})\equiv\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$. Trouve la mesure principale de $(\vec{u},\vec{w})$.

Chasles. $(\vec{u},\vec{w})\equiv\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{17\pi}{12}\ [2\pi]$.

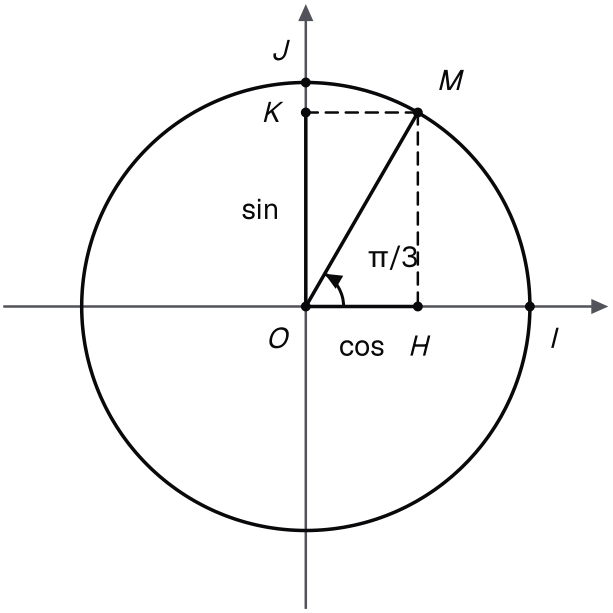
Conclusion. $\dfrac{17\pi}{12}$ dépasse π ; on retire 2π : la mesure principale est $-\dfrac{7\pi}{12}$.

Cosinus, sinus et tangente

Définition : Cosinus, sinus et tangente d'un réel

Soit x un réel et M le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne x.

- Le **cosinus** de x, noté $\cos x$, est l'abscisse de M ; le **sinus** de x, noté $\sin x$, est son ordonnée : $M(\cos x, \sin x)$.
- Si x n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\cos x \neq 0$, et la **tangente** de x est le réel $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.



Le cosinus se lit sur l'axe horizontal, le sinus sur l'axe vertical : exemple avec π/3.

Propriété : Relations fondamentales

Pour tout réel x et tout entier relatif k :

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; en particulier $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$;
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$.

Si de plus $\cos x \neq 0$, alors $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Méthode : une ligne à partir d'une autre

1. **Pars** de $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$: tu obtiens le carré de la ligne cherchée.
2. **Place** le point M associé à x sur le cercle.
3. **Choisis** le signe d'après sa position : à droite ou à gauche, en haut ou en bas.

4. **Termine** par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ quand $\cos x \neq 0$.

Exemple

Énoncé. On sait que $\sin x = -\dfrac{8}{17}$ et $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$. Calcule $\cos x$ et $\tan x$.

Carré. $\cos^2 x = 1 - \dfrac{64}{289} = \dfrac{225}{289}$.

Signe. Le point associé à x est à droite de l'axe des ordonnées : $\cos x > 0$, donc $\cos x = \dfrac{15}{17}$.

Tangente. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = -\dfrac{8}{15}$.

Attention : Le carré ne donne pas le signe

Avec $\cos x = -\dfrac{7}{25}$ et $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, on trouve $\sin^2 x = \dfrac{576}{625}$. Écrire $\sin x = \dfrac{24}{25}$ serait faux. Le point associé à x est sous l'axe des abscisses : $\sin x = -\dfrac{24}{25}$.

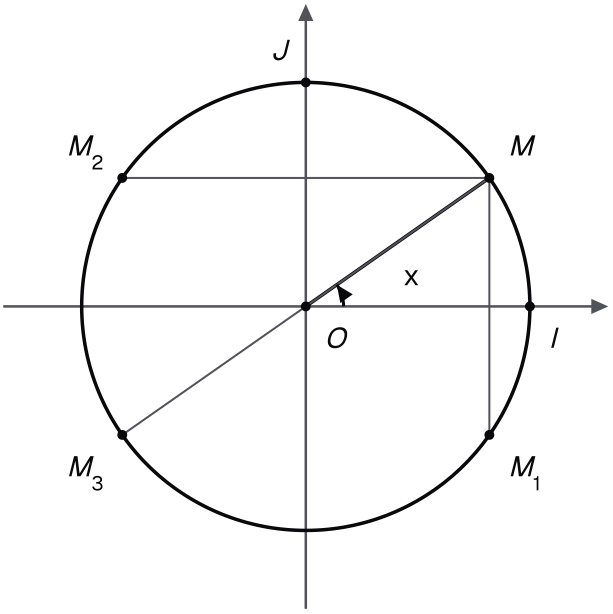
Angles associés

Propriété : Angles associés

Pour tout réel x :

- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$;
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$;
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$;
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$;
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.

Lorsque les tangentes existent : $\tan(-x) = -\tan x$, $\tan(\pi - x) = -\tan x$ et $\tan(\pi + x) = \tan x$.



Un point M d'abscisse x et ses trois reflets, d'abscisses -x, π - x et π + x.

Méthode : réduire avec les angles associés

1. **Supprime** les tours complets : $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2k\pi)=\sin x$.
2. **Reconnais** la forme : $-x$, $\pi-x$, $\pi+x$, $\frac{\pi}{2}-x$ ou $\frac{\pi}{2}+x$.
3. **Remplace** par la formule associée ; le cercle confirme le signe.
4. **Réduis** l'expression.

Exemple

Simplifier. Pour tout réel x, d'après les angles associés :

$$\begin{aligned}&\sin(\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\\&\quad-\cos(x+6\pi)\\&=\sin x-\sin x-\cos x\\&=-\cos x.\end{aligned}$$

Valeurs. $\frac{4\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{3}$, donc $\cos\frac{4\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$ et $\tan\frac{4\pi}{3}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

Formules d'addition

Attention : Pas de calcul terme à terme

Prends $a=\frac{\pi}{6}$ et $b=\frac{\pi}{3}$. Alors $\cos(a+b)=\cos\frac{\pi}{2}=0$, mais $\cos a+\cos b=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Le cosinus d'une somme se calcule par sa formule, jamais terme à terme.

Propriété : Cosinus d'une différence et d'une somme

Pour tous réels a et b :

$$\begin{aligned}\cos(a-b) &= \cos a\cos b \\ &\quad + \sin a\sin b,\\ \cos(a+b) &= \cos a\cos b \\ &\quad - \sin a\sin b.\end{aligned}$$

Propriété : Sinus d'une somme et d'une différence

Pour tous réels a et b :

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a\cos b \\ &\quad + \cos a\sin b,\\ \sin(a-b) &= \sin a\cos b \\ &\quad - \cos a\sin b.\end{aligned}$$

Propriété : Tangente d'une somme et d'une différence

Soit a et b deux réels tels que $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a+b)$ existent. Alors $\tan a\tan b \neq 1$ et

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}.$$

De même, si $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a-b)$ existent, alors $\tan a\tan b \neq -1$ et $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$.

Méthode : une valeur exacte

1. **Découpe** le réel en somme ou différence de deux valeurs remarquables, ou en moitié d'une valeur remarquable.
2. **Nomme** la formule : addition, duplication ou linéarisation.
3. **Remplace** puis simplifie les radicaux.
4. **Contrôle** le signe sur le cercle et l'ordre de grandeur.

Exemple

Énoncé. Calcule $\cos\dfrac{11\pi}{12}$.

Découpage. $\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$.

Formule. D'après le cosinus d'une somme :

$$\begin{aligned}\cos\frac{11\pi}{12} &= -\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

Contrôle. Le point est à gauche de l'axe des ordonnées, et la valeur est proche de -1.

Exemple

Énoncé. On sait que $\tan a = 2$. Calcule $\tan\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$.

Existence. Ici $\cos a \neq 0$ et $\tan a \neq 1$, donc :

$$\begin{aligned}&\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos a\cos\frac{\pi}{4}\,(1-\tan a)\\ &\neq 0.\end{aligned}$$

Ainsi $\tan\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$ existe.

Formule. D'après la tangente d'une somme, avec $\tan\frac{\pi}{4}=1$:

$$\begin{aligned}\tan\left(a+\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{2+1}{1-2\times 1}\\ &= -3.\end{aligned}$$

Duplication et linéarisation

Propriété : Formules de duplication

Pour tout réel a :

- $\sin 2a = 2\sin a\cos a$;
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.

Si de plus $\tan a$ et $\tan 2a$ existent, alors $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

Propriété : Formules de linéarisation

Pour tout réel a :

$$\begin{aligned}\cos^2 a &= \frac{1+\cos 2a}{2},\\ \sin^2 a &= \frac{1-\cos 2a}{2}.\end{aligned}$$

Exemple

Énoncé. On sait que $\sin a = \dfrac{1}{3}$ et $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$. Calcule $\cos 2a$ et $\sin 2a$.

Cosinus. D'après la duplication, $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a = 1 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{9}$.

Sinus. On a $\cos^2 a = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$, et le point est à droite de l'axe des ordonnées, donc $\cos a = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Puis :

$$\sin 2a = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

Exemple

Énoncé. Calcule $\sin \dfrac{\pi}{8}$.

Linéarisation. $\sin^2 \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1 - \cos \dfrac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}$.

Signe. Le point associé à $\dfrac{\pi}{8}$ est au-dessus de l'axe des abscisses : $\sin \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

Produits et sommes

Propriété : Transformation d'un produit en somme

Pour tous réels a et b :

- $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\big]$;
- $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}\big[\cos(a-b) - \cos(a+b)\big]$;
- $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\big[\sin(a+b) + \sin(a-b)\big]$.

Propriété : Transformation d'une somme en produit

Pour tous réels p et q :

- $\cos p + \cos q = 2\cos \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}$;
- $\cos p - \cos q = -2\sin \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{p-q}{2}$;
- $\sin p + \sin q = 2\sin \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}$;
- $\sin p - \sin q = 2\cos \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{p-q}{2}$.

Exemple

Produit en somme. Avec $a = 3x$ et $b = x$: $2\sin 3x \cos x = \sin 4x + \sin 2x$.

Somme en produit. Avec $p = 5x$ et $q = x$: $\sin 5x + \sin x = 2\sin 3x \cos 2x$.

Exemple

Deux signaux proches. On additionne $\cos 11t$ et $\cos 9t$, où t est le temps.

Somme en produit. $\cos 11t + \cos 9t = 2\cos 10t \cos t$.

Lecture. On entend un signal rapide, $\cos 10t$, dont l'amplitude $2|\cos t|$ varie lentement : ce sont des battements.

La forme r cos(x - φ)

Propriété : Transformation de a cos x + b sin x

Soit a et b deux réels non tous les deux nuls, et $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Il existe un réel φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$, et, pour tout réel x :

$$a\cos x + b\sin x = r\cos(x - \varphi).$$

Méthode : transformer a cos x + b sin x

1. **Calcule** $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. **Écris** $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$.
3. **Reconnais** φ parmi les valeurs remarquables, en tenant compte des deux signes.
4. **Exploite** la forme $r\cos(x - \varphi)$: l'expression reste entre $-r$ et r.

Exemple

Énoncé. Transforme $\cos x + \sin x$.

Calcul. $r = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, puis $\cos\varphi = \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Forme. $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Conséquence. La somme reste entre $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$. Deux oscillations d'amplitude 1, décalées d'un quart de période, donnent une amplitude $\sqrt{2}$, et non 2.

Équations trigonométriques

Propriété : Équations trigonométriques fondamentales

Soit α un réel. Pour tout réel x :

- $\cos x = \cos\alpha$ si et seulement si $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$;
- $\sin x = \sin\alpha$ si et seulement si $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Si α et x ne sont pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$: $\tan x = \tan \alpha$ si et seulement si $x = \alpha + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Méthode : résoudre une équation

1. **Isole** la ligne : $\cos x = c$, $\sin x = c$ ou $\tan x = c$.
2. **Contrôle** que $-1 \leq c \leq 1$ pour le cosinus et le sinus ; sinon, aucune solution.
3. **Choisis** un réel α remarquable de même ligne ; les familles de solutions s'en déduisent.
4. **Si un intervalle est imposé**, encadre l'entier k de chaque famille.

Exemple

Énoncé. Résous $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $\mathbb{R}$, puis dans $]-\pi, \pi]$.

Familles. $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$. D'après l'équation fondamentale du sinus : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Intervalle. $-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ donne $-\frac{2}{3} < k \leq \frac{1}{3}$, donc $k = 0$. Pour la seconde famille, $-\pi < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ donne $-\frac{5}{6} < k \leq \frac{1}{6}$, donc $k = 0$.

Conclusion. $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$.

Attention : Deux familles, pas une

Pour $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, écrire seulement $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ perd la solution $\frac{3\pi}{4}$. La seconde famille du sinus est $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$. Pour $\cos x = \cos \alpha$, la seconde famille est $x = -\alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Attention : Tangente : un pas de π

Pour $\tan x = -1$, les solutions sont $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Le pas est π : $\frac{3\pi}{4}$ est aussi solution. Écarte d'abord les réels $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Méthode : une équation du second degré

1. **Ramène** tout à une seule ligne, avec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ou la duplication.
2. **Pose** $X = \cos x$ (ou $X = \sin x$), puis résous par le discriminant.
3. **Écarte** les racines qui sortent de $[-1, 1]$.

4. **Résous** chaque équation fondamentale restante et réunis les solutions.

Exemple

Énoncé. Résous $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$.

Second degré. Avec $X = \cos x$: $\Delta = 9 - 8 = 1$, d'où $X = -\dfrac{1}{2}$ ou $X = -1$, toutes deux dans $[-1, 1]$.

Solutions. $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ donne $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Puis $\cos x = -1$ donne $x = \pi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Inéquations sur le cercle

Méthode : une inéquation

1. **Résous** l'équation associée dans l'intervalle d'étude. Quand l'inconnue est dans un argument comme $2x$ ou $x - \varphi$, nomme u cet argument et calcule d'abord l'intervalle que u décrit.
2. **Place** ces points sur le cercle, avec la droite $x = c$ (cosinus) ou $y = c$ (sinus).
3. **Repère** l'arc où l'inégalité est vraie.
4. **Lis** cet arc dans le sens direct, sans quitter l'intervalle.

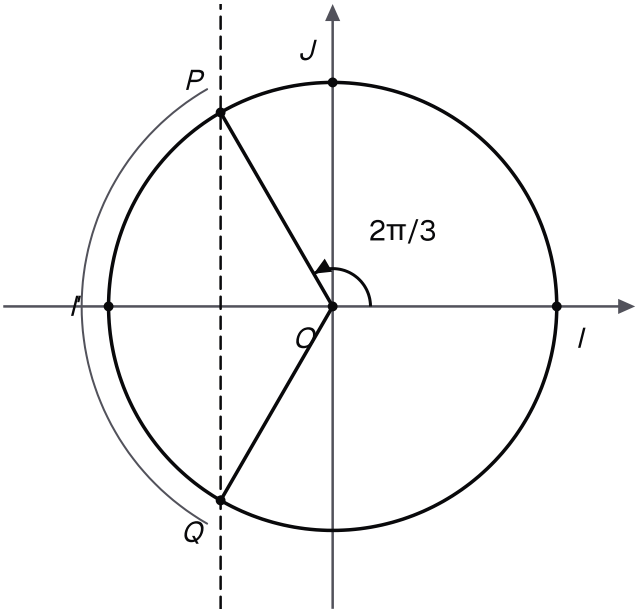
Exemple

Énoncé. Résous $\cos x \leq -\dfrac{1}{2}$ dans $[0, 2\pi[$.

Équation. Dans $[0, 2\pi[$, $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ pour $x = \dfrac{2\pi}{3}$ et $x = \dfrac{4\pi}{3}$.

Arc. Les points d'abscisse au plus $-\dfrac{1}{2}$ sont à gauche de la droite $x = -\dfrac{1}{2}$. Ils forment l'arc qui va de $\dfrac{2\pi}{3}$ à $\dfrac{4\pi}{3}$.

Conclusion. $S = \left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$.



À gauche de la droite x = -1/2, l'arc solution de l'exemple, de 2π/3 à 4π/3.

Attention : Rester dans l'intervalle

Sur $[0, 2\pi[$, l'inéquation $\cos x > 0$ n'a pas pour solution $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: cet intervalle sort de $[0, 2\pi[$. L'arc se lit en deux morceaux : $S = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$.

Quelle formule pour quelle question ?

Méthode : Quelle formule pour quelle question ?

- **Mesure principale** : retirer des tours de 2π, puis encadrer.
- **Ligne inconnue** : la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, puis le signe lu sur le cercle.
- **Réel non remarquable** : les angles associés, ou une formule d'addition.
- **Angle double ou moitié** : la duplication ou la linéarisation.
- **Somme à écrire comme un produit** : les formules de transformation.
- **Amplitude d'une somme de deux oscillations** : la forme $r\cos(x - \varphi)$.
- **Équation** : une équation fondamentale, puis l'encadrement de k.
- $a\cos x + b\sin x = c$: la forme $r\cos(x - \varphi)$, puis une équation fondamentale.
- **Somme de lignes égale à** 0 : la transformer en produit, puis annuler chaque facteur.
- **Inéquation** : l'équation associée, puis l'arc lu sur le cercle.

Relation de Chasles

$$(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})\equiv(\vec{u},\vec{w})\ [2\pi]$$

Relation fondamentale

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

Tangente

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\quad(\cos x\neq 0)$$

Cosinus d'une somme

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b\\-\sin a\sin b$$

Sinus d'une somme

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b\\+\cos a\sin b$$

Tangente d'une somme

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}\\(\cos a\cos b\cos(a+b)\neq 0)$$

Duplication

$$\sin 2a=2\sin a\cos a\\\cos 2a=2\cos^2 a-1$$

Linéarisation

$$\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}\\\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$$

Somme de deux cosinus

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

Forme réduite

$$a\cos x+b\sin x=r\cos(x-\varphi)\\r=\sqrt{a^2+b^2}$$

Équation en cosinus

$$\cos x=\cos\alpha\\\Leftrightarrow x=\alpha+2k\pi\\\text{ou } x=-\alpha+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

Équation en sinus

$$\sin x=\sin\alpha\\\Leftrightarrow x=\alpha+2k\pi\\\text{ou } x=\pi-\alpha+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

> **À retenir : Rédiger en devoir**
>
> Nomme chaque formule : « d'après le cosinus d'une somme ». Justifie chaque signe par la position du point sur le cercle. Écris $k\in\mathbb{Z}$ à chaque famille de solutions. Dans un intervalle, montre l'encadrement de k.